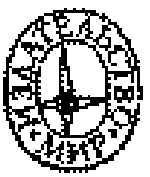


# GRAVITATION

Charles W. Misner
University of Maryland

Kip S. Thorne
California Institute
of Technology

John Archibald Wheeler
Princeton University

W. H. Freeman and Company
San Francisco 1973

Ч. МИЗНЕР

К. ТОРН

Дж. УИЛЕР

# ГРАВИТАЦИЯ

## ТОМ 2

*Перевод с английского*
*А. А. Рузмайкина*

*под редакцией*
*В. Б. Брагинского и И. Д. Новикова*

Издательство «Мир»
Москва 1977

УДК 530.12+523.112

Книга выдающихся американских физиков Ч. Мизнера, К. Торна и Дж. Уилера «Гравитация» уникальна: ее можно рассматривать как монографию, прекрасное учебное пособие и обширный обзор по гравитационной физике. В отличие от имеющихся в настоящее время руководств по гравитации в книге излагаются новые мощные математические методы исследования проблем гравитации и приводятся многочисленные приложения теории к самым разнообразным астрономическим, астрофизическим и физическим проблемам.

Книга в русском переводе разделена на три тома. Второй том включает IV-VI части американского издания. Часть IV посвящена геометрической теории тяготения Эйнштейна. В ней авторы, не обращаясь к решениям уравнений Эйнштейна, концентрируют внимание на основных принципах. В частях V и VI рассматриваются проблемы релятивистской астрофизики и космологии, например в части V — релятивистские звезды, а в части VI — космологические модели анизотропной и неоднородной Вселенной.

В данном томе так же, как и в других томах, текст разделен на два курса, «перемешанных между собой» и помеченных крупными цифрами 1 и 2 на углах каждой страницы (в оглавлении той же цели служит жирная черная черта рядом с номерами параграфов). Курс 1 предназначен для общего знакомства с вопросом; в курсе 2 дается более специальное и подробное изложение.

Книга имеет много иллюстраций и обширную библиографию. Она будет полезна широкому кругу специалистов, аспирантов и студентов, которые интересуются этой быстро развивающейся областью физики.

*Редакция литературы по физике*

М $\frac{20401-050}{041(01)-77}$ 50—77

© 1973 by W. H. Freeman and Company
© Перевод на русский язык, «Мир», 1977

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Часть IV. Геометрическая теория тяготения Эйнштейна


Глава 16. Принцип эквивалентности и измерение «гравитационного поля» 13

§ 16.1. Предварительные замечания 13

§ 16.2. Законы физики в искривленном пространстве-времени 13

§ 16.3. Проблема порядка индексов в принципе эквивалентности 17

Дополнение 16.1. Проблема порядка индексов и ее связь с кривизной в приложениях принципа эквивалентности 20

§ 16.4. Часы и стержни, используемые для измерения временны́х и пространственных интервалов 22

Дополнение 16.2. Доказательство того, что маятниковые часы, покоящиеся на поверхности Земли, являются идеальными 24

Дополнение 16.3. Отклик часов на ускорение и приливные гравитационные силы 25

Дополнение 16.4. Построение идеальных стержней и часов из геодезических мировых линий 26

§ 16.5. Измерение гравитационного поля 28

Дополнение 16.5. Гравитационный градиометр для измерения римановой кривизны пространства-времени 31

Глава 17. Как масса-энергия порождает кривизну 34

§ 17.1. Автоматическое сохранение источника как важнейшая идея при формулировке уравнения поля 34

§ 17.2. Автоматическое сохранение источника: динамическая необходимость 38

§ 17.3. Космологическая постоянная 40

§ 17.4. Ньютоновский предел 43

Дополнение 17.1. Принципы соответствия 46

§ 17.5. Аксиоматический подход к теории Эйнштейна 48

Дополнение 17.2. Шесть маршрутов к эйнштейновскому геометродинамическому закону равенства кривизны и плотности энергии («уравнение поля Эйнштейна») 48

§ 17.6. Отсутствие априорной геометрии — характерная черта, отличающая теорию Эйнштейна от других теорий тяготения 59

Дополнение 17.3. Эксперимент по обнаружению или исключению некоторых типов априорной геометрии 61

§ 17.7. Фрагмент истории создания уравнения Эйнштейна 62

**Глава 18. Слабые гравитационные поля 68**

§ 18.1. Линеаризованная теория тяготения 68

Дополнение 18.1. Выводы общей теории относительности с геометрической точки зрения и с точки зрения теории поля со спином 2; сравнение и противопоставление 72

Дополнение 18.2. Калибровочные и координатные преобразования в линеаризованной теории 73

§ 18.2. Гравитационные волны 75

§ 18.3. Влияние тяготения на материю 75

§ 18.4. Почти ньютоновские гравитационные поля 79

**Глава 19. Масса и момент импульса гравитирующей системы 82**

§ 19.1. Внешнее поле слабо гравитирующего источника 82

§ 19.2. Измерение массы и момента импульса 85

§ 19.3. Масса и момент импульса полностью релятивистских источников 86

Дополнение 19.1. Полные масса-энергия, 4-импульс и момент импульса изолированной системы 91

§ 19.4. Масса и момент импульса замкнутой Вселенной 93

Дополнение 19.2. Поправочный член к метрике вблизи выбранных небесных тел 95

**Глава 20. Законы сохранения 4-импульса и момента импульса 96**

§ 20.1. Общие замечания 96

§ 20.2. Интегральные гауссовы потоки для 4-импульса и момента импульса 96

§ 20.3. Выражение 4-импульса и момента импульса в виде объемных интегралов 101

§ 20.4. Почему невозможна локализация энергии гравитационного поля 104

§ 20.5. Законы сохранения полного 4-импульса и полного момента импульса 105

§ 20.6. Вывод уравнений движения из уравнения поля 109

Дополнение 20.1. Отличие собственно лоренцевых преобразований от дуального вращения 123

Дополнение 20.2. Преобразование вырожденного (ненулевого) тензора электромагнитного поля $F = (E, B)$ в локально инерциальной системе отсчета 123

**Глава 21. Вариационный принцип и начальные данные 124**

§ 21.1. Динамика требует начальных данных 124

§ 21.2. Принцип действия Гильберта и вариационный метод Палатини 132

Дополнение 21.1. Скорость изменения действия со временем, скорость изменения действия с динамической координатой (= «импульсом») и дисперсионное соотношение (= «гамильтониан»), которое связывает эти скорости в механике частицы и в электродинамике 138

§ 21.3. Лагранжиан материи и тензор энергии-импульса 145

§ 21.4. Расщепление пространства-времени на пространство и время 147

§ 21.5. Внутренняя и внешняя кривизна 150

§ 21.6. Принцип действия Гильберта и его модификация Арновиттом — Дезером — Мизнером, которые использовали расщепление пространства-времени на пространство и время 163

§ 21.7. Формулировка динамики геометрии по Арновитту, Дезеру и Мизнеру 164

§ 21.8. Интегрирование вперед по времени 171

§ 21.9. Формулировка проблемы начальных значений в тонком сандвиче 174

Дополнение 21.2. Подсчет степеней свободы электромагнитного поля 180

§ 21.10. Проблемы симметричных и антисимметричных по времени начальных значений 182

§ 21.11. Определение 4-геометрии по методу Йорка 187

§ 21.12. Принцип Маха и происхождение инерции 192

§ 21.13. Условия сшивания 202

Глава 22. Термодинамика, гидродинамика, электродинамика, геометрическая оптика и кинетическая теория 209

§ 22.1. Основание для написания этой главы 209

§ 22.2. Термодинамика в искривленном пространстве-времени 209

Дополнение 22.1. Главные альтернативные возможности выбора «первичного термодинамического потенциала» для описания жидкости 214

§ 22.3. Гидродинамика в искривленном пространстве-времени 215

Дополнение 22.2. Термодинамика и гидродинамика простой идеальной жидкости в искривленном пространстве-времени 222

§ 22.4. Электродинамика в искривленном пространстве-времени 223

§ 22.5. Геометрическая оптика в искривленном пространстве-времени 225

Дополнение 22.3. Геометрия цуга электромагнитных волн 235

Дополнение 22.4. Геометрическая оптика в искривленном пространстве-времени 237

§ 22.6. Кинетическая теория в искривленном пространстве-времени 239

Дополнение 22.5. Объем в фазовом пространстве 246

Дополнение 22.6. Сохранение объема в фазовом пространстве 247

## Часть V. Релятивистские звезды

Глава 23. Сферические звезды 253

§ 23.1. Пролог 253

§ 23.2. Координаты и метрика статической сферической системы 254

Дополнение 23.1. Строгий вывод сферически симметричного линейного элемента 256

§ 23.3. Физическая интерпретация шварцшильдовских координат 258

§ 23.4. Описание вещества внутри звезды 260

§ 23.5. Уравнения внутреннего строения звезды 264

Дополнение 23.2. Масса-энергия внутри радиуса $r$ 270

§ 23.6. Внешнее гравитационное поле 271

§ 23.7. Как построить звездную модель 272

Дополнение 23.3. Релятивистская модель звезды с однородной плотностью 274

§ 23.8. Геометрия пространства-времени для статической звезды 276

Глава 24. Пульсары и нейтронные звезды; квазары и сверхмассивные звезды 282

§ 24.1. Общие замечания 282

Дополнение 24.1. Звездные конфигурации, для которых существенны релятивистские эффекты 283

§ 24.2. Заключительная стадия эволюции звезды 289

§ 24.3. Пульсары 294

§ 24.4. Сверхмассивные звезды и устойчивость звезд 297

Дополнение 24.2. Колебание ньютоновской звезды 300

§ 24.5. Квазары и взрывы в галактических ядрах 301

§ 24.6. Релятивистские звездные скопления 302

Глава 25. «Яма в потенциале» как основное новое характерное свойство потенциала, определяющего движение в шварцшильдовской геометрии 303

§ 25.1. От законов Кеплера к эффективному потенциалу для движения в шварцшильдовской геометрии 303

Дополнение 25.1. Масса, вычисленная по средней угловой скорости и большой полуоси: $M = \omega^2 a^3$ 307

Дополнение 25.2. Движение в шварцшильдовской геометрии как основная отправная точка главных приложений эйнштейновской геометродинамики 308

Дополнение 25.3. Описание движения с помощью метода Гамильтона — Якоби: естественность такого описания ратифицирована квантовым принципом 309

Дополнение 25.4. Анализ движения под действием гравитационного притяжения центральной массы, проведенный с помощью метода Гамильтона — Якоби 312

§ 25.2. Симметрия и законы сохранения 317

Дополнение 25.5. Векторы Киллинга и изометрии 321

§ 25.3. Сохраняющиеся величины при движении в шварцшильдовской геометрии 323

§ 25.4. Гравитационное красное смещение 327

§ 25.5. Орбиты частиц 328

Дополнение 25.6. Качественные особенности орбиты частицы, движущейся в шварцшильдовской геометрии 340

§ 25.6. Орбита фотона, нейтрино или гравитона в шварцшильдовской геометрии 342

Дополнение 25.7. Качественный анализ орбит фотона в шварцшильдовской геометрии 349

§ 25.7. Сферические звездные скопления 350

Дополнение 25.8. Уравнения внутреннего строения для сферического звездного скопления 355

Дополнение 25.9. Изотермические звездные скопления 356

Глава 26. Звездные пульсации 359

§ 26.1. Обоснование 359

§ 26.2. Постановка проблемы 360

§ 26.3. Сравнение эйлеровых и лагранжевых возмущений 362

§ 26.4. Уравнения для начальных значений 362

§ 26.5. Динамическое уравнение и граничные условия 365

Дополнение 26.1. Задачи на собственные значения и вариационный принцип для нормальных мод пульсаций звезды 366

§ 26.6. Краткая сводка результатов 368

Дополнение 26.2. Критический показатель адиабаты для почти ньютоновских звезд 369

## Часть VI. Вселенная

Глава 27. Идеализованные космологические модели 373

§ 27.1. Однородность и изотропия Вселенной 373

Дополнение 27.1. Космология вкратце 374

§ 27.2. Энергия-импульс материи Вселенной — приближение идеальной жидкости 380

§ 27.3. Геометрический смысл однородности и изотропии 382

§ 27.4. Сопутствующие, синхронные системы координат для Вселенной 385

§ 27.5. Коэффициент расширения 388

§ 27.6. Возможные 3-геометрии для гиперповерхности однородности 391

Дополнение 27.2. 3-геометрия гиперповерхностей однородности 394

§ 27.7. Уравнения движения жидкости 398

§ 27.8. Эйнштейновское уравнение поля 400

§ 27.9. Временные параметры и постоянная Хаббла 403

§ 27.10. Элементарная фридмановская космология замкнутой Вселенной 405

Дополнение 27.3. Решения для элементарной фридмановской закрытой космологической модели Вселенной в двух предельных случаях: 1) преобладает вещество, а излучением можно пренебречь, 2) преобладает излучение, а веществом можно пренебречь 414

Дополнение 27.4. Типичная космологическая модель, совместимая с астрономическими наблюдениями и с эйнштейновским пониманием космологии ($\Lambda = 0$, Вселенная замкнута) 415

§ 27.11. Однородные изотропные модели Вселенной, не согласующиеся с эйнштейновским пониманием космологии 416

Дополнение 27.5. Влияние величины космологической постоянной и «современного» значения внутренней кривизны модели Вселенной на предсказываемый ход эволюции космологической модели 424

Дополнение 27.6. Александр Александрович Фридман 427

Дополнение 27.7. Некоторые шаги в космологии по пути к дальнейшему познанию и прочным основам 428

Глава 28. Эволюция Вселенной к ее современному состоянию 439

§ 28.1. «Стандартная модель» Вселенной 439

Дополнение 28.1. Эволюция популяции квазаров 444

§ 28.2. Модификация стандартной модели для случая первичного хаоса 446

§ 28.3. Что «предшествовало» начальной сингулярности? 447

§ 28.4. Другие космологические теории 448

Глава 29. Современное состояние и будущая эволюция Вселенной 449

§ 29.1. Параметры, которые определяют судьбу Вселенной 449

Дополнение 29.1. Сравнение наблюдательных параметров с параметрами теории относительности 451

§ 29.2. Космологическое красное смещение 453

Дополнение 29.2. Космологическое красное смещение реликтового излучения 458

Дополнение 29.3. Использование красного смещения для характеристики расстояний и времени 459

§ 29.3. Соотношение расстояние — красное смещение; измерение постоянной Хаббла 460

§ 29.4. Соотношение величина — красное смещение; измерение параметра замедления 462

Дополнение 29.4. Измерение постоянной Хаббла и параметра замедления 466

Дополнение 29.5. Эдвин Пауэлл Хаббл 472

§ 29.5. Поиск «эффекта линзы» Вселенной 475

§ 29.6. Современная плотность Вселенной 477

§ 29.7. Краткая сводка современных сведений о космологических параметрах 478

Глава 30. Анизотропные и неоднородные космологические модели 481

§ 30.1. Почему Вселенная так однородна и изотропна? 481

§ 30.2. Казнеровская модель анизотропной Вселенной 482

§ 30.3. Адиабатическое охлаждение анизотропии 483

§ 30.4. Вязкая диссипация анизотропии 484

§ 30.5. Рождение частиц в анизотропной Вселенной 485

§ 30.6. Неоднородные космологические модели 486

§ 30.7. Перемешанный мир 487

Дополнение 30.1. Модель перемешанного мира 489

§ 30.8. Горизонты и изотропия микроволнового излучения 500

Литература 503

Предметный указатель 520

ЧАСТЬ IV

# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

*Здесь читателю предлагается вступить в союз с самой изящной из всех обольстительниц — Геометродинамикой — и узнать от нее о магических зельях и заклинаниях, властвующих над Вселенной*

# 16. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ИЗМЕРЕНИЕ «ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ»

*Вместо одной глобальной системы отсчета с гравитационными силами мы имеем много локальных систем отсчета без гравитационных сил.*

СТЕФАН ШУТЦ, 1986 г.[1])

## § 16.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Цель этой главы

Теперь, когда мы твердо овладели математикой искривленного пространства-времени, у нас появилось желание броситься, очертя голову, в детальное изучение эйнштейновских уравнений поля. Однако еще на некоторое время следует устоять от такого соблазна. Чтобы полностью усвоить уравнения поля, необходимо прежде всего понять, как изменяются (или не изменяются) классические законы физики при переходе от плоского к искривленному пространству (§ 16.2 и 16.3); затем необходимо понять,как можно «измерить» (§ 16.4 и 16.5) «гравитационное поле» (метрику, ковариантную производную, кривизну пространства-времени,...).

## § 16.2. ЗАКОНЫ ФИЗИКИ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

В любом месте и в любой момент времени можно ввести локально инерциальную систему отсчета, в которой все пробные частицы движутся по прямым линиям. Более того, эта локально инерциальная система отсчета будет также локально лоренцевой: скорость света в ней имеет стандартное значение и световые лучи, подобно мировым линиям пробных частиц, прямолинейны. Но физика представляет собой нечто большее — в ней мало описать только движения пробных частиц и световых лучей. Важно понять, как изменяются уравнения Максвелла, законы гидродинамики,

[1]) Цитируется его утверждение на последнем экзамене по курсу теории относительности, Принстонский университет.

принципы атомной структуры и вся остальная физика в «сильных гравитационных полях».

**Принцип эквивалентности Эйнштейна**

Ответ прост: *В любой локально лоренцевой системе отсчета, в любой момент времени и в любом месте Вселенной все (негравитационные) законы физики должны принимать тот вид, который они имеют в специальной теории относительности.* Иначе говоря, невозможно посредством экспериментов, проводимых в бесконечно малых областях пространства-времени, отличить одну локально лоренцеву систему отсчета в этой области пространства-времени от другой локально лоренцевой системы отсчета в той же или любой другой области. Это и есть принцип эквивалентности Эйнштейна в сильнейшей форме — принцип, который непоколебим как философски, так и экспериментально (соответствующие эксперименты см. в § 38.6).

**Принцип эквивалентности как связующее звено между негравитационными законами и гравитацией**

Принцип эквивалентности имеет огромную силу. С его помощью можно обобщить все физические законы специальной теории относительности на случай искривленного пространства-времени, причем кривизна не обязательно должна быть малой. Она может быть столь же велика, как и кривизна в центре нейтронной звезды или кривизна на краю черной дыры. Фактически кривизна может быть произвольно велика или почти произвольно велика. Лишь в конечной точке гравитационного коллапса или в начальный момент «большого взрыва», т. е. только в «сингулярностях пространства-времени» будут нарушаться условия непосредственной применимости принципа эквивалентности (см. § 28.3, 34.6, 43.3, 43.4 и гл. 44) [1]. Во всех других случаях принцип эквивалентности служит связующим звеном между негравитационными законами физики и гравитацией.

*Пример*: Сформулируете в гравитационном поле «локальный закон сохранения энергии-импульса», $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$.

*Решение*

1. В плоском пространстве-времени этот закон, записанный в абстрактной геометрической форме, гласит:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0. \tag{16.1а}$$

2. Переписанный в глобально лоренцевой системе отсчета плоского пространства-времени он имеет вид

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \tag{16.1б}$$

3. Применив принцип эквивалентности, можно записать то же уравнение в локально лоренцевой системе отсчета искривленного

---

[1]) Точнее, в сингулярностях нет регулярного пространства-времени, нет регулярных систем отсчета вообще и принцип эквивалентности просто не к чему применять. — *Прим. ред.*

пространства-времени:

$$T^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{;\hat{\nu}} = 0 \quad \text{в начале локально лоренцевой системы отсчета.} \tag{16.1в}$$

Поскольку коэффициенты связности в начале локально лоренцевой системы отсчета исчезают, то это можно переписать так:

$$T^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{,\hat{\nu}} = 0 \text{ в начале локально лоренцевой системы отсчета.} \tag{16.1г}$$

4. Полученные уравнения представляют собой локально лоренцевые компоненты следующего геометрического закона в искривленном пространстве-времени:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0; \tag{16.1д}$$

последний можно записать в компонентной форме в произвольной системе отсчета

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{16.1е}$$

Сравните абстрактный геометрический закон (16.1д) в искривленном пространстве-времени с соответствующим законом (16.1а) в плоском пространстве-времени. Они тождественны! В том, что это не случайность, можно легко убедиться, применяя вышеприведенное четырехступенчатое доказательство к любому другому закону физики (например, к уравнениям Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{F} = 4\pi\mathbf{J}$). *Законы физики, записанные в абстрактной геометрической форме, имеют одинаковый вид в плоском и в искривленном пространстве-времени*; это гарантируется принципом эквивалентности и фактически представляет собой его простую формулировку.

Сравните вид закона $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$, записанного в компонентной форме в произвольной системе отсчета искривленного пространства-времени [уравнение (16.1е)], с соответствующим видом этого закона в глобально лоренцевой системе отсчета плоского пространства-времени [уравнение (16.1б)]. Они отличаются только тем, что запятая (частная производная, градиент в плоском пространстве-времени) заменена точкой с запятой (ковариантная производная, градиент в искривленном пространстве-времени). Такая процедура переписывания уравнений имеет универсальную применимость. *Законы физики, записанные в компонентной форме, при переходе от плоского к искривленному пространству-времени изменяются путем простой замены всех запятых на точки с запятой* (никакого физического или геометрического изменения не происходит, происходит лишь переключение из лоренцевой системы отсчета в нелоренцеву систему отсчета!). Это утверждение, подобно утверждению о неизменности абстрактных геометрических законов, есть не что иное, как перефразированная формулировка принципа эквивалентности.

**Правило: «запятая переходит в точку с запятой»**

### 16.2. Мировые линии фотонов

УПРАЖНЕНИЯ

Покажите, что в плоском пространстве-времени закон сохранения 4-импульса свободно движущегося фотона можно записать в виде

$$\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p} = 0. \tag{16.4а}$$

В соответствии с принципом эквивалентности уравнение (16.4а) должно быть справедливо также и в искривленном пространстве-времени. Покажите, что это означает, что фотон движется по нулевым геодезическим искривленного пространства-времени с аффинным параметром $\lambda$, связанным с 4-импульсом формулой

$$\mathbf{p} = d/d\lambda. \tag{16.4б}$$

В упражнении 18.6 этот результат будет использован для расчета отклонения света Солнцем.

## § 16.3. ПРОБЛЕМА ПОРЯДКА ИНДЕКСОВ В ПРИНЦИПЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Проблема порядка индексов и ее связь с кривизной

Иногда при применении принципа эквивалентности для перехода от физики в плоском пространстве-времени к физике в искривленном пространстве-времени сталкиваются с «вопросом о порядке индексов» по аналогии с проблемой порядка сомножителей, встающей при переходе от классической механики к квантовой [1]). *Пример*: Как перевести в искривленное пространство-время уравнение (3.56) для векторного электродинамического потенциала? Если в плоском пространстве-времени уравнение записывается в виде

$$-A^{\alpha,\ \mu}{}_{\mu} + A^{\mu}{}_{,\ \mu}{}^{\alpha} = 4\pi J^{\alpha},$$

то, согласно правилу «запятая переходит в точку с запятой», оно принимает вид

$$-A^{\alpha;\ \mu}{}_{\mu} + A^{\mu}{}_{;\ \mu}{}^{\alpha} = 4\pi J^{\alpha}. \tag{16.5}$$

Однако если в уравнении в плоском пространстве-времени изменить порядок частного дифференцирования, т. е.

$$-A^{\alpha,\ \mu}{}_{\mu} + A^{\mu,\ \alpha}{}_{\mu} = 4\pi J^{\alpha},$$

то оно перейдет в уравнение

$$-A^{\alpha;\ \mu}{}_{\mu} + A^{\mu;\ \alpha}{}_{\mu} = 4\pi J^{\alpha},$$

[1]) Обсуждение квантовомеханических проблем порядка сомножителей см., например, в книге Мерцбахера [37], стр. 138, 139 и 334, 335, а также в работе Паули [38].

Описанный выше переход в формализме от плоского к искривленному пространству-времени — процедура тривиальная. Однако она не тривиальна в приложениях. Такой подход связывает гравитацию со всеми законами физики, причем гравитация входит главным образом через ковариантные производные искривленного пространства-времени, как это ясно видно из упражнения 16.1.

---

УПРАЖНЕНИЯ

**16.1. Гидродинамика в слабом гравитационном поле**

а. В § 18.4 будет показано, что для почти ньютоновской системы, рассматриваемой в соответствующей почти глобально лоренцевой системе координат, метрика имеет вид

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)\, dt^2 + (1 - 2\Phi)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{16.2а}$$

где $\Phi$ — ньютоновский потенциал ($-1 \ll \Phi < 0$). Рассмотрите почти ньютоновскую идеальную жидкость с тензором энергии-импульса

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta}, \quad p \ll \rho \tag{16.2б}$$

(см. дополнение 5.1 и § 5.10), движущуюся в таком пространстве-времени с обычной скоростью

$$v^j \equiv dx^j/dt \ll 1. \tag{16.2в}$$

Покажите, что уравнения $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ для этой системы сводятся к привычному ньютоновскому закону сохранения массы и ньютоновскому уравнению движения жидкости в гравитационном поле:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial v^j}{\partial x^j}, \qquad \rho \frac{dv^j}{dt} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} - \frac{\partial p}{\partial x^j}, \tag{16.3а}$$

где $d/dt$ означает сопутствующую веществу производную по времени

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v^j \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{16.3б}$$

б. Примените эти уравнения для вычисления градиента давления в земной атмосфере как функции температуры и давления. Используйте в расчетах нерелятивистское соотношение $\rho = n_M \mu_M$, где $n_M$ — число молекул в 1 см$^3$ и $\mu_M$ — средняя масса покоя на одну молекулу, а также используйте уравнение состояния идеального газа

$$p = n_M k T \qquad (k \text{ — постоянная Больцмана})$$

и сферически-симметричный вид $\Phi = -M/r$ ньютоновского потенциала Земли. Если давление на уровне моря равно $1{,}01 \cdot 10^6$ дин/см$^2$, то каково приблизительно давление на вершине горы Эверест (высота 8 840 м)? (Сделайте разумное предположение о распределении температуры в атмосфере.)

которое можно переписать так:

$$-A^{\alpha;\,\mu}{}_{\mu}+A^{\mu}{}_{;\,\mu}{}^{\alpha}+R^{\alpha}{}_{\mu}A^{\mu}=4\pi J^{\alpha}. \qquad (16.5')$$

(Тензор Риччи появляется в результате изменения порядка ковариантного дифференцирования, см. упражнение 16.3.) Какое из двух уравнений правильное — (16.5) или (16.5')? Вопрос не тривиален, так же как не тривиальны аналогичные проблемы порядка сомножителей в квантовой теории. Правила «на пальцах», которые разрешают эту и другие проблемы порядка индексов, можно найти в дополнении 16.1. Эти правила гласят, что уравнение (16.5') правильно, а уравнение (16.5) ошибочно (см. дополнение 16.1 и § 22.4).

---

**УПРАЖНЕНИЯ**

**16.3. Некоммутативность ковариантных производных**

Пусть $\mathbf{B}$ — векторное поле и $\mathbf{S}$ — поле тензора второго ранга. Покажите, что

$$B^{\mu}{}_{;\,\alpha\beta}=B^{\mu}{}_{;\,\beta\alpha}+R^{\mu}{}_{\nu\beta\alpha}B^{\nu}, \qquad (16.6а)$$

$$S^{\mu\nu}{}_{;\,\alpha\beta}=S^{\mu\nu}{}_{;\,\beta\alpha}+R^{\mu}{}_{\rho\beta\alpha}S^{\rho\nu}+R^{\nu}{}_{\rho\beta\alpha}S^{\mu\rho}. \qquad (16.6б)$$

Воспользовавшись уравнением (16.6а), покажите также, что

$$B^{\mu;\,\alpha}{}_{\mu}=B^{\mu}{}_{;\,\mu}{}^{\alpha}+R^{\alpha}{}_{\mu}B^{\mu}. \qquad (16.6в)$$

[*Указание* к расчету в рамках курса 1: Работайте в локально лоренцевой системе отсчета, где $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=0$, но $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\,\delta}\neq 0$; распишите левую часть, используя символы Кристоффеля и частные производные; примените равенство (8.44) для тензора Римана. Для альтернативного расчета в курсе 2 заметим, что $\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}\mathbf{B}$ *нелинейно* по $\mathbf{e}_{\alpha}$ и что $B^{\mu}{}_{;\alpha\beta}$ *не* являются компонентами этого тензора, а

$$B^{\mu}{}_{;\,\alpha\beta}\equiv\underbrace{\nabla\nabla\mathbf{B}}_{\text{тензор третьего ранга}}(\omega^{\mu},\,\mathbf{e}_{\alpha},\,\mathbf{e}_{\beta}). \qquad (16.7)$$

Расчет затем продолжается следующим образом:

$$\begin{aligned}\langle\omega^{\mu},\,\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}\mathbf{B}\rangle&=\langle\omega^{\mu},\,\nabla_{\beta}\,(\mathbf{e}_{\alpha}\cdot\nabla\mathbf{B})\rangle=\langle\omega^{\mu},\,(\nabla_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha})\cdot\nabla\mathbf{B}+\mathbf{e}_{\alpha}\cdot(\nabla_{\beta}\nabla\mathbf{B})\rangle=\\&=\langle\omega^{\mu},\,\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\,\mathbf{e}_{\nu}\cdot\nabla\mathbf{B}+\nabla\nabla\mathbf{B}\,(\ldots,\,\mathbf{e}_{\alpha},\,\mathbf{e}_{\beta})\rangle=\\&=B^{\mu}{}_{;\,\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}+B^{\mu}{}_{;\,\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}B^{\mu}{}_{;\,\alpha\beta}-B^{\mu}{}_{;\,\beta\alpha}&=\langle\omega^{\mu},\,[\nabla_{\beta},\,\nabla_{\alpha}]\,\mathbf{B}\rangle-B^{\mu}{}_{;\,\nu}\,(\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha})=\\&=\langle\omega^{\mu},\,[\nabla_{\beta},\,\nabla_{\alpha}]\,\mathbf{B}\rangle-\langle\omega^{\mu},\,\nabla_{(\nabla_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha}-\nabla_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta})}\mathbf{B}\rangle=\\&=\langle\omega^{\mu}\,([\nabla_{\beta},\,\nabla_{\alpha}]-\nabla_{[\mathbf{e}_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha}]})\,\mathbf{B}\rangle=\langle\omega^{\mu}\mathscr{R}\,(\mathbf{e}_{\beta},\,\mathbf{e}_{\alpha})\,\mathbf{B}\rangle=\\&=R^{\mu}{}_{\nu\beta\alpha}B^{\nu}\end{aligned}$$

в согласии с (16.6а). *Замечание*: Вследствие некоторой неоднозначности абстрактной записи следует проявлять осторожность на каждой ступени расчета. В противоположность этому запись в компонентной форме полностью однозначна.]

## 16.4. Прецессия равноденствий

а. Покажите, что закон переноса вектора $S^\alpha$ собственного углового момента Земли в искривленном пространстве-времени имеет вид

$$\frac{DS^\alpha}{D\tau} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} I_{\beta\mu} R^\mu{}_{\nu\gamma\zeta} u_\delta u^\nu u^\zeta. \tag{16.8}$$

Здесь $d/d\tau = \mathbf{u}$ есть 4-скорость вдоль мировой линии Земли, $I_{\beta\mu}$ — приведенный квадрупольный момент Земли (часть второго момента функции распределения масс с равным нулю следом), определенный в земной локально лоренцевой системе отсчета соотношениями

$$I_{\hat{0}\hat{0}} = I_{\hat{0}\hat{j}} = 0, \qquad I_{\hat{j}\hat{k}} = \int \rho\,(x^{\hat{j}} x^{\hat{k}} - \frac{1}{3}\hat{r}^2\delta_{jk})\,d^3\hat{x}, \tag{16.9}$$

и $R^\mu{}_{\nu\gamma\zeta}$ — риманова кривизна в точке нахождения Земли, создаваемая Луной, Солнцем и планетами. [*Указание*: Выведите этот результат в земной локально лоренцевой системе отсчета, пренебрегая кривизной пространства-времени, созданной Землей. (В этой существенно ньютоновской ситуации компоненты кривизны $R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}$, созданные Землей, Солнцем, Луной и планетами, складываются линейно, «тяготение слишком слабо для нелинейности».) Проинтегрируйте момент сил относительно центра масс Земли, создаваемый приливными гравитационными силами («геодезическое отклонение»):

$$\left(\begin{array}{l}\text{ускорение в точке } x^{\hat{j}} \text{ относительно центра}\\ \text{масс } (x^{\hat{j}} = 0), \text{ вызванное приливными гра-}\\ \text{витационными силами, но частично сбалан-}\\ \text{сированное внутренними напряжениями}\\ \text{Земли}\end{array}\right) =$$

$$= \left(\frac{d^2x^{\hat{k}}}{d\hat{t}^2}\right)_{\substack{\text{геодезическое}\\ \text{отклонение}}} = -R^{\hat{k}}{}_{\hat{0}\hat{l}\hat{0}}\,x^{\hat{l}} \text{ [см. уравнение (1.8′)]};$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{сила на единицу объема,}\\ \text{пропорциональная ускорению}\\ \text{относительно центра масс}\end{array}\right)^{\hat{k}} \overset{\text{плотность}}{=} \rho\frac{d^2x^{\hat{k}}}{d\hat{t}^2} = -\rho R^{\hat{k}}{}_{\hat{0}\hat{l}\hat{0}}\,x^{\hat{l}};$$

**УПРАЖНЕНИЯ**

$$\begin{pmatrix}\text{момент сил на единицу объема}\\ \text{относительно центра масс}\end{pmatrix}_{\hat{i}} = \varepsilon_{\hat{0}\hat{i}\hat{j}\hat{k}} x^{\hat{j}} (-\rho R^{\hat{k}}{}_{\hat{0}\hat{l}\hat{0}} x^{\hat{l}});$$

$$\begin{pmatrix}\text{полный момент}\\ \text{относительно центра масс}\end{pmatrix}_{\hat{i}} = \int [\varepsilon_{\hat{0}\hat{i}\hat{j}\hat{k}} x^{\hat{j}} (-\rho R^{\hat{k}}{}_{\hat{0}\hat{l}\hat{0}} x^{\hat{l}})]\, d^3\hat{x}.$$

Приведите это выражение к виду, содержащему $I_{\hat{j}\hat{l}}$, приравняйте его $dS_{\hat{i}}/d\tau$ и затем перепишите в не зависящей от системы отсчета компонентной форме. В результате должно получиться уравнение (16.8).]

б. Перепишите уравнение (16.8) в земной локально лоренцевой системе отсчета, воспользовавшись равенством

$$R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}} = \partial^2\Phi/\partial x^{\hat{j}}\, \partial k^{\hat{k}},$$

выражающим компоненты тензора Римана через ньютоновский гравитационный потенциал. (Ньютоновское приближение к теории Эйнштейна. Читатели курса 2 встретились с этим равенством в гл. 12, читатели курса 1 встретят его в § 17.4.)

в. Вычислите $dS^{\hat{j}}/d\hat{t}$, используя с самого начала ньютоновскую теорию тяготения. Ответ должен совпасть с ответом, полученным в пункте «б» с помощью теории Эйнштейна.

г. Считая Луну и Солнце точечными массами, вычислите дальнодействующее влияние порождаемых ими пространственно-временны́х кривизн на земную ось. Используйте результат пункта «б» и достаточно точные значения соответствующих параметров Солнечной системы. [*Ответ*: Земная ось прецессирует по отношению к осям ее локально лоренцевой системы отсчета («прецессия равноденствий», «общая прецессия»), период прецессии равен 26 000 лет. Детали расчета можно найти в любом учебнике по небесной механике.]

---

## Дополнение 16.1. ПРОБЛЕМА ПОРЯДКА ИНДЕКСОВ И ЕЕ СВЯЗЬ С КРИВИЗНОЙ В ПРИЛОЖЕНИЯХ ПРИНЦИПА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

### Задача

В каком порядке следует писать производные при применении правила «запятая переходит в точку с запятой»? В плоском пространстве-времени перестановка производных не играет роли, однако в искривленном пространстве-времени она приводит к дополнительным членам, пропорциональным кривизне, например $2B^{\alpha}{}_{;[\gamma\beta]} \equiv B^{\alpha}{}_{;\gamma\beta} - B^{\alpha}{}_{;\beta\gamma} = R^{\alpha}{}_{\mu\beta\gamma} B^{\mu}$ для любого векторного поля (см. упражнение 16.3). Следовательно, задачу можно переформулировать так: *Когда при применении правила перехода запятой в точку с запятой следует прибавлять члены, пропорциональные кривизне?*

**Решение**

В общем случае решение отсутствует, однако в большинстве случаев к однозначному решению приводят следующего рода математическое и физическое соображения.

*А. По чисто математическим признакам члены, пропорциональные кривизне, почти всегда возникают из-за некоммутативности ковариантных производных.* Следовательно, необходимо подумать об этих членах в любом уравнении, содержащем двойную ковариантную производную (например, $-A^{\alpha;\ \mu}{}_{\mu}+A^{\mu}{}_{;\ \mu}{}^{\alpha}=4\pi J^{\alpha}$), иначе говоря, в любом уравнении, вывод которого из более фундаментальных законов содержит двойные ковариантные производные (например, $\nabla_{u}\mathbf{S}=0$ в примере 3 п. Б.) Во всех остальных случаях вопрос о дополнительных членах, пропорциональных кривизне, можно игнорировать (например, в максвелловских уравнениях первого порядка).

*Б. Члены, пропорциональные кривизне, могут просто не возникать по чисто физической причине.* Поэтому при применении правила «запятая переходит в точку с запятой» только к физически измеримым величина (например, к электромагнитному полю, но не к векторному потенциалу) можно «интуитивно чувствовать», насколько вероятно их появление.

*Примеры*:

1. *Локальный закон сохранения энергии-импульса.* Добавление членов, пропорциональных кривизне, в уравнениях $T^{\alpha\beta}{}_{;\ \beta}=0$, например, путем замены их на уравнения $T^{\alpha\beta}{}_{;\ \beta}=R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}T^{\beta\gamma}u^{\delta}$ не имеет смысла вообще. В локально инерциальной системе отсчета члены типа $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}T^{\beta\gamma}u^{\delta}$ можно интерпретировать как силы, создаваемые кривизной в отдельной точке. Однако кривизну можно почувствовать только в конечной области, а не в точке (геодезическое отклонение и т. д.)! Иначе говоря, вторые производные гравитационного потенциала (метрики) приведут только к приливным силам!
2. *Уравнения Максвелла для тензора электромагнитного поля.* Здесь также неестественно вводить члены, пропорциональные кривизне. Они приведут к нарушению закона сохранения заряда в том смысле, что силовые линии электрического и магнитного полей будут оканчиваться в точках, где есть кривизна и отсутствует заряд. Чтобы не нарушать закон сохранения заряда при переводе уравнений Максвелла (3.32) и (3.36) в искривленное пространство-время, члены, пропорциональные кривизне, опускают:

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\ \beta}=4\pi J^{\alpha},\quad F_{\alpha\beta;\ \gamma}+F_{\beta\gamma;\ \alpha}+F_{\gamma\alpha;\ \beta}=0.$$

Более того, считается, что $F_{\mu\nu}$ выражается через векторный потенциал с помощью формулы (3.54′) с заменой запятых на точки с запятой:

$$F_{\mu\nu}=A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu}.$$

При этом, как легко проверить, вторая пара уравнений Максвелла удовлетворяется тождественно, а первая справедлива тогда и только тогда, когда

$$-A^{\alpha;\ \mu}{}_{\mu}+A^{\mu}{}_{;\ \mu}{}^{\alpha}+R^{\alpha}{}_{\mu}A^{\mu}=4\pi J^{\alpha}$$

(Более полное обсуждение и вывод см. в § 22.4.)

3. *Закон переноса вектора момента импульса Земли.* Если бы Земля была в плоском пространстве-времени, то, как и любое другое изолированное тело, она бы осуществляла параллельный перенос вектора собственного момента импульса $\mathbf{S}$ вдоль мировой линии, по которой движется ее центр масс $\nabla_u \mathbf{S} = 0$ («сохранение момента импульса»). Можно ли при переводе этого закона переноса в искривленное пространство-время (в котором действительно находится Земля!) игнорировать член пропорциональный кривизне? Нет! Пространственно-временные кривизны, обязанные присутствию Луны и Солнца, вызывают на Земле приливные гравитационные силы, а так как Земля имеет экваториальный выступ, приливные силы дают ненулевой вклад во вращательный момент относительно центра масс Земли. (На ньютоновском языке это означает, что на кусок выступа, ближайший к Луне, действует бóльшая притягивающая сила и, следовательно, больший вращательный момент, чем на кусок выступа, наиболее удаленный от Луны.) Поэтому следует ожидать, что в искривленном пространстве-времени закон переноса будет иметь вид

$$\nabla_u \mathbf{S} = (\text{тензор Римана}) \times (\text{квадрупольный момент Земли}).$$

Этот вращательный момент, связанный с кривизной, вызывает прецессию оси вращения Земли. Полный цикл в плоскости эклиптики совершается за 26 000 лет («общая прецессия», «прецессия равноденствий», открытая Гиппархом приблизительно в 150 г. до н. э.). Точный вид члена с кривизной получен в упражнении 16.4.

## § 16.4. ЧАСЫ И СТЕРЖНИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ВРЕМЕННЫХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Обратимся теперь к природе стержней и часов, которые следует использовать для измерения длин и временны́х интервалов, появляющихся в физических законах в присутствии тяготения.

Нет необходимости (а в действительности и не должно быть!), чтобы собственная длина $s$ измерялась стержнем определенного типа (например, метровой платиновой палкой) или чтобы собственное время $\tau$ измерялось часами определенного типа (например, водородными мазерными часами). Скорее следует привлечь сами физические законы, чтобы узнать, какого рода стержни и часы необходимо применять в измерениях. Иначе говоря, *«идеальными» стержнями и часами* называются такие стержни и часы, которые измеряют собственную длину, заданную выражением $ds = (g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}$, или собственное время, заданное выражением $d\tau = (-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}$ (тип часов, к которым привели физические аргументы, § 1.5). Кроме того, применяя законы физики для анализа поведения стержней и часов, следует определить точность, с которой стержни и часы идеальны в данных условиях.

**Определение идеальных стержней и часов**

**Насколько идеальны реальные часы?**

**1) Маятниковые часы**

В качестве очевидного примера рассмотрим маятниковые часы. Если они покоятся на поверхности Земли и достаточно малы,

чтобы можно было пренебречь красным смещением из-за конечности размеров часов и замедлением хода времени из-за скорости качаний, и если требуемая точность достаточно мала, чтобы можно было пренебречь временными изменениями в локальном гравитационном ускорении из-за земных приливов, тогда законы физики утверждают (дополнение 16.2), что маятниковые часы являются «идеальными». Однако в любом другом случае (например, при путешествии на ракете к Луне) маятниковые часы будут далеки от идеальности. Беспорядочно изменяющиеся ускорения или полное отсутствие ускорения сделают их бесполезными!

2) Атомные часы

Большой интерес представляют различного рода атомные и ядерные часы. Такие часы проще всего рассматривать, когда они свободно падают. В таком случае исследование можно проводить в локально лоренцевой системе покоя часов, используя стандартные уравнения квантовой теории, и, конечно, собственное время будет измерено с точностью, достигнутой при конструировании часов ($\Delta t/t \sim 10^{-9} - 10^{-14}$). Однако нечасто можно позволить часам свободно падать. (Столкновение с поверхностью Земли может дорого обойтись!) Тем не менее даже при ускорении «$1g$» = 980 см/с$^2$ на поверхности Земли или «$2g$» на самолете, делающем попытку уклониться от столкновения в воздушном пространстве (дополнение 16.3), атомные часы, если они достаточно прочны, будут измерять собственное время $d\tau = (-g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}$ вдоль своей мировой линии приблизительно с той же точностью, как если бы они свободно падали. Каждый, кто захочет это проверить, может провести соответствующий эксперимент. Альтернативно, можно рассматривать часы в их «собственной системе отсчета» (§ 13.6) с базисными векторами, переносимыми по Ферми — Уолкеру, применяя стандартные локально лоренцевы законы квантовой механики, обобщенные на случай ускоренных систем отсчета (локально лоренцевы законы плюс «инерциальная» сила, которую можно трактовать как обусловленную потенциалом, градиент которого линейно зависит от координат).

Конечно, любые часы имеют «предельное напряжение», превысив которое они перестают нормально работать (дополнение 16.3). Однако это предельное напряжение в основном зависит от конструкции часов, а вовсе не от какого-либо «универсального влияния ускорения на ход времени». Универсальное замедление хода времени вызывает скорость, но не ускорение.

3) Человеческие часы

Старение человеческого тела происходит по тем же электромагнитным и квантовомеханическим законам, которые определяют периодичности и переходы между уровнями в атомах и молекулах. Следовательно, старение, подобно атомным процессам, связано с собственным временем, контролируемым метрикой. Хотя, конечно, оно связано и с другими вещами, например с курением сигарет.

**Идеальные стержни и часы, сконструированные из геодезических мировых линий**

В принципе можно сконструировать идеальные стержни и часы из геодезических мировых линий свободно падающих пробных частиц и фотонов (см. дополнение 16.4). Другими словами, пространство-время содержит стержни и часы в самом себе, даже если вещество и негравитационные поля отсутствуют!

## Дополнение 16.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОГО, ЧТО МАЯТНИКОВЫЕ ЧАСЫ, ПОКОЯЩИЕСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ, ЯВЛЯЮТСЯ ИДЕАЛЬНЫМИ

Это есть доказательство того, что они измеряют интервал

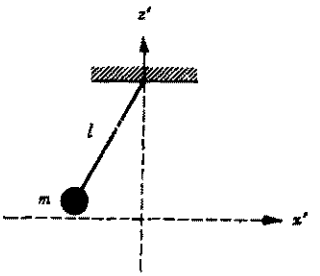
$$d\tau = (-g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}.$$

### А. Ограничение на маятник

Маятник должен быть настолько мал, чтобы не чувствовать кривизны пространства-времени, т. е. чтобы гравитационное поле Земли в его окрестности было однородным и скорость движения шарика маятника была пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света.

### Б. Система координат и метрика

1. Основная система координат: поскольку поле Земли близко к ньютоновскому, то можно ввести координаты «линеаризованной теории» (до чтения § 18.4 это следует принять на веру), в которых




$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)\,dt'^2 + (1 - 2\Phi)\,(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2),$$

где $\Phi$ — ньютоновский потенциал.

2. Поместим начало координат в равновесное положение маятника и совместим плоскость $x'$, $z'$ с плоскостью качаний маятника.
3. Перенормируем координаты так, чтобы они измеряли собственную длину и собственное время в положении равновесия:

$$t = [1 + 2\Phi\,(0)]^{1/2}t', \quad x^j = [1 - 2\Phi\,(0)]^{1/2}x^{j'}.$$

Тогда вблизи маятника (неоднородностями поля пренебрегаем!)

$$\Phi = \Phi\,(0) + gz, \quad g \text{ — «гравитационное ускорение»}, \tag{1}$$

$$ds^2 = -(1 + 2gz)\,dt^2 + (1 - 2gz)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{2}$$

### В. Анализ движения маятника

1. Поместим всю массу маятника $m$ в шарик (массой стержня пренебрегаем). Пусть собственная длина стержня равна $l$.
2. Вычислим 4-ускорение $\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$ шарика маятника как функцию $d^2x^\alpha/dt^2$, предполагая, что $v \ll 1$ и $dt/d\tau \approx 1$:

$$\begin{aligned} a^x &= d^2x/d\tau^2 + \Gamma^x{}_{00}\,(dt/d\tau)^2 = d^2x/dt^2 + \Gamma^x{}_{00} = d^2x/dt^2, \\ a^z &= d^2z/d\tau^2 + \Gamma^z{}_{00}\,(dt/d\tau)^2 = d^2z/dt^2 + \Gamma^z{}_{00} = d^2z/dt^2 + g. \end{aligned} \tag{3}$$

3. Это 4-ускорение вызывается силами в стержне и должно быть направлено вверх по стержню, так что (для $x \ll l$, $g \gg d^2z/dt^2$)

$$d^2x/dt^2 = a^x = -(x/l)\, a^z = (-g/l)\, x. \tag{4}$$

4. Решая это дифференциальное уравнение, получаем

$$x = x_0 \cos\left(t\sqrt{g/l}\right). \tag{5}$$

5. Отсюда заключаем, что маятник периодичен по $t$, где $t$ — собственное время шарика, когда он находится в положении равновесия (см. уравнение 2). Это означает, что *маятник, покоящийся на поверхности Земли, представляет собой идеальные часы.*

*Замечание*: Вышеприведенный анализ не учитывает вращения Земли; для альтернативного анализа, в котором учитывается вращение Земли, можно провести аналогичный расчет в начале «собственной системы отсчета» маятника [§ 13.6, линейный элемент (13.71)]. Ответ тот же, но теперь «$g$» представляет собой суперпозицию «гравитационного ускорения» и «центробежного ускорения, вызванного вращением Земли».

### Дополнение 16.3. ОТКЛИК ЧАСОВ НА УСКОРЕНИЕ И ПРИЛИВНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ СИЛЫ

Рассмотрим атомные часы с частотой, стабилизированной посредством некоторого атомного или молекулярного процесса, например посредством «колебаний зонтика» молекул аммиака (см. [39]). Если такие часы подвергнуть действию достаточно сильных ускорений или приливных сил, то они перестанут измерять собственное время с нормальной для них точностью. К таким отклонениям от «идеальности» могут привести два рода эффектов.

*А. Влияние ускорения или приливной силы на атомный процесс, обеспечивающий стабильность частоты.* Пример: Если приливные силы существенны на расстояниях порядка нескольких ангстрем (например, вблизи пространственно-временной «сингулярности», к которой приводит гравитационный коллапс), то они могут и будут деформировать молекулы аммиака и нарушать регулярность колебаний зонтика, делая таким образом бесполезными любые аммиачные атомные часы, независимо от их конструкции. Аналогично, если молекулу аммиака подвергнуть ускорениям, сравнимым по величине с внутренними ускорениями атома ($a \sim 10^{12}$ «$g$» $\sim 10^{15}$ см/с$^2$), которые изменяются за времена порядка периода колебаний «зонтика», то это должно нарушить регулярность колебаний, и любые часы, основанные на этих колебаниях, должны испортиться. Подобные принципиальные ограничения на идеальность часов будут зависеть от того, какой выбран атомный процесс. Однако они далеки от того, чтобы стать ограничивающим фактором для часов конструкции 1973 г. Гораздо важнее на сегодня будет следующее.

*Б. Влияние ускорения или приливной силы на макроскопическую структуру часов — структуру, диктуемую современной технологией.* Кристаллический осциллятор, который выдает на выходе периодический сигнал, должен быть некоторым образом соединен с регулирующим атомным процессом. Уже умеренные ускорения будут разрушать это соединение. Труднейшая задача для изготовителя авиационных

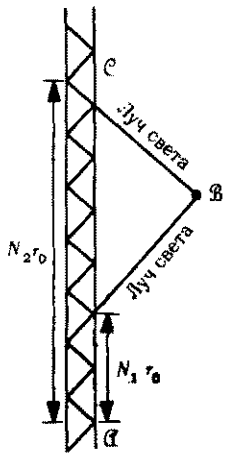
атомных часов состоит в том, чтобы гарантировать, что такое соединение будет поддерживаться даже тогда, когда самолет отчаянно маневрирует, пытаясь избежать столкновения с другим самолетом или управляемым снарядом. Надежные рубидиевые часы конструкции 1972 г. будут поддерживать свое соединение под действием статических ускорений вплоть до 50 $g$ и более без заметного нарушения стабильности

$$\Delta t/t \sim 10^{-12}\ (1\ \text{с}/t)^{1/2} \text{ для } 1\ \text{с} \leqslant t \leqslant 10^3\ \text{с}.$$

Однако из-за ограниченной ширины полосы соединительной петли (типично $\Delta\nu \sim$ $\sim$ 20—50 Гц) внезапные изменения ускорения будут временно прерывать соединение, понижая стабильность часов до уровня стабильности несоединенного кристаллического осциллятора, для которого ускорение $a$ вызывает изменение частоты на величину порядка $(a/1\ g)\cdot 10^{-9}$. Но соединение с рубидиевым стандартом быстро восстанавливается ($\delta t \sim 1/\Delta\nu$), возвращая часы к нормальному высокостабильному режиму работы [1]).

Приливные силы в солнечной системе так малы, что изготовитель часов может их игнорировать. Однако в атомных часах образца 1973 г., подвергнутых приливным ускорениям вблизи пространственно-временной сингулярности «соединение» с атомным процессом будет нарушено задолго до того, как приливные силы начнут влиять на сами атомные процессы.

## Дополнение 16.4. ПОСТРОЕНИЕ ИДЕАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ И ЧАСОВ ИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ МИРОВЫХ ЛИНИЙ [2])




*Стандартный интервал.* Определенный времениподобный интервал — интервал между двумя отдельными близкими событиями $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — выбирается в качестве стандартного интервала и ему приписывается единичная длина. Он используется для калибровки большого набора геодезических часов, проходящих через событие $\mathscr{A}$.

Каждые *геодезические часы* конструируются и калибруются следующим образом:

1. Времениподобная геодезическая $\mathscr{AC}$ (траектория свободно падающей частицы) проходит через $\mathscr{A}$.

2. Соседняя мировая линия, везде параллельная $\mathscr{AC}$ (и таким образом, не являющаяся геодезической), конструируется по методу веревочной лестницы Шилда (дополнение 10.2), который основан только на геодезических.

---

[1]) Мы благодарны Стратимайру из «Дженерал радио компани», Конкорд, Массачусетс, за сведения о реакции рубидиевых часов на ускорение.

[2]) Это дополнение основано на работе Марцке и Уилера [40].

3. Световые лучи (нулевые геодезические) движутся между параллельными мировыми линиями, отскакивая назад и вперед; каждый замкнутый цикл движения луча составляет один «тик».
4. Промежуток собственного времени $\tau_0$ между тиканиями связан с интервалом $\mathcal{AB}$ соотношением

$$-1 \equiv (\mathcal{AB})^2 = -(N_1\tau_0)\ (N_2\tau_0),$$

где $N_1$ и $N_2$ — число тиканий между событиями, показанными на диаграммах. [*Доказательство*: см. вторую диаграмму.]

Пространство-время заполнено такими геодезическими часами. Те часы, которые проходят через $\mathcal{A}$, калибруются по вышеуказанному стандартному интервалу $\mathcal{AB}$ и затем последовательно используются для калибровки других встречающихся с ними часов. Любой интервал $\mathcal{PQ}$ вдоль мировой линии геодезических часов можно измерить тем же методом, который был использован при калибровке. Интервал $\mathcal{PQ}$ может быть времениподобным, пространственноподобным или нулевым, квадрат его длины во всех трех случаях будет равен

$$(\mathcal{PQ})^2 = -(N_3\tau_0)\ (N_4\tau_0).$$

Чтобы достигнуть точности измерений порядка $1/N$, где $N$ — некоторое большое число, необходимо соблюсти две меры предосторожности.

1. Потребовать, чтобы интервалы $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{PQ}$ были достаточно малы по сравнению с масштабом пространственно-временной кривизны, или более определенно

$$R^{(AB)}\ (\mathcal{AB})^2 \ll 1/N$$

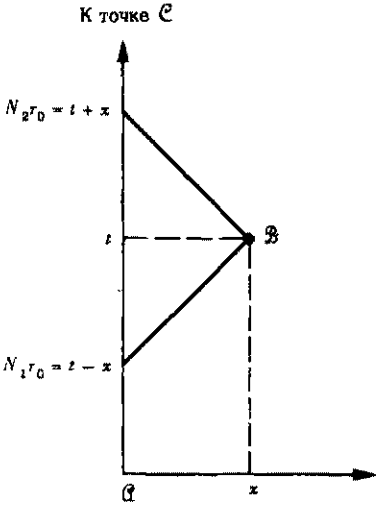
и

$$R^{(PQ)}\ (\mathcal{PQ})^2 \ll 1/N,$$

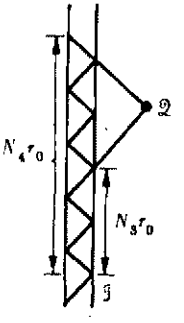
где $R^{(AB)}$ и $R^{(PQ)}$ — соответствующие наибольшие компоненты тензора кривизны в двух рассматриваемых областях.

2. Потребовать, чтобы временной масштаб $\tau_0$ используемых геодезических часов был мал по сравнению с $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{PQ}$ в отдельности; таким образом,

$$\tau_0 \ll \mathcal{AB}/N,$$
$$\tau_0 \ll \mathcal{PQ}/N.$$




В локально лоренцевой системе отсчета геодезических часов:
$(N_1\tau_0)\ (N_2\tau_0) = (t - x)\ (t + x) = t^2 - x^2 = -(\mathcal{AB})^2$.




Эйнштейновский принцип, гласящий, что пространство-время описывается римановой геометрией, подвергается «тысяче» испытаний. Так, от опорного интервала $\mathcal{AB}$ до измеряемого интервала $\mathcal{PQ}$ имеется «масса» маршрутов взаимного сравнения, каждый из которых дает одну и ту же величину отношения $\mathcal{PQ}/\mathcal{AB}$.

Более того, можно легко выбрать «пятьдесят» интервалов $\mathcal{PQ}$, к которым приложимо испытание такого рода. И такие испытания — не все вопросы будущего.

Приблизительно $5 \cdot 10^9$ лет назад электроны различными путями достигли одного общего места — заданного атома железа в земном ядре. Этот атом железа не коллапсирует. Принцип Паули исключает падение всех электронов на $K$-орбиту. Однако принцип Паули не был бы применим, если бы электроны не были тождественными или почти тождественными. Оказывается, что из этого обстоятельства можно вывести важное заключение (см. работу Марцке и Уилера [40]). С каждым электроном связана стандартная длина — комптоновская длина волны электрона $\hbar/mc$. Если эти длины были различны вначале или изменялись неодинаковым образом вдоль разных направлений и если результирующее различие в свойствах электронов было больше, чем

$$\sim(5 \cdot 10^9 \text{ лет}) \times (3 \cdot 10^7 \text{ с/год}) \times (5 \cdot 10^{18} \text{ об/с}) \sim 10^{36},$$

то к настоящему времени это различие проявилось бы в том, что разные электроны падали бы на $K$-орбиту, и Земля в противоречии с наблюдениями коллапсировала бы.

В методе Марцке — Уилера произвольно малый интервал $\mathcal{PQ}$ в любом месте пространства-времени выражается через опорный интервал $\mathcal{AB}$, который можно принять за определение «стандартного геометродинамического сантиметра», см. § 1.5. Следовательно, метод придает яркий смысл идее римановой геометрии.

Метод Марцке — Уилера никоим образом не апеллирует к атомному строению стержней и часов. Это обстоятельство существенно по следующим причинам. Длина обычной метровой платиновой палки кратна атомному боровскому радиусу, т. е. равна $N_1\,(\hbar^2/me^2)$. Аналогично, длина волны криптоновой линии $Kr^{86}$ равна $N_2\,(\hbar c/e^2)\,(\hbar^2/me^2)$, второй базисной длине, которая совершенно иначе зависит от атомных постоянных. Поэтому если безразмерное отношение $\hbar c/e^2 = 137{,}038$ каким-либо образом меняется со временем, то один, или другой, или оба эти стандарта длины должны потерять соответствие со стандартным геометродинамическим сантиметром. В этом случае общая теория относительности гласит: «Придерживайся стандартного геометродинамического сантиметра».

Герман Вейль первым понял, что сравнение длин можно осуществлять с помощью одних световых лучей, а Лоренц указал, что в измерительном процессе можно обойтись без геодезических пробных частиц или световых лучей. Однако ни Вейль, ни Лоренц не указали сам метод измерения (см. литературу в книге [40]). Эйлер, Пирани и Шилд [41] дали глубокий анализ той роли, которую играют в процессе измерения аффинная связность, конформная часть метрики и полная метрика.

## § 16.5. ИЗМЕРЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

«Я знаю, как измерить электромагнитное поле, используя пробные заряды; какова аналогичная процедура измерения гравитационного поля?» Этот вопрос одновременно не имеет ответа и имеет много ответов.

Он не имеет ответа, поскольку нигде не было дано, да и не будет дано, точное определение термина «гравитационное поле». Много

различных математических сущностей связано с гравитацией: метрика, тензор римановой кривизны, тензор кривизны Риччи, скаляр кривизны, ковариантная производная, коэффициенты связности и т. д. Каждая из этих сущностей играет важную роль в теории тяготения, однако из них трудно выделить ту главную, которая заслуживала бы звания «гравитационное поле». Именно поэтому в данной книге выражения «гравитационное поле» и «тяготение» относятся к неопределенному характерному свойству собирательного рода от всех этих сущностей. Другим эквивалентным термином, употребляемым для них, будет «геометрия пространства-времени».

**Многоликость тяготения и способы ее измерения**

Поэтому выражение «измерить гравитационное поле» означает «исследовать экспериментально различные свойства геометрии пространства-времени». В зависимости от того, какими геометрическими свойствами пространства-времени интересуются, производятся разного рода измерения. Однако все эти измерения должны включать в себя критическое рассмотрение влияния геометрии пространства-времени (т. е. тяготения) на частицы, вещество или негравитационные поля.

Например, для «измерения» метрики вблизи данного события обычно строят решетчатую конструкцию из стержней и часов (локальная ортонормальная система отсчета, достаточно малая, чтобы можно было пренебречь влиянием кривизны), используя которую, определяют интервал между соседними событиями. Для измерения тензора римановой кривизны вблизи какого-либо события обычно исследуют вызываемое кривизной геодезическое отклонение (относительные ускорения) между мировыми линиями множества близких пробных частиц, причем если кривизна статична или медленно меняется, то измерения проводятся с помощью «гравитационного градиометра» (дополнение 16.5), если же кривизна быстро флуктуирует, то используют гравитационную волновую антенну (гл. 37). Для исследования крупномасштабной кривизны пространства-времени рассматриваются такие крупномасштабные гравитационные эффекты, как орбиты планет и спутников или искривление света солнечным гравитационным полем.

Но какие бы аспекты тяготения ни измерялись и как бы они ни измерялись, всегда исследуется геометрия пространства-времени.

---

### 16.5. Гравитационный градиометр

**УПРАЖНЕНИЕ**

Гравитационный градиометр (дополнение 16.5) движется в искривленном пространстве-времени по ускоренной мировой линии. Вычислите амплитуду и фазу колебаний одного плеча градиометра относительно другого. [*Указание*: Расчет проведите в «собственной системе отсчета» градиометра (§ 13.6), применяя базисные векторы, переносимые по Ферми — Уолкеру. Используйте следующее

УПРАЖНЕНИЕ

уравнение для относительного углового ускорения плечей:

$$2ml^2(\ddot{\alpha}+\dot{\alpha}/\tau_0+\omega_0{}^2\alpha)=\begin{pmatrix}\text{вращающий момент, созданный}\\ \text{римановой кривизной}\end{pmatrix},$$

где

$2ml^2$ — момент инерции одного плеча,

$\alpha$ — угловое смещение плеча от положения равновесия,

$\frac{\pi}{2}+2\alpha$ — угловое расстояние между плечами,

$2ml^2\omega_0^2$ — постоянная кручения пружины,

$\omega_0$ — угловая частота свободных колебаний,

$\tau_0$ — время затухания свободных колебаний под действием внутренних сил трения.

Если $\xi$ — вектор, направленный от центра масс градиометра к массе 1, то имеем

$$\begin{pmatrix}\text{кривизна, созданная при ускорении}\\ \text{массы 1 относительно центра градиометра}\end{pmatrix}_{\hat{k}}=$$

$$=\left(\frac{D^2\xi_{\hat{k}}}{d\tau^2}\right)_{\substack{\text{геодезическое}\\ \text{отклонение}}}=-R_{\hat{k}\hat{0}\hat{l}\hat{0}}\xi_{\hat{l}};$$

$$\begin{pmatrix}\text{крутящий момент относительно}\\ \text{центра градиометра, действующий на массу 1}\end{pmatrix}_{\hat{i}}=$$

$$=\varepsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}\xi_{\hat{j}}\,(-mR_{\hat{k}\hat{0}\hat{l}\hat{0}}\xi_{\hat{l}}).$$

Такой же момент действует на массу 4 (с заменой $\xi$ на $-\xi$), поэтому для получения полного момента, действующего на плечо 1—4, необходимо удвоить приведенное выше выражение. Компоненты $R_{\hat{k}\hat{0}\hat{l}\hat{0}}$ тензора Римана можно рассматривать как компоненты $3\times 3$ симметричной матрицы. Подходящей ориентацией пространственных осей системы отсчета (ориентация вдоль «главных осей» $R_{\hat{k}\hat{0}\hat{l}\hat{0}}$) можно привести $R_{\hat{k}\hat{0}\hat{l}\hat{0}}$ к диагональной форме в некоторый начальный момент времени

$R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}}\neq 0$, $R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}}\neq 0$, $R_{\hat{z}\hat{0}\hat{z}\hat{0}}\neq 0$, все другие компоненты исчезают.

Предположите, что тензор Римана достаточно медленно изменяется вдоль мировой линии градиометра, так что в течение всего эксперимента тензор $R_{\hat{j}\hat{0}\hat{k}\hat{0}}$ остается диагональным и постоянным. Для простоты поместите градиометр в плоскости $\hat{x}\hat{y}$, так чтобы он вращался вокруг оси $\hat{z}$ с угловой скоростью $\omega\approx\frac{1}{2}\omega_0$:

$$\begin{pmatrix}\text{угол плеча 1—4}\\ \text{отсчитываемый от оси } \hat{x}\end{pmatrix}=\omega t.$$

Покажите, что получающееся в результате уравнение колебаний имеет вид

$$\ddot{\alpha}+\dot{\alpha}/\tau_0+\omega_0{}^2\alpha=\frac{1}{2}(R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}}-R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}})\sin 2\omega t,$$

а стационарные колебания будут описываться формулой

УПРАЖНЕНИЕ

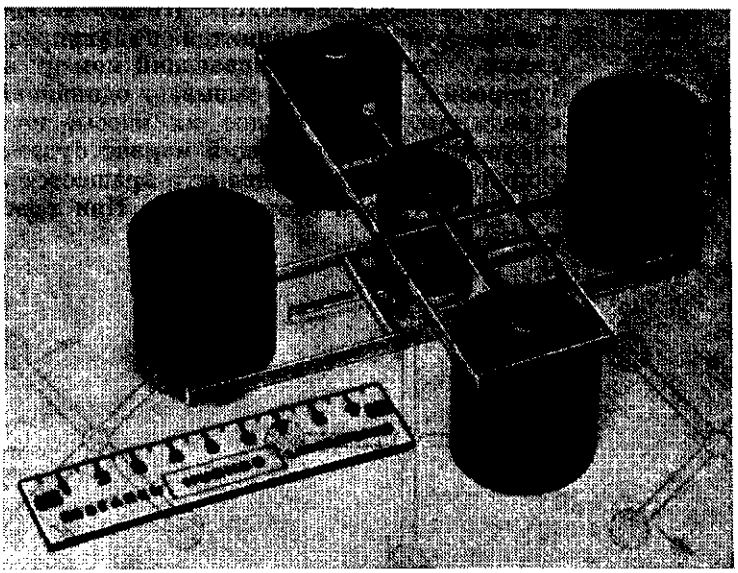
$$\alpha = \mathrm{Im}\left\{\frac{\frac{1}{2}\left(R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}} - R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}}\right)}{2\omega_0\left(\omega_0 - 2\omega + i/2\tau_0\right)}\, e^{i2\omega t}\right\}.$$

Таким образом, измеряя для фиксированной угловой скорости $\omega$ (например, $2\omega = \omega_0$) амплитуду и фазу колебаний, можно определить величину и знак разности $R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}} - R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}}$. Разности $R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}} - R_{\hat{z}\hat{0}\hat{z}\hat{0}}$ и $R_{\hat{z}\hat{0}\hat{z}\hat{0}} - R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}}$ можно измерить, располагая ось вращения градиометра вдоль осей $\hat{x}$ и $\hat{y}$ соответственно.]

---

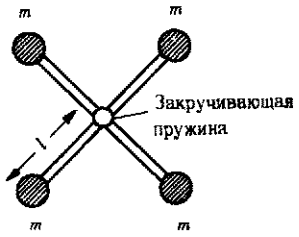
### Дополнение 16.5. ГРАВИТАЦИОННЫЙ ГРАДИОМЕТР ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ РИМАНОВОЙ КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Этот гравитационный градиометр был сконструирован и создан Робертом Форвардом и его сотрудниками из Хьюз Резерч лаборатории, Малибу, Калифорния

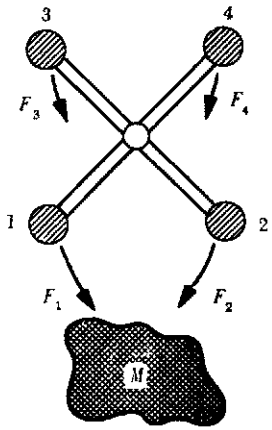


Он измеряет риманову кривизну пространства-времени, создаваемую соседними массами. Поместив более совершенный вариант такого градиометра в самолет, пролетающий над поверхностью Земли, можно будет измерить поверхностные колебания массы, вызванные изменениями геологической структуры. В спутнике, обращающемся вокруг Земли, такой градиометр может измерять мультипольные

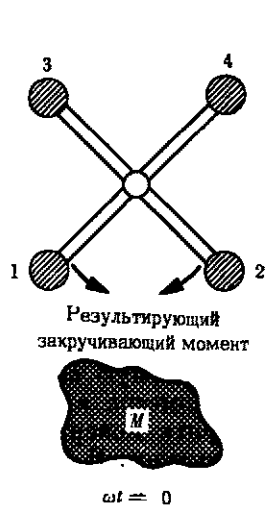
моменты гравитационного поля Земли. Технические детали градиометра разобраны в статьях Форварда [42] и Белла, Форварда и Вильямса [43]. Принципы действия описаны ниже.

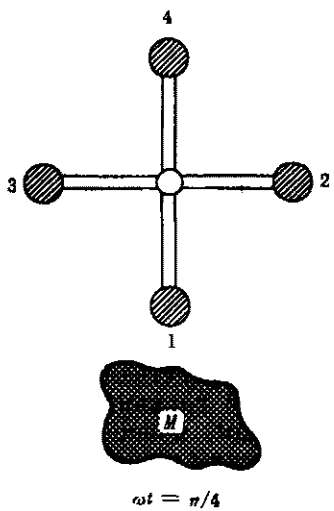


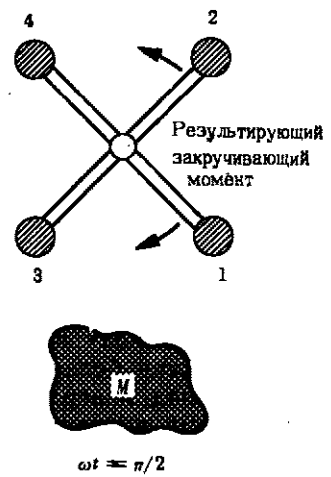

Градиометр состоит из двух ортогональных плечей с массой $m$ на концах, соединенных в центре упругой пружиной. Если плечи закрутить, нарушая их ортогональную ориентацию, они будут осциллировать. Для измерения амплитуды колебаний используется пьезоэлектрический датчик напряжений.




Если градиометр поместить вблизи массы $M$, то из-за градиента гравитационного поля $M$ (т. е. из-за кривизны пространства-времени, созданной $M$) на него будет действовать закручивающий момент. Ньютоновские силы $F_1$ и $F_2$ больше, чем $F_3$ и $F_4$, поэтому закручивающий момент заставляет сближаться друг с другом массы 1 и 2 и удаляться друг от друга массы 3 и 4. [*Замечание*: Силы $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$ зависят от того, падает ли градиометр свободно (геодезическое движение; $\nabla_u \mathbf{u} = 0$) или он движется по ускоренной мировой линии. Однако закручивающий момент не зависит от ускорения, ускорение вызывает одинаковые ньютоновские силы, действующие на массы, поэтому результирующий закручивающий момент будет равен нулю.] В процессе работы градиометр вращается вокруг своего центра с угловой скоростью $\omega$. При вращении закру-



чивающий момент, действующий на его плечи, осциллирует:

при $\omega t = 0$ результирующий закручивающий момент толкает массы 1 и 2 по направлению друг к другу,
при $\omega t = \pi/4$ результирующий закручивающий момент равен нулю;
при $\omega t = \pi/2$ результирующий закручивающий момент расталкивает массы 1 и 2.

Угловая частота колебаний закручивающего момента равна $2\omega$. Если частоту $2\omega$ положить равной $\omega_0 \equiv$ (естественной частоте колебаний плечей), то осциллирующий закручивающий момент приведет плечи в резонансное колебание. Результирующая амплитуда колебаний в градиометре образца 1970 г. легко регистрировалась для градиентов гравитационного поля (римановых кривизн)

$$\geqslant 0{,}002 \left[\frac{2\ (\text{масса Земли})}{(\text{радиус Земли})^3}\right] \sim 1 \cdot 10^{-30}\ \text{см}^{-2} \sim 0{,}01\ \text{г/см}^3 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l}\text{риманова кривизна, создаваемая на расстоянии 15 км горой высотой 2 км, смоделированной двухкилометровым кубом. (При такой идеализации пренебрегается изостазией и любым понижением плотности земной коры в горных областях.)}\end{array}\right]$$

Математический анализ градиометра см. в упражнении 16.5.

# 17. КАК МАССА-ЭНЕРГИЯ ПОРОЖДАЕТ КРИВИЗНУ

*Физический мир представляет собой четырехмерный континуум.*
*Если я принимаю в нем риманову метрику*
*и ищу простейшие законы, которым может*
*удовлетворять метрика, то я прихожу к релятивистской теории*
*тяготения в пустом пространстве.*
*Если же я выбираю в этом пространстве векторное поле*
*или выведенное из него поле антисимметричного тензора*
*и ищу простейшие законы, которым может удовлетворять такое*
*поле, я прихожу к уравнениям Максвелла в пустом пространстве.*
*...в любой данный момент одно из всех возможных построений*
*всегда оказывается абсолютно высшим*
*по отношению ко всем остальным...*

АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН, 1934 г.[1])

## § 17.1. АВТОМАТИЧЕСКОЕ СОХРАНЕНИЕ ИСТОЧНИКА КАК ВАЖНЕЙШАЯ ИДЕЯ ПРИ ФОРМУЛИРОВКЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

**В этом параграфе выводится «уравнение поля Эйнштейна»**

Рассмотрев влияние геометрии на материю (движение по геодезической нейтральной пробной частицы; правило «запятая переходит в точку с запятой» для динамики вещества и полей), обратимся к исследованию влияния материи на геометрию.

Масса является источником тяготения. Плотность массы-энергии, измеренная любым наблюдателем, движущимся со скоростью $\mathbf{u}$, равна

$$\rho = \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{u} = u^\alpha T_{\alpha\beta} u^\beta. \tag{17.1}$$

Следовательно, тензор энергии-импульса $\mathbf{T}$ представляет собой не зависящий от системы отсчета «геометрический объект», который должен действовать как источник тяготения.

Этот источник, этот геометрический объект, не является произвольным симметричным тензором. Чтобы удовлетворить закону сохранения энергии-импульса, дивергенция такого тензора должна равняться нулю

$$\nabla\cdot\mathbf{T} = 0. \tag{17.2}$$

Поместим этот источник $\mathbf{T}$ в правую часть уравнения генерации тяготения. В левой части уравнения будет стоять геометри-

[1]) Из книги [44], стр. 18.

ческий объект, характеризующий тяготение. Такой объект, как и $\mathbf{T}$, должен быть симметричным тензором, дивергенция которого равна нулю, и, поскольку он будет характеризовать тяготение, он должен быть построен только из геометрии пространства-времени. Назовем этот объект «тензором Эйнштейна» и обозначим его через $\mathbf{G}$. Таким образом, уравнение генерации тяготения гласит

Уравнение, описывающее как вещество порождает тяготение, должно иметь вид $\mathbf{G} = \varkappa\mathbf{T}$, где $\mathbf{T}$ — тензор энергии-импульса

$$\mathbf{G} = \varkappa \mathbf{T}. \tag{17.3}$$

↑ — коэффициент пропорциональности, который будет вычислен позже

(Не предполагайте, что $\mathbf{G}$ — тот самый тензор Эйнштейна, с которым мы сталкивались в гл. 8, 13—15; это будет доказано ниже!)

Свойства, которыми должен обладать тензор $\mathbf{G}$

Равенство нулю дивергенции $\nabla\cdot\mathbf{G}$ не нужно рассматривать как следствие уравнения $\nabla\cdot\mathbf{T} = 0$. Скорее выполнение закона сохранения $\nabla\cdot\mathbf{T} = 0$ для вещества и полей следует рассматривать 1) как следствие формулы [см. (17.3)], которая связывает их с геометрией пространства-времени, и 2) как следствие, требуемое и усиленное *автоматическим* законом сохранения или *тождеством*, справедливым для любого гладкого физического или нефизического риманова пространства-времени: $\nabla\cdot\mathbf{G} \equiv 0$ (более полное обсуждение см. в гл. 15, а более полное обоснование см. в § 17.2). В соответствии с этим ищем симметричный тензор $\mathbf{G}$, который является «автоматически сохраняющейся мерой кривизны пространства-времени» в следующем смысле:

1) $\mathbf{G}$ исчезает в плоском пространстве-времени;
2) $\mathbf{G}$ строится только из метрики и тензора римановой кривизны;
3) $\mathbf{G}$ отличается от других тензоров, построенных из тензора Римана и $\mathbf{g}$, рядом свойств: а) он, как это подобает естественной мере кривизны, линеен по тензору Римана, б) как и $\mathbf{T}$, он второго ранга и симметричен и в) его дивергенция автоматически равна нулю

$$\nabla\cdot\mathbf{G} \equiv 0. \tag{17.4}$$

Доказательство того, что тензор $\mathbf{G}$ должен быть тензором кривизны Эйнштейна (гл. 8)

С точностью до постоянного множителя существует только один тензор (упражнение 17.1), который удовлетворяет этим требованиям, т. е. является автоматически сохраняющимся тензором второго ранга, линейным по кривизне и исчезающим в плоском пространстве-времени. Это тензор кривизны Эйнштейна $\mathbf{G}$, выраженный в гл. 8 через тензор кривизны Риччи:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}, \\ G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \end{aligned} \tag{17.5}$$

В гл. 15 этой величине был придан образный смысл «момента поворота кривизны», или более просто «момента поворота», полученного двукратным дуалированием риманова тензора кривизны

$$\mathbf{G} = {}^*\mathbf{R}^* \tag{17.6a}$$

и последующим свертыванием этой величины

$$G_{\mu\nu} = G^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}. \tag{17.6б}$$

В гл. 15 было показано, что равенство нулю $\nabla \cdot \mathbf{G}$ есть следствие элементарного топологического принципа «граница границы равна нулю».

**Вычисление коэффициента пропорциональности $\varkappa$ (в уравнении $\mathbf{G} = \varkappa \mathbf{T}$) путем сравнения общей теории относительности с ньютоновской теорией тяготения**

Для вычисления коэффициента пропорциональности $\varkappa$ в «уравнении поля Эйнштейна» $\mathbf{G} = \varkappa \mathbf{T}$ можно провести сопоставление с хорошо проверенной ньютоновской теорией тяготения. Для облегчения сравнения исследуем относительное ускорение (геодезическое отклонение) частиц, падающих в трубке, вставленной в обладающую однородной плотностью $\rho$ идеализированную Землю (фиг. 1.12). По Ньютону относительное ускорение определяется плотностью, по Эйнштейну оно определяется римановой кривизной пространства-времени. Прямое сравнение ньютоновского и эйнштейновского предсказаний в ньютоновских координатах (где $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$) приводит к соотношению

$$R_{00} \equiv R^{\alpha}{}_{0\alpha 0} = 4\pi\rho. \tag{17.7}$$

(Детали вывода см. в § 1.7, подробное обсуждение ньютоновской теории тяготения с использованием этого уравнения см. в гл. 12.) В применении к области внутри Земли уравнение поля Эйнштейна $\mathbf{G} = \varkappa \mathbf{T}$ должно, таким образом, сводиться к уравнению $R_{00} = 4\pi\rho$. В компонентной форме уравнение поля Эйнштейна гласит:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \varkappa T_{\mu\nu}.$$

Его свертка равна

$$-R = R - 2R = \varkappa T.$$

В результате оно предсказывает, что

$$R_{00} = \frac{1}{2} g_{00} R + \varkappa T_{00} = \frac{1}{2} \varkappa (2T_{00} - \underbrace{g_{00} T}_{-1}) =$$

$$= \frac{1}{2} \varkappa [2T_{00} + (T^0{}_0 + T^j{}_j)] = \frac{1}{2} \varkappa (T_{00} + T^j{}_j).$$

Это сводится к уравнению

$$R_{00} = \frac{1}{2} \varkappa \rho, \tag{17.8}$$

если вспомнить, что для Земли, как для любой почти ньютоновской системы, напряжения $T_{jk}$ очень малы по сравнению с плотностью массы энергии $T_{00} = \rho$:

$$\frac{|T_{jk}|}{T_{00}} \sim \frac{\text{давление}}{\text{плотность}} \sim \frac{dp}{d\rho} (\text{скорость звука})^2 \ll 1.$$

Уравнение $R_{00} = 4\pi\rho$ (выведенное путем сравнения относительных ускорений в ньютоновской и эйнштейновской теориях) и уравнение $R_{00} = \frac{1}{2}\varkappa\rho$ (полученное непосредственно из уравнения поля Эйнштейна) могут быть согласованы, если только постоянная пропорциональности $\varkappa$ равна $8\pi$.

Таким образом, уравнение поля Эйнштейна, описывающее генерацию кривизны массой-энергией, должно иметь вид

Результат: «Уравнение поля Эйнштейна» $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$

$$\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}. \tag{17.9}$$

Левая сторона этого уравнения («кривизна») имеет размерность $см^{-2}$, поскольку тензор кривизны представляет собой линейную машину, в которую закладывается смещение (размерность: см), а на выходе получается относительное ускорение (размерность: $см/с^2 \sim см/см^2 \sim см^{-1}$). Размерность правой стороны уравнения также $см^{-2}$, поскольку это линейная машина, в которую закладывается 4-скорость (безразмерная) и выдается плотность массы [размерность $г/см^3 \sim см/см^3 \sim см^{-2}$; напомним, что из уравнения (1.12) и дополнения 1.8 следует, что $1\ г = (1\ г) \times (G/c^2) = (1\ г) \cdot (0{,}742 \cdot 10^{-28}\ см/г) = 0{,}742 \cdot 10^{-28}\ см$].

Это завершает простейший вывод уравнения поля Эйнштейна и устанавливает его соответствие с ньютоновской теорией тяготения в ньютоновском пределе. Такое соответствие необходимо для определения коэффициента $\varkappa = 8\pi$ в правой части уравнения (17.9). Помимо нахождения этого коэффициента, центральным пунктом вывода было требование существования единственной тензорной меры кривизны $\mathbf{G}$ с тождественно равной нулю дивергенцией.

---

## 17.1. Единственность тензора Эйнштейна

УПРАЖНЕНИЯ

а. Покажите, что наиболее общим симметричным тензором второго ранга, построенным из тензора Римана и метрического тензора $\mathbf{g}$ и линейным по тензору Римана, является тензор

$$\begin{aligned} &aR_{\alpha\beta} + bRg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \\ &= aR^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} + bR^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{17.10}$$

где $a$, $b$ и $\Lambda$ — постоянные.

б. Покажите, что у этого тензора дивергенция тождественно равна нулю тогда и только тогда, когда $b = -\frac{1}{2}a$.

в. Покажите также, что этот тензор исчезает в плоском пространстве-времени тогда и только тогда, когда $\Lambda = 0$, т. е. когда он кратен тензору Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$. (Не беспокойтесь о доказательстве тождества $\nabla \cdot \mathbf{G} \equiv 0$, примите его как результат гл. 13.)

УПРАЖНЕНИЯ

### 17.2. Невозможность построения тензора из первых производных метрики

Покажите, что *не* существует тензора с компонентами, состоящими из 10 метрических коэффициентов $g_{\alpha\beta}$ и 40 их первых производных $g_{\alpha\beta,\mu}$, за исключением метрического тензора $\mathbf{g}$ и произведений его на себя, например $\mathbf{g} \otimes \mathbf{g}$. (*Указание*: Предположите, что такой тензор существует и рассмотрите его гипотетические компоненты в локально инерциальной системе отсчета.)

### 17.3. Тензор Римана как единственный тензор, который строится из метрических коэффициентов и линеен по вторым производным метрики

Покажите, что 1) тензор Римана, 2) тензор $\mathbf{g}$ и 3) тензоры (например, тензор Риччи), образованные из тензора Римана и $\mathbf{g}$ и линейные по тензору Римана, являются единственными тензорами, которые а) можно построить из $10\,g_{\alpha\beta}$, $40\,g_{\alpha\beta,\mu}$ и $100\,g_{\alpha\beta,\mu\nu}$ и которые б) линейны по $g_{\alpha\beta,\mu\nu}$. [*Указание*: Предположите, что существует другой такой тензор, и рассмотрите его гипотетические компоненты в ортонормальной риманово-нормальной системе координат. Используйте уравнения (11.30) и (11.32).]

### 17.4. Единственность тензора Эйнштейна

а. Покажите, что тензор Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$ — единственный симметричный тензор второго ранга, который имеет 1) компоненты, сконструированные только из $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta,\mu}$, $g_{\alpha\beta,\mu\nu}$, 2) компоненты, линейные по $g_{\alpha\beta,\mu\nu}$, 3) тождественно равную нулю дивергенцию $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$ и 4) исчезает в плоском пространстве-времени. Это дает дополнительный повод для выбора тензора Эйнштейна в качестве левой части уравнения поля $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$.

б. Покажите, что если опустить условие «4», то наиболее общим тензором будет $\mathbf{G} + \Lambda\mathbf{g}$, где $\Lambda$ — постоянная. (О значении этого см. в § 17.3.)

---

## § 17.2. АВТОМАТИЧЕСКОЕ СОХРАНЕНИЕ ИСТОЧНИКА: ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕОБХОДИМОСТЬ

Соотношение $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$ теперь в нашем распоряжении. Выведено уравнение, связывающее «момент вращения» Эйнштейна — Картана $\mathbf{G}$ с тензором энергии-импульса $\mathbf{T}$. Для какой же цели в первую очередь необходимо это уравнение? Если движение

материи определяется геометрией, а искривление геометрии определяется материей, то не гордиев ли узел у нас в руках? И как тогда его развязать?

Динамика геометрии по своему характеру не отличается от других разделов динамики. Чтобы предсказать будущее, необходимо, во-первых, задать на «начальной» гиперповерхности «одновременности» положение и скорость каждой частицы и амплитуду и скорость изменения во времени каждого поля, подчиняющегося волновому уравнению второго порядка. Затем с помощью динамических уравнений можно проследить эволюцию частиц и полей во времени.

Уравнение поля Эйнштейна определяет эволюцию геометрии пространства-времени

Аналогично, следует задать на «начальной» гиперповерхности геометрию и скорость ее изменения во времени, если уравнение поля Эйнштейна в состоянии полностью и детерминистически предсказать развитие во времени полной системы: частицы плюс поля плюс геометрия. (Подробнее см. гл. 21.)

Какое количество информации необходимо для предсказания геометрии? Геометрия пространства-времени описывается метрикой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(\mathcal{P})\, dx^\alpha dx^\beta,$$

т. е. 10 функциями положения $\mathcal{P}$ в пространстве-времени. Поэтому может показаться, что необходимо предсказать 10 функций и для этого потребуется 10 уравнений. Однако это не так. Введем новый набор координат $x^{\bar{\mu}}$ с помощью координатных преобразований

$$x^\alpha = x^\alpha(x^{\bar{\mu}})$$

и найдем ту же геометрию пространства-времени с теми же выпуклостями, вогнутостями и волнами, но полностью описываемую новым набором метрических коэффициентов $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\mathcal{P})$.

Указать способ вычисления от прошлого к будущему значений всех 10 функций $g_{\alpha\beta}(\mathcal{P})$ из соответствующих данных на «начальной гиперповерхности» было бы превышением полномочий эйнштейновского «геометродинамического закона» $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$. Для предсказания всех 10 функций необходимо выбрать систему координат, но выбор между координатными системами—это именно то, что не входит в возможности и компетенцию геометродинамического закона. Сделать такой выбор — дело человека, изучающего геометрию, а не Природы, которая создает геометрию. Геометрия сама в себе, как автомобильное крыло само в себе, свободна от координат. Координаты — дело человека.

Уравнение $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$ должно определять только 6 компонент метрического тензора; остальные четыре компоненты устанавливаются с помощью преобразований координат

Из этого следует, что 10 компонент $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ уравнения поля не должны определять полностью и однозначно все 10 компонент $g_{\mu\nu}$ метрики. Уравнения $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ должны налагать только 6 независимых связей на 10 функций $g_{\mu\nu}(\mathcal{P})$, остальные 4 произвольные функции получаются путем специализации четырех координатных функций $x^\alpha(\mathcal{P})$.

Уравнение $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$ оставляет свободными четыре компоненты метрического тензора, поскольку оно удовлетворяет четырем тождествам $0 \equiv \nabla \cdot \mathbf{G} = 8\pi \nabla \cdot \mathbf{T}$ («автоматическое сохранение источника»)

Как могут 10 уравнений $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ превратиться в 6? *Ответ.* Благодаря «автоматическому сохранению источника». Более определенно, тождество $G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \equiv 0$ гарантирует, что 10 уравнений $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ содержат 4 «закона сохранения» $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$. Эти четыре закона сохранения наряду с другими уравнениями определяют эволюцию источника. Однако они никоим образом не ограничивают эволюцию геометрии. Геометрия определяется только 6 оставшимися независимыми уравнениями $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$.

С этой точки зрения «автоматическое сохранение источника» не просто философски привлекательная идея. В действительности это абсолютная динамическая необходимость. В отсутствие «автоматического сохранения источника» 10 уравнений $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ будут налагать 10 ограничений на 10 $g_{\alpha\beta}$, фиксируя таким образом не только геометрию, но и систему координат. При наличии «автоматического сохранения» 10 уравнений $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ налагают 4 ограничения (локальное сохранение энергии и импульса) на источник и 6 связей на 10 компонент $g_{\alpha\beta}$, оставшиеся 4 компоненты фиксируются выбором системы координат [1]).

## § 17.3. КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ

Что побудило Эйнштейна ввести космологическую постоянную

В 1915 г., когда Эйнштейн создал общую теорию относительности, постоянство Вселенной было неизменным пунктом веры в западной философии. «Небеса длятся от вечности к вечности». Это в значительной степени помешало Эйнштейну установить (гл. 27), что его геометродинамический закон $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$ предсказывает *не*постоянную Вселенную, динамическую Вселенную, Вселенную, которая возникла в результате «большого взрыва» или будет в конечном счете разрушена при сжатии к бесконечной плотности, причем возможно, что оба эти состояния реализуются для Вселенной. Столкнувшись с противоречием между теорией и твердыми философскими принципами того времени, Эйнштейн проявил нерешительность и видоизменил свою теорию.

Единственная возможная модификация, существенно не изменяющая структуры теории, заключается в изменении левой стороны геометродинамического закона $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$. Напомним, что левая сторона этого закона совпадает с тензором Эйнштейна

[1]) Здесь следует сделать существенное разъяснение. Уравнения $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ содержат не только 10 неизвестных компонент, но еще и 5 неизвестных величин, входящих в $T_{\alpha\beta}$,—это плотность вещества $\rho$, давление $P$ и 3 компоненты скорости $\mathbf{u}$. (Для простоты мы рассмотрим здесь только тензор для идеального газа; см. § 5.5.) Давление и плотность связаны уравнением состояния вещества. Таким образом, остаются $\rho$ и 3 компоненты скорости $\mathbf{u}$. Эти 4 величины должны быть определены совместно с 10 $g_{ik}$ из уравнений Эйнштейна. Произвольные преобразования 4-координат снижают число неизвестных до 10. Уравнения Эйнштейна и следующие из них тождества Бианки позволяют найти все неизвестные. О том, как это конкретно делается, см. в гл. 11, § 95, книги Л.Д. Ландау и Е. М. Лифшица [2] и в гл. 21 книги А. З. Петрова [141]. — *Прим. ред.*

$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$ при выполнении следующих трех предположений.

1) **G** исчезает в плоском пространстве-времени;
2) **G** строится только из тензора кривизны Римана и метрики;
3) **G** отличается от других тензоров, которые можно построить из тензора Римана и метрики **g**, тем, что к нему предъявлены требования: тензор **G** а) должен быть линеен по тензору Римана, как это подобает любой естественной мере кривизны, б) должен быть, как и **T**, симметричным тензором второго ранга и в) иметь автоматически исчезающую дивергенцию $\nabla \cdot \mathbf{G} \equiv 0$.

Чтобы избежать путаницы с обычным тензором Эйнштейна, обозначим новую, видоизмененную левую сторону уравнения через «**G**». Отказаться от тождества $\nabla \cdot «\mathbf{G}» \equiv 0$ невозможно из динамических соображений (см. § 17.2). Изменить симметрию или ранг «**G**» невозможно из математических соображений, поскольку «**G**» необходимо приравнять **T**. Допущение, что «**G**» нелинейно по тензору Римана, сильно усложнит теорию. Если построить «**G**» не из тензора Римана и **g**, то он не будет больше мерой геометрии пространства-времени, что не в духе теории. После всех мучений заключаем: без ущерба для красоты и духа теории можно опустить лишь предположение, что «**G**» исчезает в плоском пространстве-времени (предположение 1). Но даже эта потеря болезненна: 1) тензор «**G**» в некотором смысле еще может быть мерой геометрии, но он уже не будет мерой кривизны и 2) плоское пустое пространство-время оказывается несовместимым с геометродинамическим законом ($\mathbf{G} \neq 0$ в плоском пустом пространстве, где $\mathbf{T} = 0$). Тем не менее эти следствия были менее болезненными для Эйнштейна, чем динамическая Вселенная.

Единственным тензором, удовлетворяющим условиям 2 и 3 (при отказе от условия 1), является тензор Эйнштейна плюс тензор, кратный метрике:

$$«G_{\alpha\beta}» = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

(упражнение 17.1, см. также упражнение 17.4). Таким образом, Эйнштейн [103] пришел к следующему модифицированному уравнению поля:

$$\mathbf{G} + \Lambda \mathbf{g} = 8\pi \mathbf{T}. \qquad (17.11)$$

**Уравнение поля Эйнштейна с космологической постоянной**

Постоянную $\Lambda$, имеющую размерность $см^{-2}$, он назвал «космологическая постоянная».

В отличие от исходного уравнения модифицированное уравнение поля допускает в качестве специального решения статическую, неизменную Вселенную (см. дополнение 27.5). По этой причине Эйнштейн в 1917 г. и предпочел модифицированное уравнение. Но 13 лет спустя Хаббл открыл расширение Вселенной, и космологическая постоянная перестала быть необходимостью. Эйнштейн,

**Почему Эйнштейн отказался от космологической постоянной**

назвав космологическую постоянную «самой грубой ошибкой своей жизни» [1]), отказался от нее и вернулся к своему первоначальному геометродинамическому закону $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$.

Да, $\Lambda$ была поистине огромной ошибкой, ибо, поверь Эйнштейн в свое первоначальное уравнение, он бы открыл расширение Вселенной — наиболее триумфальное предсказание его теории тяготения.

Джина, выпущенного из бутылки, нелегко загнать обратно. Многие космологи не склонны отказываться от космологической постоянной и откажутся от нее только после того, как космологические наблюдения покажут, что $\Lambda$ пренебрежимо мала.

**Современный способ введения космологической постоянной: поляризация вакуума**

Следуя современному способу введения космологической постоянной, перепишем модифицированное уравнение поля в виде

$$\mathbf{G} = 8\pi[\mathbf{T} + \mathbf{T}^{(\text{вак})}], \tag{17.12а}$$

$$\mathbf{T}^{(\text{вак})} \equiv -(\Lambda/8\pi)\,\mathbf{g} \tag{17.12б}$$

и будем интерпретировать $\mathbf{T}^{(\text{вак})}$ как тензор энергии-импульса вакуума. При таком подходе [45] поляризация вакуума в квантовой теории поля означает, что тензор энергии-импульса вакуума, (17.12б), не равен нулю, но совершенно не наблюдаем, если не учитывать гравитационных эффектов. К сожалению, современная квантовая теория поля недостаточно развита, чтобы можно было вычислить $\mathbf{T}^{(\text{вак})}$ из первых принципов (см., однако, упражнение 17.5).

Космологическая постоянная приписывает вакууму плотность массы-энергии

$$\rho^{(\text{вак})} = T^{(\text{вак})}_{\hat{0}\hat{0}} = +\Lambda/8\pi. \tag{17.13}$$

**Ограничение на космологическую постоянную, следующее из наблюдений**

Если $\Lambda \neq 0$, то она должна быть по крайней мере настолько малой, чтобы в той области, где ньютоновская теория успешно объясняет наблюдения, гравитационным влиянием $\rho^{(\text{вак})}$ можно было пренебречь ($|\rho^{(\text{вак})}| < \rho^{\text{материя}}$). Системами с малой плотностью, к которым довольно успешно можно применять ньютоновскую теорию, являются небольшие скопления галактик. Следовательно, можно дать следующее наблюдательное ограничение на величину космологической постоянной

$$\rho^{(\text{вак})} = |\Lambda|/8\pi \lesssim \rho^{(\text{скопления})} \sim 10^{-29}\ \text{г/см}^3 \sim 10^{-57}\ \text{см}^{-2}. \tag{17.14}$$

**Почему космологическая постоянная может играть роль только в космологии**

Очевидно, что даже если постоянная $\Lambda \neq 0$, то она настолько мала, что абсолютно несущественна в масштабах галактики, звезды, планеты, человека или атома. Поэтому разумно, делая исключение только при обсуждении космологии (гл. 27—30), везде придерживаться первоначального геометродинамического закона Эйнштейна ($\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$; $\Lambda = 0$).

---

[1]) Цитируется по книге Гамова [426].

### 17.5. Величина космологической постоянной

УПРАЖНЕНИЕ

а. Оцените по порядку величины влияние космологической постоянной на небесную механику солнечной системы, если $\Lambda \sim 10^{-57}$ см$^{-2}$.

б. Покажите, что плотность массы-энергии вакуума $\rho^{(\text{вак})} = \Lambda/8\pi \sim 10^{-29}$ г/см$^3$, соответствующая максимально возможному значению $\Lambda$, согласуется по порядку величины с отношением [45, 46]

$$\frac{\text{масса покоя элементарной частицы}}{(\text{комптоновская длина волны частицы})^3} \times \begin{pmatrix}\text{гравитационная}\\ \text{постоянная тонкой}\\ \text{структуры}\end{pmatrix} = \frac{m}{(\hbar/m)^3}\frac{m^2}{\hbar} = \frac{m^6}{\hbar^4}.$$

Соответствие это гипотетическое и не ведет ни к какому заслуживающему доверия выводу выражения для тензора энергии-импульса вакуума.

## § 17.4. НЬЮТОНОВСКИЙ ПРЕДЕЛ

Так же как квантовая механика переходит в классическую механику в пределе при больших действиях $I \gg \hbar$, общая теория относительности переходит в ньютоновскую теорию в пределе малых скоростей и слабых гравитационных полей. («Принципы соответствия» см. в дополнении 17.1.) В этом параграфе (с некоторыми математическими деталями) выясняется вопрос о соответствии между общей теорией относительности и ньютоновской теорией. Он начинается с рассмотрения «пассивных» аспектов тяготения (отклик материи на тяготение) и затем переходит к анализу «активных» аспектов (генерация тяготения материей).

Рассмотрим изолированную систему, например Солнечную систему, в которой с высокой точностью справедлива ньютоновская теория. Чтобы можно было пренебречь эффектами специальной теории относительности, все скорости относительно центра масс системы и относительно ньютоновской системы координат должны быть малы по сравнению со скоростью света

**Условия, которым должна удовлетворять система, чтобы ньютоновская теория тяготения была точной**

$$v \ll 1. \tag{17.15а}$$

При падении частицы от внешней области системы к внутренней области тяготение увеличивает ее кинетическую энергию до величины $\frac{1}{2}mv^2 \sim |m\Phi|_{\text{макс}}$. [Здесь $\Phi < 0$ — ньютоновский гравитационный потенциал, нормированный так, чтобы $\Phi(\infty) = 0$.] Результирующая скорость будет малой при условии

$$|\Phi| \ll 1. \tag{17.15б}$$

Внутренние напряжения в системе также порождают движение, например звуковые волны. Такие волны имеют характерные скорости порядка $|T^{ij}/T^{00}|^{1/2}$, например скорость звука в идеальной жидкости равна

$$v=(dp/d\rho)^{1/2}\sim(p/\rho)^{1/2}\sim|T^{ij}/T^{00}|^{1/2}.$$

Чтобы эти скорости были малы по сравнению со скоростью света, все напряжения должны быть малыми по сравнению с плотностью массы-энергии

$$|T^{j}|/T^{00}=|T^{ij}|/\rho\ll 1. \qquad (17.15в)$$

Тогда и только тогда, когда выполнены условия (17.15), ньютоновская теория может точно описать исследуемую систему. Пассивная роль соответствия между общей теорией относительности и ньютоновской теорией тяготения сводится к требованию, чтобы геодезические мировые линии свободно падающих частиц переходили в ньютоновские мировые линии

$$d^2x^i/dt^2=-\partial\Phi/\partial x^i. \qquad (17.16)$$

Более того, они должны сводиться к этой форме в *любой* релятивистской системе координат, где источник и пробные частицы имеют малые скорости $v\ll 1$, а координатные длины и времена приблизительно совпадают с ньютоновскими длинами и временами, которые в свою очередь являются собственными длинами и временами, измеряемыми стержнями и часами. Поэтому уместны координаты (называемые *«галилеевыми» или «ньютоновскими» координатами*), в которых

**Определение «ньютоновских» координат**

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu},\quad |h_{\mu\nu}|\ll 1,\quad |v^j|=|dx^j/dt|\ll 1 \qquad (17.17)$$

(слабое гравитационное поле, почти инерциальная система координат, малые скорости). В такой системе координат геодезические мировые линии пробных частиц имеют вид

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}=\frac{d^2x^i}{d\tau^2}\quad\text{(поскольку } dt/d\tau\approx 1 \text{ при } |h_{\mu\nu}|\ll 1 \text{ и } |v^j|\ll 1),$$

$$=-\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\quad\text{(уравнение геодезических)},$$

$$=-\Gamma^i_{00}\quad\text{(поскольку } dt/d\tau\approx 1 \text{ и } |dx^j/d\tau|\ll 1),$$

$$=-\Gamma_{t00}\quad\text{(поскольку } g_{\mu\nu}\approx\eta_{\mu\nu}),$$

$$=\frac{1}{2}h_{00,\,t}-h_{0t,\,0}\quad\text{(выражение } \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \text{ через } g_{\alpha\beta,\,\gamma}).$$

$$=\frac{1}{2}h_{00,\,t}\left(\begin{array}{l}\text{малость всех скоростей по сравнению со скоростью}\\ \text{света } c \text{ означает, что временны́е производные малы}\\ \text{по сравнению с пространственными, т.е. } h_{\alpha\beta,0}\sim v_{\alpha\beta,\,i}\end{array}\right).$$

Эти геодезические мировые линии должны в действительности сводиться к мировым линиям ньютоновской теории [уравнение

(17.16)], если провести следующее отождествление:

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} h_{00,\,i} = \Phi_{,i}. \tag{17.18}$$

Вместе с граничными условиями $\Phi\,(r = \infty) = 0$ и $h_{\mu\nu}\,(r = \infty) = 0$ (координаты Лоренца вдали от источника) это отождествление означает, что $h_{00} = -2\Phi$, т. е.

Теория тяготения Эйнштейна сводится к ньютоновской теории тяготения, если только в ньютоновских координатах $g_{00} = -1 - 2\Phi$

$$g_{00} = -1 - 2\Phi \text{ для почти ньютоновской системы в ньютоновских координатах.} \tag{17.19}$$

Заметим, что принцип соответствия указывает вид $h_{00}$ для почти ньютоновской системы, но не указывает вид других компонент возмущения метрики. В действительности остальные $h_{\mu\nu}$ могут иметь тот же порядок величины, что и $h_{00} \sim \Phi$, не оказывая влияния на мировые линии медленно движущихся частиц, поскольку в уравнении геодезических они умножаются на малые числа $v$ или $v^2$ или дифференцируются по $t$, а не по $x^1$. Вид остальных $h_{\mu\nu}$ и их влияние на ньютоновское движение будут рассмотрены в гл. 18, 39 и 40.

Соответствие между теорией Эйнштейна и ньютоновской теорией для всех «пассивных» аспектов гравитации

*Соотношение* $g_{00} = -1 - 2\Phi$ *служит математическим воплощением соответствия между общей теорией относительности и ньютоновской теорией* для пассивных аспектов гравитации. Вместе с «условиями применимости» (17.15) и (17.17) оно служит основанием для вывода всех других аспектов соответствия «пассивной гравитации», включая соотношение

$$R^i{}_{0j0} = \partial^2\Phi/\partial x^i\,\partial x^j \tag{17.20}$$

(упражнение 17.6). Альтернативно все другие аспекты этого соответствия можно вывести путем прямого сравнения ньютоновских и эйнштейновских предсказаний. Например, для вывода уравнения (17.20) исследуем относительное ускорение двух пробных частиц, одна из которых находится в точке $x^i + \xi^i$, а другая — в точке $x^i$. В соответствии с Ньютоном

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = \frac{d^2(x^i + \xi^i)}{dt^2} - \frac{d^2x^i}{dt^2} = -\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\right|_{\text{в } x^j + \xi^j} + \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\right|_{\text{в } x^j} = \frac{-\partial^2\Phi}{\partial x^i\,\partial x^j}\,\xi^j.$$

С другой стороны, Эйнштейн предсказывает (уравнение геодезического отклонения)

$$\frac{D^2\xi^i}{d\tau^2} = \frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -R^i{}_{0j0}\,\xi^j.$$

↑ — в силу условий (17.15) и (17.17)

Прямое сравнение этих равенств приводит к соотношению (17.20).

Обратимся теперь от соответствия для пассивных аспектов тяготения к соответствию для активных аспектов. Согласно эйнштейновскому геометродинамическому закону $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$, масса

**В ньютоновском пределе уравнение поля Эйнштейна переходит в уравнение $\nabla^2\Phi = 4\pi\rho$**

порождает тяготение (кривизну пространства-времени). Применим этот закон к почти ньютоновской системе и с помощью цепи рассуждений, приведших к уравнению (17.8), выведем соотношение

$$R_{00} = 4\pi\rho. \tag{17.21}$$

Комбинируя его со сверткой уравнения (17.20)

$$R_{00} = R^{i}{}_{0i0} + \underbrace{R^{0}{}_{000}}_{0} = \partial^2\Phi/\partial x^i\,\partial x^i = \nabla^2\Phi,$$

получаем ньютоновское уравнение, описывающее генерацию тяготения массой

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho. \tag{17.22}$$

Таким образом, уравнение поля Эйнштейна переходит в ньютоновском пределе в уравнение поля Ньютона.

Вышеизложенное ясное и прямое соответствие между теориями Эйнштейна и Ньютона становится еще более ясным и прямым, если переписать ньютоновскую теорию тяготения эйнштейновским языком искривленного пространства-времени (гл. 12, упражнение 17.7).

---

**УПРАЖНЕНИЯ**

### 17.6. Разветвления соответствия для тяготения в пассивной роли

Выведите из соотношения соответствия $g_{00} = -1-2\Phi$ и условий (17.15) и (17.17) ньютоновской физики следующие соотношения соответствия:

$$\Gamma^{i}_{00} = \partial\Phi/\partial x^i, \qquad R^{i}{}_{0j0} = \partial^2\Phi/\partial x^i\partial x^j.$$

### 17.7. Соответствие на языке искривленного пространства-времени (курс 2)

Покажите соответствие между теорией Эйнштейна и ньютоновской теорией, сформулированной Картаном на языке искривленного пространства-времени (гл. 12).

---

## Дополнение 17.1. ПРИНЦИПЫ СООТВЕТСТВИЯ

### А. Общие замечания и характерные примеры

1. Единство расширяющейся и развивающейся физики поддерживается сетью принципов соответствия, с помощью которых более простые теории поддерживают свою жизнеспособность, будучи связанными с более изощренными и более точными теориями.

а. Физическая оптика со всеми новыми дифракционными и интерференционными явлениями тем не менее должна была объяснить и объяснила старую элементарную геометрическую оптику зеркал и линз. Геометрическая оптика получается из физической оптики в пределе, когда длина волны неограниченно мала по сравнению со всеми другими имеющимися размерами физической системы.

б. Ньютоновская механика восстанавливается из механики специальной теории относительности в пределе, когда все относящиеся к делу скорости пренебрежимо малы по сравнению со скоростью света.

в. Термодинамика получается из своего приемника статистической механики в математическом пределе, когда учитывается так много частиц, что флуктуации давления, числа частиц и других физических величин пренебрежимо малы по сравнению со средними значениями этих параметров системы.

г. Как гласит «принцип соответствия», классическая механика получается из квантовой в пределе, когда квантовые числа рассматриваемых квантовых состояний так велики или вступают в игру действия, по величине настолько превышающие $\hbar$, что волновые и дифракционные явления не влияют на предсказания стандартной, детерминистической, классической механики. Нильс Бор сформулировал и воспользовался принципом соответствия еще до того, как была создана правильная квантовая теория. Он применил его для предсказания приближенных значений атомных энергетических уровней и интенсивностей спектральных линий. Бор толковал «принцип соответствия» как руководство для физиков сначала для поиска подходящего варианта квантовой теории, а затем после ее создания для разъяснения содержания теории.

2. Во всех этих и других примерах более современная и более изощренная теория «лучше» предшествующей, поскольку она дает хорошее описание более обширной области физики или более точное описание той же области или и то и другое.

3. Соответствие между новой теорией и ее предшественницей а) дает возможность вывести старую теорию из новой, б) может быть продемонстрировано с помощью прямых математических методов и в) согласно историческим данным, часто направляло развитие новой теории.

### Б. Структура общей теории относительности с точки зрения принципов соответствия

1. Ясными предельными случаями эйнштейновской теории тяготения являются: а) специальная теория относительности, б) ньютоновская теория тяготения, в) постньютоновская теория тяготения, г) «линеаризованная теория тяготения». Таким образом, общая теория относительности имеет исключительно богатую структуру соответствия.

   а. *Соответствие со специальной теорией относительности.* Общая теория относительности обладает двумя разными типами соответствия со специальной теорией относительности. Первый достигается в пределе исчезающего повсюду гравитационного поля (исчезающая кривизна); в этом пределе можно ввести глобально инерциальную систему отсчета, положив $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, и полностью и точно восстановить специальную теорию относитель-

ности. Второй является локальным, а не глобальным и требует («принцип соответствия», «принцип эквивалентности»), чтобы в локально инерциальной системе отсчета все законы физики принимали тот вид, который они имеют в специальной теории относительности. Как показано в гл. 16, это не ограничивает выбор метрики (за исключением того, что в локально инерциальной системе отсчета $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu,\alpha} = 0$), но налагает серьезные ограничения на поведение вещества и полей в присутствии тяготения.

б. *Соответствие с ньютоновской теорией.* В пределе слабых гравитационных полей, медленных скоростей и низких давлений общая теория относительности сводится к ньютоновской теории тяготения. Математическая структура соответствия исследована в § 17.4.

в. *Соответствие с постньютоновской теорией.* Когда ньютоновская теория почти справедлива, но могут быть существенны «релятивистские поправки первого порядка», часто используется постньютоновская теория тяготения. Постньютоновская теория и ее соответствие с общей теорией относительности и ньютоновской теорией излагаются в гл. 39.

г. *Соответствие с линеаризованной теорией.* В пределе слабых гравитационных полей, но возможно сильных скоростей и больших давлений ($v \sim 1$, $T_{jk} \sim T_{00}$), общая теория относительности сводится к линеаризованной теории тяготения. Это соответствие изложено в гл. 18.

## § 17.5. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ ЭЙНШТЕЙНА

Можно ли найти наиболее сжатую и приемлемую аксиоматическую структуру общей теории относительности? И затем из аксиом вывести уравнение поля Эйнштейна

$$\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}?$$

Такой подход был бы традиционным. Однако, возможно, он устарел сегодня, ведь с 25 ноября 1915 г. прошло более чем полстолетия. Все это время уравнение оставалось неизменным, если не учитывать вре́менного «заблуждения» Эйнштейна, связанного с введением космологической постоянной. В противоположность этому выводы уравнения эволюционировали и становились все более многочисленными и разнообразными. Вначале аксиомы указывали, какое уравнение допустимо. Теперь уравнение указывает, какие аксиомы допустимы. (Ряд наборов аксиом и следующих из них выводов уравнения Эйнштейна приводится в дополнении 17.2.)

**Уравнение поля Эйнштейна можно вывести многими способами (дополнение 17.2)**

### Дополнение 17.2. ШЕСТЬ МАРШРУТОВ К ЭЙНШТЕЙНОВСКОМУ ГЕОМЕТРОДИНАМИЧЕСКОМУ ЗАКОНУ РАВЕНСТВА КРИВИЗНЫ И ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ («УРАВНЕНИЕ ПОЛЯ ЭЙНШТЕЙНА»)

[Читателям курса 1 рекомендуем только маршрут 1 (автоматическое сохранение источника плюс соответствие с ньютоновской теорией) и маршрут 2 (вариационный принцип Гильберта) и даже читателям курса 2 советуем закончить остальную часть

этой главы прежде, чем изучать маршрут 3 (физика пространственноподобного сечения), маршрут 4 (ведущий от суперпространства к уравнению Эйнштейна), маршрут 5 (поле спина 2 в «ненаблюдаемом плоском пространственно-временно́м фоне) и маршрут 6 (гравитация как упругость пространства, что следует из физики элементарных частиц).]

1. Параллельное рассмотрение моделей геометродинамики и электродинамики и изложение в качестве главных пунктов «автоматического сохранения источника» и «принципа соответствия ньютоновской теории тяготения».

[а. В электродинамике частица реагирует на поле, в общей теории относительности — на геометрию.

б. Потенциалом электромагнитного поля служит 4-вектор **A** (с компонентами $A_\mu$). Потенциалом геометрии является метрический тензор **g** (с компонентами $g_{\mu\nu}$).

в. Потенциал электромагнитного поля удовлетворяет волновому уравнению с источником (4-ток) в правой части

$$\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right)^{;\nu} = 4\pi j_\mu, \tag{1}$$

для которого автоматически выполняется закон сохранения $j_\mu{}^{;\mu} = 0$ (вследствие тождества, справедливого для левой части). По аналогии геометродинамический потенциал также должен удовлетворять волновому уравнению с источником (тензор энергии-импульса) в правой части

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \tag{2}$$

для которого «автоматически» выполняется закон сохранения (гл. 16). Последнее происходит потому, что левая часть (2) является тензором (тензор Эйнштейна, см. дополнение 8.6 или гл. 15), который построен из компонент метрики и их вторых производных и для которого справедливо тождество $G_{\mu\nu}{}^{;\nu} \equiv 0$.

г. Не существует другого тензора, удовлетворяющего этому тождеству, который был бы 1) линейным по вторым производным метрических компонент, 2) не содержал бы высших производных и 3) исчезал бы в плоском пространстве-времени.

д. Постоянная пропорциональности $8\pi$ фиксируется выбором единиц (в данном случае геометрических; см. дополнение 1.8) и требованием («соответствие ньютоновской теории»), чтобы пробная частица колебалась взад и вперед в сгустке вещества плотности $\rho$ или вращалась с частотой $\omega^2 = (4\pi/3)\rho$ по круговой орбите вокруг сгустка вещества (фиг. 1.12). В предыдущем тексте упрощенно изложены соображения, которым следовал Эйнштейн при выводе своего уравнения поля, при этом ошибки, допущенные им в то время, опущены. Эти соображения подробно разобраны в тексте гл. 17.

2. Возьмем за основу вариационный принцип.

а. Построим из компонент метрики единственный существующий скаляр, который 1) линеен по вторым производным метрического тензора, 2) не содержит высших производных и 3) исчезает в плоском пространстве-времени, а именно построим скалярный инвариант римановой кривизны $R$.

б. Построим инвариантный интеграл

$$I = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} R\,(-g)^{1/2}\,d^4x. \tag{3}$$

в. Наложив малые вариации $\delta g^{\mu\nu}$ на метрические коэффициенты $g^{\mu\nu}$ внутри четырехмерной области $\Omega$, найдем, что этот интеграл изменится на величину

$$\delta I = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\,(-g)^{1/2}\,d^4x. \tag{4}$$

г. Потребуем, чтобы интеграл $I$ был экстремален по отношению к выбору геометрии внутри области $\Omega$ ($\delta I = 0$ для произвольных $\delta g^{\mu\nu}$; «принцип экстремального действия»).

д. Тем самым приходим к уравнению поля Эйнштейна в пустом пространстве

$$G_{\mu\nu} = 0. \tag{5}$$

е. Дополнительные соображения приводят к тождеству

$$G_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0.$$

В гл. 21, посвященной вариационному принципу, дан более подробный вывод этого тождества с учетом дополнительного члена, появляющегося в правой части (5) в присутствии вещества или полей, или и вещества и полей.

ж. Этот подход восходит к Давиду Гильберту [47]. Более короткого пути к уравнениям поля нет. Более того, он непосредственно связан (см. ниже п. 2′) с квантовым принципом «демократичности всех историй» [48, 49]. Вариационный принцип подробно разобран в гл. 21.

**Оставшаяся часть этой главы предназначена для читателей курса 2. Ее можно читать без проработки какого-либо предварительного материала, и в свою очередь она не является предварительным материалом для последующих глав, но будет полезна в гл. 21 (вариационный принцип и начальные данные) и в гл. 39 (другие теории тяготения)**

2′. Отдельно о смысле классического интеграла действия для реального мира, описываемого квантовой физикой.

а. «История геометрии» $H$ представляет собой пространство-время, т.е. четырехмерное многообразие с четырехмерной метрикой Римана $-+++$, которая 1) на одной пространственноподобной гиперповерхности («гиперповерхности одновременности») сводится к особой «начальной 3-геометрии» $A$ с положительно определенной метрикой и 2) на другой пространственноподобной гиперповерхности сводится к особой «конечной 3-геометрии» $B$ также с положительно определенной метрикой.

б. Классический вариационный принцип Гильберта, переформулированный Арновиттом, Дезером и Мизнером, для динамической длины пути $I_H$ любой мыслимой истории $H$, допустимой или нет классически, дает рецепт, связывающий $A$ и $B$. (Более подробную формулировку того, что может и должно быть задано на начальной и конечной гиперповерхностях одновременности, и альтернативный выбор подынтегрального выражения в принципе действия см. в гл. 21.)

в. Классическая физика гласит, что история $H$ допустима, только если она экстремизует динамическую длину пути $I$ по сравнению со всеми соседними историями. Квантовая физика утверждает, что все истории имеют одинаковую амплитуду вероятности в следующем смысле. Амплитуда вероятности перехода «динамической геометрии пространства от $A$ к $B$» посредством истории $H$ с интегралом действия $I_H$ и посредством историй, лежащих в данной бесконечно малой окрестности $\mathcal{D}H$ истории $H$, дается выражением

$$\begin{pmatrix}\text{амплитуда вероятности перехода от } A \text{ к } B \text{ посредством истории } H \text{ и историй, лежащих в области } \mathcal{D}H \text{ около } H\end{pmatrix} \sim \exp\,(iI_H/\hbar)N\mathcal{D}H. \tag{6}$$

Здесь $N$ — нормировочный коэффициент, одинаковый для всех мыслимых, допустимых или недопустимых историй $H$, которые ведут от $A$ к $B$ («принцип демократичности историй»). Угловой момент $\hbar = h/2\pi$, выраженный в геометрических единицах, имеет величину

$$\hbar = \hbar_{\text{обычн}}\, G/c^3 = (L^*)^2, \tag{7}$$

где $L^*$ — планковская длина, $L^* = 1{,}6 \cdot 10^{-33}$ см.

г. Классически допустимая история получает «преимущество без преимущества». Эта история и истории $H$, которые отличаются от нее настолько мало, что $\delta I = I_H - I_{\text{класс}}$ порядка или меньше $\hbar$, дают вклады в амплитуду вероятности, интерферирующие с усилением. В противоположность этому вклады (в амплитуду вероятности перехода) от историй, отличающихся от классически допустимой истории на большую величину, гасятся при интерференции. Таким образом, имеются квантовые флуктуации геометрии, но эти флуктуации ограничены по величине. Малость $\hbar$ гарантирует, что масштаб этих флуктуаций не заметен на обычных расстояниях (дальнейшее обсуждение см. в гл. 43 и 44). В этом смысле классическая геометродинамика является хорошим приближением к геометродинамике реального мира, описываемого квантовой физикой.

3. «Физика на пространственноподобном сечении или гиперповерхности одновременности». В качестве модели вновь выбран электромагнетизм.

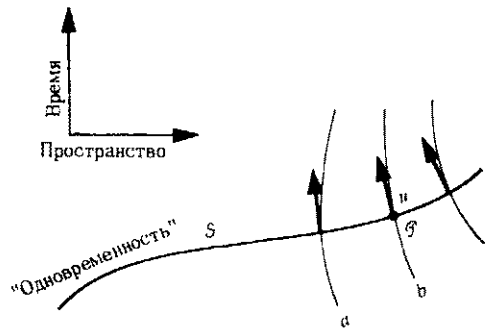
а. Скажите много раз «магнитные силовые линии никогда не кончаются» и придете к половине уравнений Максвелла. Повторите много раз «электрические силовые линии оканчиваются только на заряде» и получите другую половину уравнений Максвелла. Аналогично, скажем много раз

$$\begin{pmatrix}\text{скаляр внутренней кривизны}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{скаляр внешней кривизны}\end{pmatrix} = 16\pi \begin{pmatrix}\text{локальная плотность массы-энергии}\end{pmatrix} \tag{8}$$

и получим 10 компонент уравнения Эйнштейна. «Многократное повторение» — это сокращенное выражение требования справедливости сформулированных принципов на каждом пространственноподобном сечении каждого события пространства-времени.

б. Расшифруем точно эту формулировку уравнений Эйнштейна и Максвелла на «пространственноподобном сечении». Рассмотрим произвольную точку $\mathcal{P}$

пространства-времени («событие») и произвольную «гиперповерхность одновременности» $\mathscr{S}$, проходящую через $\mathscr{P}$ (пространственноподобное сечение пространства-времени). Магнитные силовые линии пронизывают всю $\mathscr{S}$, но ни одна из них нигде не кончается. Напомним (§ 3.4), что требование «магнитные силовые линии нигде не кончаются», наложенное на *все* системы отсчета в $\mathscr{P}$ (для всех выборов поверхности «одновременности» $\mathscr{S}$), обеспечивает не только справедливость $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, но и дает уравнение $\nabla \times \boldsymbol{E} + \partial \boldsymbol{B}/\partial t = 0$. Аналогично (§ 3.4), требование «электрические силовые линии могут оканчиваться только на заряде» $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi J^0$, будучи наложенным на все гиперповерхности одновременности, проходящие через $\mathscr{P}$, приводит к оставшемуся уравнению Максвелла $\nabla \times \boldsymbol{B} = \partial \boldsymbol{E}/\partial t + 4\pi \boldsymbol{J}$.




«Одновременность» $\mathscr{S}$ (пространственноподобная гиперповерхность или «сечение пространства-времени»), проходящая через событие $\mathscr{P}$. «Одновременность» определяется набором «наблюдателей» $a$, $b$, $c$ ... . Мировые линии наблюдателей пересекают одновременность в ортогональном направлении, а их часы отсчитывают собственное время в момент пересечения. Другая одновременность, проходящая через $\mathscr{P}$, может иметь в $\mathscr{P}$ другую кривизну или наклон (или то и другое одновременно) и определяется другим набором наблюдателей с другими наручными часами.

в. Каждая гиперповерхность одновременности $\mathscr{S}$, проведенная через точку $\mathscr{P}$, имеет собственный наклон и кривизну. Возможность различных наклонов (различных локально лоренцевых систем отсчета в $\mathscr{P}$) существенна для вывода всех уравнений Максвелла из требований сохранения потока. В отличие от наклона кривизна гиперповерхности $\mathscr{S}$ никогда не играет роли при анализе электромагнетизма. Она существенна, однако, при анализе гравитации, моделируемой на основе вышеизложенной трактовки электромагнетизма.

г. «Масса-энергия искривляет пространство» — основной принцип гравитации. Расшифровка этого принципа требует последовательного рассмотрения терминов «пространство», «кривизна пространства» и «плотность массы-энергии в данной области пространства». «Пространство» означает пространственноподобную гиперповерхность, или, более специально, гиперповерхность одновременности $\mathscr{S}$, содержащую точку $\mathscr{P}$, в которой исследуется физика.

д. Обозначим 4-вектор нормали к $\mathscr{S}$ в точке $\mathscr{P}$ через $\mathbf{u}$. Тогда плотность массы-энергии на пространственноподобной гиперповерхности $\mathscr{S}$ в точке $\mathscr{P}$ равна

$$\rho = u^\alpha T_{\alpha\beta} u^\beta, \tag{9}$$

в соответствии с определением тензора энергии-импульса, данным в гл.5.

е. Плотность представляет собой отдельное число, зависящее от наклона сечения, проводимого в пространстве-времени и не зависящего от кривизны сечения. Поскольку она приравнивается «кривизне пространства», то и кривизна также не должна зависеть от того, насколько искривлен разрез.

ж. Делаем вывод, что геометрическая величина «кривизна пространства» должна быть 1) одним числом (скаляр), 2) зависеть от наклона **u** разреза, проводимого в пространстве-времени в точке $\mathcal{P}$ при построении гиперповерхности $\mathcal{S}$, но 3) не зависеть от искривления разреза. Последнее требование кажется парадоксальным. Требуется мера кривизны, не зависящая от кривизны!

з. Более пристальное рассмотрение показывает, что мы имеем здесь дело с тремя отдельными понятиями. Одно из них — скалярный инвариант кривизны ${}^{(3)}R$ 3-геометрии, внутренней по отношению к гиперповерхности $\mathcal{S}$ в точке $\mathcal{P}$: «внутренней» в том смысле, что она определяется и зависит исключительно от измерений расстояния в пределах гиперповерхности. Второе — «внешняя кривизна» этой 3-геометрии относительно 4-геометрии окружающего пространства-времени («насколько искривлен разрез»; дополнительно об отличии внутренней и внешней кривизны см. дополнение 14.1). Третье — кривизна самого четырехмерного пространства-времени «нормальная к **u**», в некотором смысле это понятие еще должно быть определено более точно. Последняя величина не зависит от того, насколько искривлен разрез, и с точностью до коэффициента, зависящего от выбора единиц измерения, должна быть отождествлена с плотностью массы-энергии.

и. Эти три величины связаны следующим образом:

$$\left(\begin{array}{l}\text{скалярный инвариант кривизны } {}^{(3)}R \text{ 3-геометрии, внутренней}\\ \text{по отношению к пространственноподобной гиперповерхности}\\ \mathcal{S}, \text{ — величина, зависящая от того, «насколько искривлен}\\ \text{разрез»}\end{array}\right) +$$

$$+\left(\begin{array}{l}\text{поправочный член, который а) зависит только от «внешней}\\ \text{кривизны» } K_{\alpha\beta} \text{ (дополнение 14.1 и гл. 21) гиперповерхности}\\ \text{относительно 4-геометрии, в которую она погружена, б) вычислен}\\ \text{(однозначно определенным образом) так, что сумма этого поправочно-}\\ \text{го члена и } {}^{(3)}R \text{ не зависит от того, «насколько искривлен}\\ \text{разрез», и в) имеет определенную величину}\\ (\mathrm{Sp}\mathbf{K})^2 - (\mathrm{Sp}\mathbf{K}^2) \equiv (K_\alpha{}^\alpha)^2 - K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}\end{array}\right) =$$

$$=\left(\begin{array}{l}\text{мера кривизны пространства-времени, которая зависит от}\\ \text{4-геометрии пространства-времени и наклона } \mathbf{u} \text{ пространст-}\\ \text{венноподобного сечения } \mathcal{S}, \text{ проведенного в пространстве-}\\ \text{времени, но не зависит по построению от того, «насколько искрив-}\\ \text{лен разрез»}\end{array}\right) =$$

$$=\left(\begin{array}{l}\text{скалярная величина, которая а) полностью определена}\\ \text{только что сказанным и, следовательно,}\\ \text{б) может быть полностью вычислена с помощью стандартной}\\ \text{дифференциальной геометрии (подробнее см. в гл. 21)}\end{array}\right) =$$

$$=\left(\begin{array}{l}2\,u^\alpha G_{\alpha\beta}u^\beta, \text{ где } G_{\alpha\beta} \text{ — тензор кривизны Эйнштейна}\\ \text{из уравнения (8.49) и дополнения 8.6}\end{array}\right) =$$

$$=2\left(\begin{array}{l}\text{величина, интерпретированная в курсе 2 гл. 15 как «момент}\\ \text{вращения», связанный с единичным элементом 3-объема,}\\ \text{локализованным в точке } \mathcal{P} \text{ гиперповерхности, ортогональной } \mathbf{u}\end{array}\right). \qquad (10)$$

к. Делаем вывод, что основной принцип «масса-энергия искривляет пространство» сводится к формуле

$$ {}^{(3)}R + (\mathrm{Sp}\mathbf{K})^2 - \mathrm{Sp}\mathbf{K}^2 = 16\pi\rho \tag{11} $$

или в более краткой форме

$$ \begin{pmatrix}\text{момент}\\ \text{вращения}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{внутренняя}\\ \text{кривизна}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{внешняя}\\ \text{кривизна}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{плотность}\\ \text{массы-энергии}\end{pmatrix}, \tag{12} $$

справедливой для каждого пространственноподобного сечения пространства-времени, проведенного в произвольной точке $\mathcal{P}$.

л. Вся геометродинамика Эйнштейна содержится в этой формуле настолько точно, насколько вся электродинамика Максвелла содержится в формуле «число силовых линий, оканчивающихся в элементе объема, равно числу $4\pi$, умноженному на величину заряда в этом элементе объема». Коэффициент $16\pi$ специфичен для геометрической системы единиц, используемой в этой книге (плотность $\rho$, выраженная в $\text{см}^{-2}$, равна произведению $G/c^2 = 0{,}742\times$ $\times 10^{-28}$ см/г на плотность $\rho_{\text{обычн}}$, выраженную в обычных единицах г/см$^3$).

м. Перепишем принцип «масса-энергия искривляет пространство» в виде

$$ 2u^\alpha G_{\alpha\beta} u^\beta = 16\pi u^\alpha T_{\alpha\beta} u^\beta \tag{13} $$

и потребуем, чтобы это уравнение было справедливо на каждой гиперповерхности одновременности, проведенной через точку $\mathcal{P}$ с любым наклоном $\mathbf{u}$.

н. Из условия равенства коэффициентов в левой и правой частях уравнения (13) получаем уравнение Эйнштейна на языке компонент

$$ G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}; \tag{14} $$

или на языке абстрактных геометрических величин

$$ \mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}. \tag{15} $$

4. Переход от суперпространства к уравнению Эйнштейна, а не от уравнения Эйнштейна к суперпространству

а. Четвертый маршрут к уравнению Эйнштейна начинается с геометродинамики повышенного типа (см. гл. 43). Динамика геометрии развертывается здесь в суперпространстве. Суперпространство имеет конечное число измерений. Любая отдельная точка суперпространства описывает полную 3-геометрию ${}^{(3)}\mathcal{G}$ со всеми ее выпуклостями и искривлениями. Под динамикой геометрии понимается переход от точки к точке в суперпространстве.

б. Подобно динамике частицы, динамика геометрии допускает различные, но эквивалентные математические формулировки, связанные с именами Лагранжа, Гамильтона и Гамильтона — Якоби. Наиболее удобна для настоящего анализа последняя формулировка.

в. В задаче об одной частице, движущейся в одном измерении под влиянием потенциала $V(x)$, уравнение Гамильтона — Якоби гласит:

$$ \underbrace{-\frac{\partial S}{\partial t}}_{\substack{\text{полная}\\ \text{энергия}}} = \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}_{\substack{\text{кинетическая}\\ \text{энергия}}} + V(x). \tag{16} $$

Оно имеет решение

$$S_E(x, t) = -Et + \int^x [2m(E-V)]^{1/2}\, dx. \tag{17}$$

Из этого решения движение находится путем применения «условия усиливающей интерференции»

$$\frac{\partial S_E(x, t)}{\partial E} = 0 \tag{18}$$

(одно уравнение для двух величин $x$ и $t$; дополнительно об условии усиливающей интерференции и общий подход к методу Гамильтона — Якоби см. в дополнениях 25.3 и 25.4).

г. В соответствующем уравнении, описывающем динамику геометрии, рассматривается функция 3-геометрии $S = S\,({}^{(3)}\mathcal{G})$. Она зависит от самой 3-геометрии, а не от капризов выбора координат или соответствующих причуд в метрически коэффициентах 3-геометрии

$$ds^2 = {}^{(3)}g_{mn}dx^m dx^n \tag{19}$$

(символ ${}^{(3)}$, означающий 3-геометрию, далее для простоты опущен). Эта функция подчиняется уравнению Гамильтона — Якоби [аналог уравнения (16)]:

$$-(16\pi)^2 \frac{1}{2g}(g_{im}g_{jn} + g_{in}g_{jm} - g_{ij}g_{mn}) \frac{\delta S}{\delta g_{ij}} \frac{\delta S}{\delta g_{mn}} + {}^{(3)}R = 16\pi\rho. \tag{20}$$

д. Из этого уравнения для динамики геометрии в суперпространстве с помощью рассуждения, аналогичного тому, которое было использовано при переходе от (17) к (18), можно вывести [49] уравнение поля Эйнштейна.

е. Оказывается, что следует менять основы теории, если считать «уравнение Эйнштейна — Гамильтона — Якоби» (20) более основным, чем следующее из него уравнение поля Эйнштейна. (Так было сделано Хожманом, Кухаржом и Тайтельбомом, препринт, 1973 г.)

5. Геометродинамика Эйнштейна как стандартная теория поля спина 2 в «ненаблюдаемом плоском пространственно-временно́м» фоне.

а. Этот подход к уравнению поля Эйнштейна имеет долгую историю, ссылки на литературу можно найти в § 7.1 и 18.1. (Дальнейшее обсуждение подхода можно найти в этих двух параграфах, дополнениях 7.1 и 18.1 и упражнении 7.3.)

б. Следующее резюме цитируется по Дезеру [50]: «Мы хотели дать простой физический вывод нелинейности..., используя известный теперь аргумент ..., ведущий от линейного, безмассового поля спина 2 к полной системе уравнений Эйнштейна...»

в. «Уравнения Эйнштейна можно вывести негеометрическим путем, замечая, что уравнения свободного, безмассового поля спина 2

$$R^L{}_{\mu\nu}(\phi) - \frac{1}{2}R^L{}_{\alpha\alpha}(\phi)\,\eta_{\mu\nu} \equiv G^L{}_{\mu\nu}(\phi) \equiv [(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})\,\Box + \\ + \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta + \eta_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\alpha}\partial_\nu\partial_\beta - \eta_{\nu\beta}\partial_\mu\partial_\alpha]\,\phi_{\alpha\beta} = 0, \tag{21}$$

источником для которых служит тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ вещества, в действительности должны быть связаны с *полным* тензором энергии-импульса, включающим само поле $\phi$. Иначе говоря, уравнения (21) для свободного

поля в том виде, в котором они записаны, полностью совместны, а при учете динамической системы с источником $T_{\mu\nu}$ они уже не будут совместны. Дело в том, что левая часть этих уравнений, имеющая тождественно равную нулю дивергенцию, будет не совместима с правой частью, поскольку связь с полным тензором энергии-импульса подразумевает, что $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$, вычисленные из уравнений движения вещества, больше не сохраняются».

г. «Чтобы исправить это [нарушение принципа сохранения энергии-импульса], в правую часть (21) вписывается тензор напряжений ${}^{(2)}\theta_{\mu\nu}$, построенный с помощью квадратичного лагранжиана ${}^{(2)}L$, из которого выведено уравнение (21)».

д. «Но лагранжиан ${}^{(3)}L$, приводящий к этим модифицированным уравнениям, будет уже кубичным и сам будет вносить вклад в ${}^{(3)}\theta_{\mu\nu}$».

е. «Продолжая таким образом, приходим (при правильном суммировании!) к полной системе нелинейных уравнений Эйнштейна $G_{\mu\nu}$ ([вычисленные из] $\eta_{\alpha\beta}+\phi_{\alpha\beta}$)$=-\varkappa T_{\mu\nu}$ [$+8\pi T_{\mu\nu}$ в геометрических единицах и со знаком, принятым в этой книге], которые представляют собой бесконечный ряд по отклонениям $\phi_{\mu\nu}$ метрики $g_{\mu\nu}$ от метрики Минковского $\eta_{\mu\nu}$».

ж. «Если итерация начата (с $T_{\mu\nu}$ или в его отсутствие), она должна быть продолжена во всех порядках, поскольку закон сохранения справедлив только для полного ряда $\sum_{n=2}^{\infty}{}^{(n)}\theta_{\mu\nu}$. Поэтому теория остается либо в (физически неуместной) линейной форме (21) без источников, либо в виде бесконечного ряда».

з. Подробнее см. работу [50]; в ней 1) продолжает использоваться хорошо подобранный формализм, 2) перестраивается расчет и 3) «выводится полная система уравнений Эйнштейна на основе того же требования самодействия, но с тем преимуществом, что полная теория появляется в замкнутой форме при добавлении только одного (кубического) члена, а не бесконечного ряда».

и. В конце Дезер [50] резюмирует анализ таким образом: «Непротиворечивость, следовательно, приводит нас к универсальному взаимодействию, результатом которого является принцип эквивалентности. Именно в этом пункте появляется геометрическая интерпретация принципа эквивалентности, поскольку *вся материя* движется теперь в эффективном римановом пространстве с метрикой $g^{\mu\nu}\equiv\eta^{\mu\nu}+h^{\mu\nu}$. ...первоначальное плоское, «фоновое» пространство больше не наблюдаемо». Другими словами, этот подход к уравнению поля Эйнштейна можно определить как «кривизну без кривизны» или равнозначно, как «плоское пространство-время без плоского пространства-времени»!

6. Гравитация как упругость пространства — идея, выдвинутая А. Д. Сахаровым на основе физики элементарных частиц.

а. Способность однородного, изотропного твердого тела сопротивляться деформации описывается двумя постоянными упругости — модулем Юнга и коэффициентом Пуассона.

б. Упругость пространства по отношению к деформации описывается одной постоянной упругости — ньютоновской гравитационной постоянной. Она появляется в принципе действия Гильберта

$$I=\frac{1}{16\pi G}\int {}^{(4)}R\,(-g)^{1/2}\,d^4x+\int (L_{\text{вещества}}+L_{\text{полей}})\,(-g)^{1/2}\,d^4x=\text{экстремум}. \quad (22)$$

в. Согласно историческим сведениям, количество упругих постоянных, необходимых для описания твердого тела, было впервые получено не из макроскопических рассмотрений симметрии и инвариантности, а из микроскопических молекулярных моделей вещества (Ньютон, Лаплас, Навье, Коши, Пуассон, Фогт, Кельвин, Борн). Поэтому, подсчитывая энергию, запасенную в межмолекулярных связях, естественная длина или естественный угол которых (или и то и другое одновременно) деформированы, придем к выражению для энергии деформации на единицу объема упругого материала, имеющему вид

$$e = A\ (\mathrm{Sp}\ \mathbf{s})^2 + B\ \mathrm{Sp}\ (\mathbf{s}^2). \tag{23}$$

Здесь тензор натяжений

$$s_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x^n} + \frac{\partial \xi_n}{\partial x^m}\right) \tag{24}$$

измеряет натяжения, возникающие в упругой среде при перемещении типичной точки из положения $x^m$ в положение $x^m + \xi^m(x)$. Постоянные $A$ и $B$ задают значения двух упругих постоянных макроскопической теории упругости и выводятся из микроскопической физики.

г. Сахаров [51] предложил аналогичное микроскопическое обоснование тяготения, или, как он назвал его, «метрической упругости пространства». Он отождествил первый член в действии (22), дающий эйнштейновскую геометродинамику, «с изменением действия для квантовых флуктуаций вакуума (связанным с физикой элементарных частиц и полей), возникающим при переходе к искривленному пространству».

д. Сахаров отмечает, что современная квантовая теория поля «избавляется» от формально бесконечной плотности энергии вакуума «с помощью процедуры перенормировки». Так, при стандартном анализе степеней свободы электромагнитного поля в плоском пространстве подсчитывается число мод колебаний на единицу объема в интервале волновых чисел от $k$ до $k + dk$ как $(2 \cdot 4\pi/8\pi^3)\, k^2 dk$. Каждая мода колебания даже при абсолютном нуле температуры обладает абсолютной неуменьшаемой минимальной «энергией нулевого колебания» $\frac{1}{2} h\nu = \frac{1}{2} \hbar ck$ (связанное с ней флуктуирующее электрическое поле проявляется в одном из наиболее непоколебимых физических эффектов. Оно совместно с электрическим полем, создаваемым протоном, действует на электрон в атоме водорода, вызывая бо́льшую часть знаменитого сдвига Лэмба — Резерфорда энергетических уровней атома водорода, как это особенно ясно объяснили Велтон [52] и Дайсон [53]). Полная плотность энергии нулевых колебаний электромагнитного поля на единицу пространства-времени (измеренная в см$^4$) формально расходится как

$$(\hbar/2\pi^2) \int_0^\infty k^3\, dk. \tag{25}$$

Также формально эта расходимость «устраняется» с помощью «перенормировки» (дополнительно о перенормировке см., например, [54]).

е. Аналогичные расходимости появляются и при формальном расчете энергии, связанной с другими полями и вакуумными флуктуациями в числе пар элек-

тронов, μ-мезонов и других частиц, в пределе, когда квантовые энергии так велики по сравнению с массой покоя любой из этих частиц. И опять эти расходимости «устраняются» в формальных расчетах с помощью «перенормировки».

ж. С помощью перенормировки устраняется не только вклад в плотность энергии, а потому и в тензор энергии-импульса, но и вклад в полную функцию Лагранжа $\mathscr{L}$, входящую в выражение для вариационного принципа для всех этих полей и частиц

$$I = \int \mathscr{L} d^4x = \text{экстремум}. \tag{26}$$

з. Сахаров [51], обобщив аргументацию Я. Б. Зельдовича [45], указал, что искривление пространства изменяет все эти энергии. Поэтому процесс «перенормировки» или «вычитания» больше не дает нуля. Вместо этого вклад энергии нулевых колебаний представляется в виде ряда по степеням кривизны с численными коэффициентами $A, B, \ldots$ порядка единицы и в форме, упрощенной в работе [55], и записывается следующим образом:

$$\mathscr{L}(R) = A\hbar \int k^3\, dk + B\hbar^{(4)}R \int k\, dk + \\ + \hbar\,[C\,({}^{(4)}R)^2 + DR^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}] \int k^{-1} dk + (\text{члены высшего порядка}). \tag{27}$$

(Об изменении числа стоячих волн на единицу частоты в искривленном многообразии см. также работы [51, 56—59].) [1])

и. Первый член в (27) в соответствии с теорией перенормировок следует опустить. Второй член, как отмечается в работе [51], совпадает по форме с лагранжианом в принципе действия Гильберта [см. выше равенство (3)], за исключением того, что постоянная, которая умножается на скалярный инвариант римановой кривизны, там равна $-c^3/16\pi G$ (в обычных единицах), в то время как здесь она равна $B\hbar \int k dk$ (в тех же единицах). Члены высшего порядка в (27) приводят, как говорится в работе [51], к «поправкам ... к уравнениям Эйнштейна».

к. Не учитывая этих поправок и требуя выполнения равенства

$$G = \begin{pmatrix}\text{ньютоновская} \\ \text{гравитационная постоянная}\end{pmatrix} = \frac{c^3}{16\pi B\hbar \int k\, dk}, \tag{28}$$

очевидно, получаем принцип действия эйнштейновской теории. Так как $B$ — безразмерный численный коэффициент порядка единицы, то отсюда следует, как утверждается в работе [51], что эффективный верхний предел или «фактор обрезания» в формально расходящемся интеграле (28) следует взять равным по порядку величины обратной планковской длине [см. (7)]:

$$k_{\text{обрезания}} \sim (c^3/\hbar G)^{1/2} = 1/L^* = 1/1{,}6 \cdot 10^{-33} \text{ см}. \tag{29}$$

В сущности, Сахаров утверждает, 1) что физика поля пока не знает, что делается на длинах волн, меньших планковской длины, и при квантовых энергиях порядка $\hbar c k_{\text{обрезания}} \sim 10^{28}$ эВ или $10^{-5}$ г и более, 2)

[1]) В работе [57] упоминается о неопубликованной работе Хилла.

что вследствие этого интеграл $\int kdk$ обрезается и 3) что величина этого обрезания, получаемая целиком из физики частиц и полей, определяет величину ньютоновской гравитационной постоянной $G$.

л. В этом смысле анализ Сахарова означает, что тяготение имеет такое же отношение к физике элементарных частиц, как упругость к химической физике: это просто статистическая мера остаточных энергий. В одном случае молекулярные связи зависят от отклонений характерных длин связи молекула — молекула от стандартных значений. В другом случае искривления геометрии влияют на энергии частиц.

м. Упругость, имеющая простой вид, находит свое объяснение в молекулярных связях, которые сложны. Молекулярные связи получают объяснение на языке уравнения Шредингера и кулоновского закона о силе, действующей между заряженными точечными массами, а они даже проще, чем упругость.

н. Геометродинамика Эйнштейна, которая выглядит простой, интерпретирована Сахаровым как поправочный член к физике элементарных частиц, имеющей сложный вид. Не будет ли физика элементарных частиц, которая сложна, в назначенный ей день разгадана как нечто простое — нечто более глубокое и простое, чем геометрия («догеометрия» гл. 44)?

## § 17.6. ОТСУТСТВИЕ АПРИОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ — ХАРАКТЕРНАЯ ЧЕРТА, ОТЛИЧАЮЩАЯ ТЕОРИЮ ЭЙНШТЕЙНА ОТ ДРУГИХ ТЕОРИЙ ТЯГОТЕНИЯ

**Сравнение теории Эйнштейна с другими теориями тяготения**

Несмотря на исключительную красоту и неотразимость теории тяготения Эйнштейна, можно легко построить менее удивительные и менее элегантные альтернативные теории. Физическая литература изобилует примерами таких теорий (см., например, обзоры [60, 61]). Эйнштейновская теория решительно и ясно отличается от конкурирующих с ней теорий тем, что согласуется с экспериментом, в то время как большинство альтернативных теорий противоречит опыту (гл. 38—40). В отличие от конкурирующих теорий, она полностью описывает тяготение на языке геометрии и не нуждается в какой-либо «априорной геометрии».

**Все другие теории тяготения вводят дополнительные гравитационные поля или априорную геометрию**

Откладывая вопрос о согласовании с экспериментом до гл. 38, можно все-таки сказать, что теория Эйнштейна остается единственной в своем роде. Каждая альтернативная теория вводит или дополнительные гравитационные поля (например, скалярное поле Бранса и Дике [62]), или «априорную геометрию», или и то и другое. Поэтому каждая другая теория идейно более сложна, чем теория Эйнштейна, и содержит элементы, не имеющие экспериментальных оснований.

Понятие «априорной геометрии» в неменьшей степени требует разъяснения и потому, что отказ от априорной геометрии сыграл ключевую роль в соображениях, первоначально приведших Эйнштейна к геометродинамическому уравнению $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$. *Под*

Определение «априорной геометрии»

*«априорной геометрией» понимается любого вида геометрия пространства-времени, которая считается фиксированной, т. е. не может быть изменена путем изменения распределения источников гравитационного поля.* Таким образом, априорная геометрия не порождается и не изменяется материей, она не динамична. *Пример*: Нордстрем [63] сформулировал теорию, в которой физическая метрика пространства-времени $\mathbf{g}$ (метрика, которая входит в принцип эквивалентности) порождается плоской «фоновой» пространственно-временно́й метрикой $\boldsymbol{\eta}$ и скалярным гравитационным полем $\phi$

Теория Нордстрема как иллюстрация априорной геометрии

$$\eta^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha\beta} = -4\pi\phi\eta^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} \quad \begin{pmatrix}\text{порождение } \phi \\ \text{энергией-импульсом}\end{pmatrix}, \tag{17.23а}$$

$$g_{\alpha\beta} = \phi^2\eta_{\alpha\beta} \quad \begin{pmatrix}\text{построение } \mathbf{g} \\ \text{из } \phi \text{ и } \boldsymbol{\eta}\end{pmatrix}. \tag{17.23б}$$

В этой теории физическая метрика $\mathbf{g}$ (определяющая поведение стержней и часов и движение пробных частиц) имеет лишь одну степень свободы (по $\phi$). В остальном $\mathbf{g}$ фиксируется метрикой $\boldsymbol{\eta}$ плоского пространства-времени («априорная геометрия»). Нельзя устранить априорную геометрию, переписав уравнение Нордстрема (17.23) виде

$$\underset{\substack{\text{скаляр кривизны,}\\ \text{построенный из } \mathbf{g}}}{R} = 24\pi \underbrace{T}_{g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}}, \qquad \underbrace{C^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}}_{\substack{\text{тензор Вейля,}\\ \text{построенный из } \mathbf{g}}} = 0; \tag{17.24}$$

здесь отсутствуют $\mathbf{g}$ и $\phi$ [см. [64]; упражнение (17.8)]. Масса может влиять только на одну степень свободы геометрии пространства-времени. Остальные степени свободы фиксируются *априорно* — они представляют собой *априорную геометрию*. И эту априорную геометрию можно (в принципе) полностью обнаружить с помощью физических экспериментов, не связанных с какими-либо уравнениями (дополнение 17.3).

«Отсутствие априорной геометрии» как часть эйнштейновского принципа «общей ковариантности»

Математика 1917 г. была недостаточно совершенна, чтобы отделить требование «отсутствия априорной геометрии» от требования «геометрической формулировки физики, не зависящей от системы координат». Эйнштейн выразил оба требования одной фразой: «общая ковариантность». То есть требование «отсутствия априорной геометрии» было в действительности порождено общей теорией относительности, но сделано это было так анонимно, замаскированно под «общую ковариантность», что вызвало полувековую путаницу (см., например, [65]).

Систематическое изложение отличия между априорной геометрией («абсолютные объекты») и динамическими полями («динамические объекты») проведено в учебнике по теории относительности Андерсона [4].

### 17.8. Уравнение Эйнштейна — Фоккера сводится к уравнению Нордстрема

УПРАЖНЕНИЕ

Равенство нулю тензора Вейля [уравнение (13.50)] для пространственно-временно́й метрики $\mathbf{g}$ гарантирует, что метрика является конформно плоской, т. е. существует такое скалярное поле $\phi$, что $\mathbf{g} = \phi^2\boldsymbol{\eta}$, где $\boldsymbol{\eta}$ — метрика плоского пространства-времени. (Доказательство см., например, в [27].) Поэтому уравнение Эйнштейна —Фоккера (17.24) $C^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = 0$ эквивалентно уравнению Нордстрема (17.23б). С учетом этого покажите, что уравнение поля Эйнштейна — Фоккера $R = 24\pi T$ сводится к уравнению поля Нордстрема (17.23а).

---

### Дополнение 17.3. ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ОБНАРУЖЕНИЮ ИЛИ ИСКЛЮЧЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ АПРИОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ[1]

Выберем мгновенно статическую Вселенную, населенную с большим запасом подходящими пульсарами. Пульсары должны абсолютно регулярно, периодически испускать характерные импульсы гравитационных и электромагнитных волн.

Две флотилии космических кораблей с приемниками на борту посылаются «на место» для сбора экспериментальных данных. Флотилия адмирала Вебера имеет гравитационные приемники, флотилия адмирала Герца — электромагнитные. Капитан каждого космического корабля удерживает свой корабль «на месте», наблюдая за тремя надлежащим образом выбранными пульсарами (с одинаковой частотой) и маневрируя так, чтобы импульсы, приходящие от этих пульсаров, совпадали. Собираемые им экспериментальные данные состоят из импульсов, полученных от всех пульсаров, не используемых для удержания космического корабля на месте, причем каждый импульс регистрируется как совпадающий или смещенный относительно опорных (стационарных) импульсов. [Для удобства демонстрации картина, создаваемая любым отдельным пульсаром, может быть преобразована в акустическую форму. Опорные импульсы можно акустически проигрывать с определенной скоростью (с помощью компьютера обработки данных) на одном барабане, а импульсы, принимаемые от других пульсаров, — на втором барабане. В результате получится картина ритмических биений.]

Когда данная флотилия арретирована и настроена, каждый капитан докладывает стационарные картины. Теперь начинается эксперимент. Одна или несколько массивных звезд движется через флотилию. Флотилия, чтобы удержаться на месте, оказывает им сопротивление и докладывает об изменениях, произошедших в картинах данных.На космических кораблях,расположенных у границ флотилии, убеждаются в отсутствие обнаруживаемых изменений, поэтому можно считать, что новоявленные звезды не влияют на излучение, принимаемое от удаленных пульсаров. Однако от кораблей, расположенных вблизи подвижных звезд, поступают интересные данные.

---

[1]) Основано на дискуссии между Альфредом Шилдом и Чарльзом Мизнером в декабре 1970 г.

Каковы же результаты?

Во Вселенной, описываемой законами специальной теории относительности (пространство-время всегда плоское),ни одна из картин не изменяется. (Флотилия Вебера была не в состоянии удержаться на первом месте, поскольку гравитационные волны от пульсаров не были зарегистрированы.) Ни звезды, ни что-нибудь другое не могут создать гравитационные поля. Геометрия пространства-времени во всех аспектах фиксирована *априори* (полностью априорная геометрия!). Нет тяготения, нет отклонения света, которое позволило бы капитанам флотилии Герца выверить свои положения.

Во Вселенной, описываемой теорией тяготения Нордстрема (см. текст), обе флотилии контролируются, т.е. обе принимают волны. Но ни одна из флотилий не видит каких-либо изменений в ритмической картине биений. Движущиеся вокруг звезды не оказывают влияния ни на гравитационные, ни на электромагнитные волны. Присутствующая в теории априорная геометрия ($\eta$) предотвращает любое отклонение света или гравитационной волны.

Во Вселенной, свойства которой определяются теорией тяготения Уайтхэда [66] (см. [67] и цитируемые там ссылки), радиоволны распространяются по геодезическим «физической метрики» $\mathbf{g}$ и отклоняются гравитационными полями звезд. Однако гравитационные волны распространяются по геодезическим *плоской* фоновой метрики $\eta$ и поэтому не испытывают воздействия звезд. Следовательно, капитаны флотилии Герца, чтобы удержаться на месте, должны маневрировать, и они слышат изменение картины биений между опорными и другими импульсами. А флотилия Вебера остается на месте и не регистрирует изменений в картине биений. Априорная геометрия ($\eta$) ясно проявляется в экспериментальном результате.

Во Вселенной, описываемой теорией Эйнштейна, обе флотилии наблюдают изменения (никакого намека на априорную геометрию, поскольку теория Эйнштейна не содержит никакой априорной геометрии). Более того, если первоначально флотилии были спарены, т. е. в каждом месте находился один корабль Вебера и один корабль Герца, они останутся спаренными. Высокочастотные световые волны и высокочастотные гравитационные волны распространяются одинаковым образом по геодезическим метрики $\mathbf{g}$.

## § 17.7. ФРАГМЕНТ ИСТОРИИ СОЗДАНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Ничто не показывает лучше саму идею и ее значение сегодня, чем те баталии и изменения, которым она подверглась на пути к современной форме. Полная история создания общей теории относительности требует отдельной книги. Приводимый ниже ряд ключевых цитат из нескольких крупных статей — лишь небольшой фрагмент того, что может содержать настоящая история.

> Эйнштейн, 1908 г. [68]: «Мы ... будем в последующем предполагать полную физическую эквивалентность гравитационного поля и соответствующего ускорения системы отсчета... часы для наблюдателя, находящегося в какой-либо точке пространства $P$, идут в $(1 + \Phi/c^2)$ раз быстрее часов, помещенных в начале координат ... из этого следует,

что световые лучи искривляются гравитационным полем... количество энергии $E$ имеет массу $E/c^2$».

Эйнштейн и Гроссман, 1913 г. [69]: «Описываемая теория вытекает из уверенности, что пропорциональность между инертной и тяжелой массами тела является точным законом природы, который можно считать фундаментальным принципом теоретической физики... Наблюдатель, находящийся в лифте, не способен ответить на вопрос, покоится ли лифт в статическом гравитационном поле или совершает под влиянием действующих на него сил ускоренное движение в пространстве, в котором отсутствует гравитационное поле (гипотеза эквивалентности)... При распаде радия, например, это уменьшение (массы) составляет 1/10 000 полной массы. Если такие изменения инертной массы не сопровождаются соответствующими изменениями тяжелой массы, то возникающая разность масс будет приводить к отклонениям, превышающим отклонения, допускаемые опытом Этвеша. Поэтому равенство инертной и тяжелой масс следует с большой вероятностью рассматривать как тождество».

«Искомое обобщение будет, несомненно, иметь вид

$$\Gamma_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu},$$

где $\varkappa$ — постоянная, а $\Gamma_{\mu\nu}$ — контравариантный тензор второго ранга, который составляется из фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$ с помощью дифференциальных операций... оказывается невозможно найти дифференциальное выражение для $\Gamma_{\mu\nu}$, которое обобщает (пуассоновское) $\nabla\phi$ и является тензором по отношению к произвольным преобразованиям... Наиболее естественным кажется требование ковариантности системы уравнений относительно произвольных преобразований. Однако оно находится в противоречии с полученным результатом, что уравнения гравитационного поля не обладают этим свойством».

Эйнштейн и Гроссман, 1914 г. [70]: «В трактовке 1913 г. ... мы не смогли показать общековариантность гравитационных уравнений». (Источник их трудностей заключался в том, что часть двухиндексного тензора кривизны была записана в левой стороне уравнения поля второго порядка, а другая часть этого тензора была перенесена в правую сторону уравнения к $T_{\mu\nu}$ и была названа гравитационным тензором энергии-импульса. Затем требовалось, чтобы левая и правая стороны уравнения преобразовывались как тензоры при общих преобразованиях координат, чему, разумеется, нельзя было удовлетворить.)

Эйнштейн, 1915 г. [71]: «В последние годы я пытался построить общую теорию относительности на основе допущения относительности даже неоднородных движений. Я действи-

тельно полагаю, что нашел единственный закон тяготения, который соответствует разумно сформулированному постулату общей относительности. В статье, которая появилась в прошлом году в этих трудах, я пытался установить необходимость именно такого решения».

«Обновленный анализ показал мне, что в принятом там подходе необходимость абсолютно не показана, а представленный там результат был основан на ошибке».

«По этой причине я потерял веру в установленные мною уравнения поля и искал подход, который бы естественным образом ограничивал возможности. На этом пути я вернулся к требованию общековариантности уравнений поля, от которого я с тяжелым сердцем отказался три года назад, работая с моим другом Гроссманом. Фактически уже в это время мы очень близко подошли к тому решению проблемы, которое дано ниже».

«В соответствии со сказанным естественно постулировать уравнения поля тяготения в виде

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu},$$

поскольку мы уже знаем, что эти уравнения ковариантны по отношению к произвольным преобразованиям с детерминантом, равным единице. На самом деле эти уравнения удовлетворяют всем тем условиям, которые мы на них налагаем...» (Здесь $R_{\mu\nu}$ — часть тензора Риччи, которую Эйнштейн считал ковариантной.)

«Уравнение (22а) дает в первом приближении

$$\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0.$$

Этим уравнением еще не определяется система ковариант поскольку для такого определения необходимы четыре уравнения». (Сессия от 4 ноября 1915 г.; опубликовано 11 ноября.)

Эйнштейн, 1915г. [72]: «В недавно опубликованной работе я показал, как на основе ковариантной римановой теории многомерных многообразий можно построить теорию тяготения. Здесь будет показано, что путем введения достаточно смелой дополнительной гипотезы, касающейся структуры материи, можно достичь еще более компактной логической структуры теории... очень возможно, что в вопросе, к которому относится данное выражение, гравитационные поля играют существенную роль. Тогда может оказаться, что $T^\mu{}_\mu$ будет положителен для всей структуры, хотя в действительности положителен только $T^\mu{}_\mu + t^\mu{}_\mu$, а $T^\mu{}_\mu$ везде исчезает. Мы предположим в последующем, что условие $T^\mu{}_\mu = 0$, в действительности, выполнено всегда».

«В последующем точка зрения, отвергающая с самого начала гипотезу, согласно которой мелкомасштабные (молекулярные) гравитационные поля составляют существенную часть материи, получает сильную поддержку».

«Наша гипотеза дает возможность... сформулировать уравнения поля тяготения в общековариантной форме

$$G_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu},$$

где $G_{\mu\nu}$ — тензор Риччи». (Сессия от 11 ноября 1915 г.; опубликовано 18 ноября.)

Эйнштейн, 1915 г. [73]: «Я показал, что нет принципиальных возражений против этой гипотезы (уравнений поля), согласно которой пространство и время лишаются последнего следа объективной реальности. В настоящей работе я нашел важное подтверждение этой наиболее радикальной теории относительности. Оказывается, что без привлечения каких бы то ни было дополнительных гипотез она объясняет качественно и количественно вековую прецессию орбиты Меркурия в направлении орбитального движения, открытую Леверье и составляющую 45″ в столетие».

Эйнштейн, 1915 г. [74] (сессия от 25 ноября 1915 г.; опубликовано 2 декабря): «Недавно я обнаружил, что можно обойтись без гипотезы о тензоре энергии-импульса материи, если ввести этот тензор несколько иным способом, чем это делалось в двух моих более ранних сообщениях. Это изменение не влияет на уравнения движения перигелия Меркурия...»

«Положим

$$G_{im} = -\varkappa\left(T_{im} - \frac{1}{2}\, g_{im} T\right),$$

[где $G_{im}$ — тензор Риччи]...

... эти уравнения в отличие от уравнений (9) не содержат новые условия, поэтому не надо делать иных предположений относительно тензора энергии-импульса, кроме того, чтобы он подчинялся законам сохранения энергии-импульса».

«После этого шага общая теория относительности как логическая структура окончательно завершена. Постулат относительности, который в своей наиболее общей формулировке превращает пространственно-временны́е координаты в физически бессмысленные параметры, непреодолимо ведет к полностью детерминированной теории тяготения, объясняющей движение перигелия Меркурия. С другой стороны, постулат общей относительности не способен что-либо сказать о характере тех процессов природы, которые еще не изучены специальной теорией относительности. Мнение по этому вопросу, которое я недавно выразил в этих трудах, было ошибочным. Каждую физическую

теорию, совместимую со специальной теорией относительности, можно ввести в общую теорию относительности с помощью дифференциального исчисления без всякого абсолютного (общерелятивистского) критерия допустимости этой теории».

Гильберт, 1915 г. [47]: «Аксиома I (обозначения изменены в соответствии с обозначениями, используемыми здесь). Закономерность физических событий определяется мировой функцией (называемой сегодня по терминологии Ми «лагранжианом») $L$, которая зависит от следующих аргументов:

$$g_{\mu\nu}, \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}, \quad \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}\,\partial x^{\beta}},$$

$$A_{\sigma}, \quad \frac{\partial A_{\sigma}}{\partial x^{\tau}},$$

и характерно, что вариация интеграла

$$\int L\,(-g)^{1/2}\,d^4x$$

должна исчезать для (изменения) каждого из 14 потенциалов $g_{\sigma\nu}$, $A_{\sigma}$...».

«Аксиома II (аксиома общей инвариантности). Мировая функция $L$ инвариантна по отношению к произвольным преобразованиям мировых параметров (координат) $x^{\alpha}$...».

«Чтобы сделать выбор мировой функции $L$ однозначным, необходимы еще аксиомы. Если уравнения тяготения должны содержать только вторые производные потенциалов $g^{\sigma\nu}$, то $L$ должна иметь вид

$$L = R + L_{\text{электр}},$$

где $R$ — инвариант тензора Римана (кривизны четырехмерного многообразия)». (Сессия от 20 ноября 1915 г.)

Эйнштейн, 1916 г. [75]: «Недавно Лоренцу и Гильберту удалось представить общую теорию относительности в особенно прозрачной форме путем вывода ее уравнений из вариационного принципа. Это будет проделано также в последующем изложении. Моя цель заключается в том, чтобы представить основные соотношения в настолько ясной и общей форме, насколько это допускается общей теорией относительности».

Эйнштейн, 1916 г. [76]: «Из этого прежде всего следует, что гравитационное поле распространяется со скоростью света... (плоские) волны переносят энергию... Таким образом... в единицу времени система излучает...

$$\frac{G}{24\pi}\sum_{\alpha,\,\beta}\left(\frac{\partial^3 J_{\alpha\beta}}{\partial t^3}\right)^2$$».

Гильберт, 1917 г. [77]: «Что касается принципа причинности, то физические величины и скорости их изменения со временем могут быть известны в определенный момент в любой заданной системе координат; предсказание будет иметь физический смысл только тогда, когда оно инвариантно по отношению ко всем преобразованиям, для которых именно используемые в этот момент времени координаты остаются неизменными. Я заявляю, что все предсказания такого рода однозначно определены, т. е. что принцип причинности в такой формулировке справедлив».

«Зная 14 физических потенциалов $g_{\mu\nu}$, $A_\sigma$ в данный момент, мы можем с необходимостью и однозначно предсказать будущее этих величин в той степени, в которой они имеют физический смысл».

# 18. СЛАБЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ

*Путь, по которому можно пройти,— не идеальный путь,*
*Слово, которое можно сказать,— не идеальное слово.*

ЛАО-ЦЗЫ, ~3 век до нашей эры[1])

## § 18.1. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ

«Линеаризованная теория тяготения»:

1) как предельный случай слабого поля тяготения

Вследствие геометрического языка и сокращенной записи уравнения поля Эйнштейна $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ совсем не похожи на дифференциальные уравнения со многими хорошо известными свойствами. Лучший способ увидеть, что они собой представляют, — перейти к пределу слабого поля

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{18.1}$$

например для случая Солнечной системы, где $|h_{\mu\nu}| \sim |\Phi| \leqslant M_\odot/R_\odot \sim 10^{-6}$, или для слабой гравитационной волны, распространяющейся в межзвездном пространстве.

В приближении слабого поля, используя систему координат, в которой справедливо (18.1), можно разложить уравнения поля по степеням $h_{\mu\nu}$ и без большой потери точности удерживать только линейные члены. Получающийся формализм представляет собой важную теорию, имеющую право на самостоятельное существование, и часто называется *«линеаризованная теория тяготения»*. Фактически это как раз та теория, которая получается для классического поля, соответствующего квантовомеханическим частицам, имеющим 1) нулевую массу покоя и 2) спин 2 и находящимся 3) в плоском пространстве-времени (см. Фирц и Паули [78]).

2) как стандартное «теоретико-полевое» описание тяготения в «плоском пространстве-времени»

[1]) Из поэмы [104]. Она переведена на английский язык под названием «The Way of Life», New American Library, 1955. Перевод просмотрен Жанет Тен Броек (Janet Ten Broeck).

Читатели Курса 2 уже частично рассматривали линеаризованную теорию в § 7.1, упражнении 7.3 и дополнении 7.1, где она фигурировала под альтернативным названием «тензорная теория гравитационного поля в плоском пространстве-времени». Как можно «спуститься» от общей теории относительности к линеаризованной теории путем линеаризации вблизи плоского пространства-времени (см. ниже), так можно и подняться от линеаризованной теории к общей теории относительности путем своеобразного «бутстрапа», налагая условия совместимости линеаризованных уравнений поля и уравнений движения, или, эквивалентно, требуя, чтобы 1) линеаризованное гравитационное поле $h_{\mu\nu}$ давало тензор энергии импульса, 2) этот тензор энергии-импульса служил бы источником для поправок $h^{(1)}{}_{\mu\nu}$ к гравитационному полю, 3) поправки $h^{(1)}{}_{\mu\nu}$ давали бы тензор энергии-импульса, 4) тензор энергии-импульса служил бы источником для поправок $h^{(2)}{}_{\mu\nu}$ к поправкам $h^{(1)}{}_{\mu\nu}$, 5) эти поправки снова давали бы тензор энергии-импульса и т. д. Альтернативный метод вывода общей теории относительности был развит и исследован в работах Гупты [79—81], Крейчнана [82], Тирринга [83], Фейнмана [84] [1]), Вейнберга [85] и Дезера [50]. Но поскольку он по виду далек от геометрического (см. дополнение 18.1), мы не будем останавливаться здесь на деталях этого вывода. (См., однако, п. 5 дополнения 17.2.)

3) как основание для «вывода» общей теории относительности

Сконцентрируем здесь внимание на выводе линеаризованной теории из общей теории относительности. Возьмем метрические коэффициенты в форме (18.1). Получающиеся отсюда коэффициенты связности [уравнение (8.24б)], линеаризованные по возмущению метрики $h_{\mu\nu}$, имеют вид

Детали линеаризованной теории:

1) коэффициенты связности

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\alpha\nu,\,\beta} + h_{\beta\nu,\,\alpha} - h_{\alpha\beta,\,\nu}) \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{2}(h_{\alpha}{}^{\mu}{}_{,\beta} + h_{\beta}{}^{\mu}{}_{,\alpha} - h_{\alpha\beta}{}^{,\mu}). \qquad (18.2)$$

Во втором равенстве использовано условие, обычно вводимое при разложении по степеням $h_{\mu\nu}$: индексы $h_{\mu\nu}$ поднимаются и опускаются с помощью $\eta^{\mu\nu}$ и $\eta_{\mu\nu}$, *а не* $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$. Аналогичная линеаризация тензора Риччи [уравнение (8.47)] дает

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\,\nu} =$$
$$= \frac{1}{2}(h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu}), \qquad (18.3)$$

где

$$h \equiv h^{\alpha}{}_{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}. \qquad (18.4)$$

Выполняя свертку $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, находим уравнения поля Эйнштейна $2G_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}$, которые можно записать в виде

$$h_{\mu\alpha,\,\nu}{}^{\alpha} + h_{\nu\alpha,\,\mu}{}^{\alpha} - h_{\mu\nu,\,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{\beta}) = 16\pi T_{\mu\nu}. \qquad (18.5)$$

[1]) Лекционные записи были подготовлены Мориниго и Вагнером.

Число членов при переходе от $R_{\mu\nu}$, выражение (18.3), к $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, уравнение (18.5), возросло, но эту неприятность можно устранить, вводя

2) «гравитационные потенциалы» $\bar{h}_{\mu\nu}$

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \tag{18.6}$$

и используя далее черту для обозначения соответствующей операции с любым другим симметричным тензором. Поэтому в первом порядке по $h_{\mu\nu}$ имеем $G_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu}$ и $\bar{\bar{h}}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, т. е. $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}$. В этих обозначениях *линеаризованные уравнения поля принимают вид*

3) линеаризованные уравнения поля

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\ \alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta,}{}^{\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{\alpha}{}_{,\nu} + \bar{h}_{\nu\alpha}{}^{\alpha}{}_{,\mu} = 16\pi T_{\mu\nu}. \tag{18.7}$$

Первый член этих линеаризованных уравнений представляет собой обычный даламбертиан в плоском пространстве-времени, а остальные члены служат только для сохранения «калибровочной инвариантности» уравнений (см. дополнение 18.2). В дополнении 18.2 показано, что, не теряя общности, можно наложить «калибровочные условия»

4) калибровочные условия

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0. \tag{18.8а}$$

Эти калибровочные условия являются тензорным аналогом лоренцевой калибровки $A^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ электромагнитной теории. Уравнения поля (18.7) в таком случае принимают вид

5) уравнения поля и метрика в лоренцевой калибровке

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\ \alpha}{}^{\alpha} = 16\pi T_{\mu\nu}. \tag{18.8б}$$

*Калибровочные условия* (18.8*а*), *уравнения поля* (18.8*б*) *и определение метрики*

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} \tag{18.8в}$$

*представляют собой основные уравнения линеаризованной теории тяготения в лоренцевой калибровке.*

---

УПРАЖНЕНИЯ

**18.1. Калибровочная инвариантность римановой кривизны**

Покажите, что в линеаризованной теории компоненты тензора Римана равны

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\ \mu\beta} + h_{\mu\beta,\ \nu\alpha} - h_{\mu\nu,\ \alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\ \mu\nu}). \tag{18.9}$$

Затем покажите, что эти компоненты не изменяются при калибровочных преобразованиях вида, рассмотренного в дополнении 18.2 [уравнение (4б)]. Поскольку тензор Эйнштейна есть свертка тензора Римана, то это доказывает, что он также калибровочно инвариантен.

### 18.2. Оправдание лоренцевой калибровки

Пусть в произвольной калибровке задано частное решение уравнений поля линеаризованной теории (18.7). Покажите, что всегда существуют четыре генерирующие функции $\xi_\mu(t, x^j)$, калибровочное преобразование с которыми [см. дополнение 18.2, уравнение (4б)] дает

$$\bar{h}^{\text{нов}\,\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \quad \text{(лоренцева калибровка).}$$

Покажите также, что последующее калибровочное преобразование не изменяет лоренцевой калибровки тогда и только тогда, когда генерирующие функции удовлетворяют волновому уравнению без источника

$$\xi^{\alpha,}{}_{\beta} = 0.$$

### 18.3. Внешнее поле статического, сферического тела

Рассмотрите внешнее гравитационное поле статического, сферического тела, описываемое в (почти) лоренцевой системе координат, связанной с телом, т. е. в почти прямоугольной системе координат $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, в которой для всех $t$ тело расположено в точке $x = y = z = 0$. Используйте лоренцеву калибровку.

а. Покажите, что из уравнений поля (18.8б) и калибровочных условий (18.8а) следует

$$\bar{h}_{00} = 4M/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}, \qquad \bar{h}_{0j} = \bar{h}_{jk} = 0,$$

$$h_{00} = h_{xx} = h_{yy} = h_{zz} = 2M/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}, \qquad h_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta,$$

где $M$ — постоянная (масса тела, см. § 19.3).

б. Выберите сферические полярные координаты

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta$$

и, считая $h_{\mu\nu}$ и $\bar{h}_{\mu\nu}$ компонентами тензоров в плоском пространстве-времени (см. конец дополнения 18.2) и используя обычные тензорные законы преобразования, приведите решение «а» к виду

$$\bar{h}_{00} = 4M/r, \qquad \bar{h}_{0j} = \bar{h}_{jk} = 0,$$

$$h_{00} = \frac{2M}{r}, \qquad h_{0j} = 0, \qquad h_{jk} = \frac{2M}{r}\, g_{jk_{\text{плоск}}},$$

где $g_{\alpha\beta_{\text{плоск}}}$ — компоненты метрики плоского пространства-времени в сферической системе координат

$$g_{00_{\text{плоск}}} = -1, \quad g_{rr_{\text{плоск}}} = 1, \quad g_{\theta\theta_{\text{плоск}}} = r^2,$$

$$g_{\phi\phi_{\text{плоск}}} = r^2\sin^2\theta, \qquad g_{\alpha\beta_{\text{плоск}}} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta.$$

Отсюда заключаем, что общерелятивистская метрика в линейном приближении имеет вид

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)\,dt^2 + (1 + 2M/r)\,(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2).$$

в. Выведите это общее статическое сферически-симметричное лоренц-калибровочное вакуумное решение линеаризованных уравнений поля с самого начала, работая полностью в сферических

**УПРАЖНЕНИЯ**

координатах. [*Указание.* Как обсуждается в конце дополнения 18.2, $\eta_{\mu\nu}$ в уравнении (18.8в) следует заменить на $g_{\mu\nu_{\text{плоск}}}$, а в уравнениях поля и калибровочных условиях (18.8а) и (18.8б) все запятые (частные производные) следует заменить на ковариантные производные, коэффициенты связности которых строятся из $g_{\mu\nu_{\text{плоск}}}$.]

г. Вычислите тензор римановой кривизны этого гравитационного поля. Ответ должен согласоваться с уравнением (1.14).

## Дополнение 18.1. ВЫВОДЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ С ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ И С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ ПОЛЯ СО СПИНОМ 2; СРАВНЕНИЕ И ПРОТИВОПОСТАВЛЕНИЕ

| | Эйнштейновский вывод | Вывод из теории поля со спином 2 |
|---|---|---|
| Природа первичной геометрии пространства-времени? | Геометрия не первична, она динамический участник физики | «Заданное Богом» плоское пространственно-временно́е многообразие [1] |
| Топология (многосвязность) пространства-времени? | Законы физики локальны, они не конкретизируют топологию | Односвязанная евклидова топология |
| Вид физики? | Динамическая геометрия — «задающее поле» физики | Динамика всех полей развивается в плоском пространственно-временно́м многообразии |
| Исходные пункты вывода общей теории относительности | 1. Принцип эквивалентности (мировые линии фотонов и пробных частиц являются геодезическими пространства-времени) | 1. Исходным являются поле спина 2 и масса покоя, равная нулю, пространства-времени |
| | 2. Тензорная сохраняющаяся величина, которая выводится из кривизны (момент вращения Картана), должна быть отождествлена с тензором энергии-импульса (см. гл. 15) | 2. Тензор энергии-импульса, построенный из этого поля, служит для него источником |
| Получающиеся уравнения | Уравнения поля Эйнштейна | Уравнения поля Эйнштейна |
| Результирующая оценка геометрии пространства-времени, с которой начинался вывод | Фундаментальный динамический участник физики | Нет. Первоначальная плоская геометрия не входит во все уравнения получающейся теории и становится не наблюдаемой |
| Мнение об одном величайшем кризисе физики, выявленном из этих уравнений: полный гравитационный коллапс | Занимает центральное место в понимании природы материи и эволюции Вселенной | Не существен или по крайней мере занимает второстепенное место |

[1] Здесь и в некоторых других местах авторы под словом «Бог» подразумевают Природу. Они следуют традиции выражений, используемых создателем общей теории относительности — Альбертом Эйнштейном. — *Прим. ред.*

## Дополнение 18.2. КАЛИБРОВОЧНЫЕ И КООРДИНАТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ТЕОРИИ

### А. Основные уравнения линеаризованной теории

Эти уравнения, записанные в любой системе координат, которая почти глобально лоренцева, имеют вид (18.1) и (18.7)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1; \tag{1}$$

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\ \alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\nu} + \bar{h}_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\mu} = 16\pi T_{\mu\nu}. \tag{2}$$

Почти глобально лоренцевы системы связаны друг с другом двумя различными типами преобразований координат: глобально лоренцевыми преобразованиями и бесконечно малыми координатными преобразованиями.

1. *Глобальные лоренцевы преобразования*:

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'} x^{\alpha'}, \qquad \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha'\beta'}. \tag{3а}$$

Они преобразуют метрические коэффициенты следующим образом:

$$\eta_{\alpha'\beta'} + h_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}} g_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = \eta_{\alpha'\beta'} + \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}h_{\mu\nu}.$$

Так, $h_{\mu\nu}$, а также $\bar{h}_{\mu\nu}$ преобразуются как компоненты тензора в плоском пространстве-времени

$$h_{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}h_{\mu\nu}. \tag{3б}$$

2. *Бесконечно малые координатные преобразования* (порождающие «рябь» в координатных системах):

$$x^{\mu'}(\mathcal{P}) = x^{\mu}(\mathcal{P}) + \xi^{\mu}(\mathcal{P}), \tag{4а}$$

$\xi^{\mu}(\mathcal{P})$ — четыре произвольные функции, достаточно малые, чтобы сохранить $|h_{\mu'\nu'}| \ll 1$. Бесконечно малые преобразования такого сорта вызывают крошечные изменения функциональной формы всех скалярных, векторных и тензорных полей. *Пример*: Температура $T$ — однозначная функция положения $T(\mathcal{P})$, поэтому если ее записать как функцию координат, то она изменяется следующим образом:

$$T(x^{\mu'} = a^{\mu}) = T(x^{\mu} + \xi^{\mu} = a^{\mu}) = T(x^{\mu} = a^{\mu} - \xi^{\mu}) = T(x^{\mu} = a^{\mu}) - T_{,\mu}\xi^{\mu},$$

т. е. если $\xi^0 = 0{,}001 \sin(x^1)$ и $T = \cos^2(x^0)$, то

$$T = \cos^2(x^{0'}) + 0{,}002 \sin(x^{1'}) \cos(x^{0'}) \sin(x^{0'}).$$

Этими крошечными изменениями можно пренебречь во всех величинах, кроме метрики, где любое малое отклонение от $\eta_{\mu\nu}$ содержит всю информацию о тяготении. Обычный тензорный закон преобразования метрики

$$g_{\rho'\sigma'}[x^{\alpha'}(\mathcal{P})] = g_{\mu\nu}[x^{\alpha}(\mathcal{P})]\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\rho'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\sigma'}},$$

скомбинированный с законом преобразования (4а) и с равенством

$$g_{\mu\nu}[x^{\iota}(\mathcal{P})] = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}[x^{\alpha}(\mathcal{P})],$$

показывает, что

$$g_{\rho'\sigma'}(x^{\alpha'}=a^{\alpha}) = \eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}(x^{\alpha}=a^{\alpha}) - \xi_{\rho,\,\sigma} - \xi_{\sigma,\,\rho} +$$

$+$ пренебрежимо малые поправки $\sim h_{\rho\sigma,\,\alpha}\xi^{\alpha}$ и $\sim h_{\rho\alpha}\xi^{\alpha}{}_{,\,\sigma}$.

Следовательно, *функции возмущения метрики в новых* $(x^{\mu'})$ *и старых* $(x^{\mu})$ *системах координат связаны между собой*:

$$h^{\text{нов}}_{\mu\nu} = h^{\text{стар}}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\,\nu} - \xi_{\nu,\,\mu}, \tag{4б}$$

*в то время как в пределах точности линеаризованной теории функциональные формы всех других скаляров, векторов и тензоров остаются неизменными.*

## Б. Калибровочные преобразования и калибровочная инвариантность

В линеаризованной теории уравнения (4б) обычно рассматриваются как калибровочные преобразования, аналогичные калибровочным преобразованиям электромагнитной теории:

$$A^{\text{нов}}_{\mu} = A^{\text{стар}}_{\mu} + \Psi_{,\,\mu}. \tag{5а}$$

Неизменность функциональных форм скаляров, векторов и тензоров (т. е. наблюдаемых) при калибровочных преобразованиях называется «калибровочной инвариантностью». Калибровочная инвариантность как электромагнитного поля

$$F^{\text{нов}}_{\mu\nu} = A^{\text{нов}}_{\nu,\,\mu} - A^{\text{нов}}_{\mu,\,\nu} = A^{\text{стар}}_{\nu,\,\mu} + \Psi_{,\,\nu\mu} - A^{\text{стар}}_{\mu,\,\nu} - \Psi_{,\,\mu\nu} = F^{\text{стар}}_{\mu\nu}, \tag{5б}$$

так и тензора Римана (упражнение 18.1)

$$R^{\text{нов}}_{\mu\nu\alpha\beta} = R^{\text{стар}}_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{6}$$

демонстрируется прямым расчетом. Калибровочная инвариантность тензора Римана уже была обеспечена тем, что $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ являются компонентами тензора, а потому по существу одинаковы, вычислены ли они в ортонормальной системе отсчета $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta_{\mu\nu}$ в старых координатах, где $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{\text{стар}}_{\mu\nu}$, или в новых координатах, где $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{\text{нов}}_{\mu\nu}$.

Как и тензор Римана, тензор Эйнштейна и тензор энергии-импульса не изменяются при калибровочных преобразованиях. Следовательно, *если известно частное решение* $\bar{h}_{\mu\nu}$ *линеаризованных уравнений поля* (2) *с данным* $T^{\mu\nu}$, *то можно путем изменения калибровки* (4) *с четырьмя произвольными малыми функциями* $\xi_{\mu}$ *получить другое решение, которое описывает точно ту же физическую ситуацию.*

## В. Лоренцева калибровка

Можно показать (упражнение 18.2), что для любой физической системы можно выбрать калибровку (т. е. координаты) таким образом, что $\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\,\alpha} = 0$. Это и есть калибровка Лоренца, введенная в § 18.1. Лоренцева калибровка определяется неоднозначно. Калибровочное условие $\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\,\alpha} = 0$ не изменяется при любом калибровочном преобразовании с

$$\xi^{\alpha}{}_{,\,\beta}{}^{,\,\beta} = 0.$$

(См. упражнение 18.2.)

### Г. Криволинейные системы координат

Если калибровка для данной системы (например, Солнечной системы) зафиксирована, то $h_{\mu\nu}$ и $\bar{h}_{\mu\nu}$ можно рассматривать как компоненты тензоров в плоском пространстве-времени, а уравнения поля (2) и выбранные калибровочные условия считать геометрическими уравнениями в плоском пространстве-времени, не зависящими от координат. Такая точка зрения позволяет при желании использовать криволинейные координаты (например, сферические координаты с началом на Солнце). Но при этом необходимо везде заменить лоренцевы компоненты метрики $\eta_{\mu\nu}$ метрическими компонентами $g_{\mu\nu_{\text{плоск}}}$ плоской пространственно-временной системы координат, а все обычные производные («запятые») в уравнениях поля и калибровочных условиях — на ковариантные производные с коэффициентами связности, построенными из $g_{\mu\nu_{\text{плоск}}}$. В качестве примера см. упражнение 18.3.

## § 18.2. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

**Сравнение линеаризованной теории тяготения с теорией электромагнитного поля**

Калибровочные условия и уравнения поля (18.8а) и (18.8б) линеаризованной теории имеют тесное сходство с уравнениями электромагнитной теории в плоском пространстве-времени в лоренцевой калибровке

$$A^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0, \tag{18.10а}$$

$$-A^{\mu}{}_{,\alpha}{}^{\alpha} = 4\pi J^{\mu}. \tag{18.10б}$$

Они отличаются только дополнительным индексом $A^{\mu}$ вместо $h^{\mu\nu}$ и $J^{\mu}$ вместо $T^{\mu\nu}$. Имея, следовательно, опыт работы с электромагнитной теорией, можно многое сказать и о линеаризованной теории тяготения.

Например, уравнения поля (18.8б) должны обладать решениями в форме плоских волн. Аналогом плоской электромагнитной волны

$$A^x = A^x(t-z), \quad A^y = A^y(t-z), \quad A^z = 0, \quad A^0 = 0$$

**Плоские гравитационные волны**

будет плоская гравитационная волна

$$\bar{h}^{xx} = \bar{h}^{xx}(t-z), \quad \bar{h}^{xy} = \bar{h}^{xy}(t-z), \quad \bar{h}^{yy} = \bar{h}^{yy}(t-z), \tag{18.11}$$

$$\bar{h}^{\mu 0} = \bar{h}^{\mu z} = 0 \text{ для всех } \mu.$$

Хотя подробное изучение этих волн мы отложим до гл. 35—37, некоторые свойства их будут исследованы в конце следующего параграфа.

## § 18.3. ВЛИЯНИЕ ТЯГОТЕНИЯ НА МАТЕРИЮ

**Анализ влияния слабого поля тяготения на материю**

Влияние слабых полей тяготения на материю можно рассчитать, используя линеаризованную метрику (18.1) и символы Кристоффеля (18.2) в соответствующих уравнениях движения, т. е. в урав-

нениях геодезических (для движения частиц или световых лучей), в гидродинамических уравнениях (для жидкости), в уравнениях Максвелла (для электромагнитных волн) или в уравнении $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ для полного тензора энергии-импульса любых полей и любого вещества. Примеры, аналогичные расчетам в ньютоновском пределе, проведенным в упражнениях 16.1, 16.4 и в § 17.4, даны в упражнениях 18.5—18.7. Однако если (линеаризованные) гравитационные «силы» (члены, связанные с символами Кристоффеля) в наинизшем порядке оказывают существенное влияние на движение источников гравитационного поля, то линеаризованного уравнения поля (18.7) уже не достаточно и необходимо рассматривать лучшие приближения к уравнениям Эйнштейна. [Так, излучение гравитационных волн механически или электрически раскачиваемым осциллятором можно описать в рамках линеаризованной теории, однако излучение двойной звездной системой или колебаниями звезды под действием гравитационных сил требует для своего описания учета нелинейных членов (гравитационных «напряжений») в уравнениях Эйнштейна, см. § 36.9—36.11.]

Вышеприведенные заключения следуют из рассмотрения законов сохранения, связанных с линеаризованными уравнениями поля. Так же как электромагнитные уравнения (18.10а) и (18.10б) обеспечивают сохранение заряда

$$J^{\mu}{}_{,\mu} = 0, \qquad \int\limits_{\text{все пространство}} J^0(t, x)\, dx\, dy\, dz \equiv Q = \text{const},$$

**Сохранение 4-импульса и момента импульса в линеаризованной теории**

уравнения тяготения (18.8а) и (18.8б) обеспечивают сохранение полного 4-импульса и момента импульса любого тела, граничащего с вакуумом:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \tag{18.12а}$$

$$\int\limits_{\text{тело}} T^{\mu 0}(t, x)\, dx\, dy\, dz \equiv P^{\mu} = \text{const}, \tag{18.12б}$$

$$(x^{\alpha} T^{\beta\mu} - x^{\beta} T^{\alpha\mu})_{,\mu} = 0, \tag{18.13а}$$

$$\int\limits_{\text{тело}} (x^{\alpha} T^{\beta 0} - x^{\beta} T^{\alpha 0})\, dx\, dy\, dz \equiv J^{\alpha\beta} = \text{const}. \tag{18.13б}$$

(Об основных свойствах момента импульса в специальной теории относительности см. § 5.11. Момент импульса здесь вычислен относительно начала системы координат.) Важно теперь, что компоненты тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, появляющиеся в линеаризованных уравнениях поля (18.7) и в этих законах сохранения, совпадают с компонентами этого тензора, вычисленными в специальной теории относительности (с $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$). В результате тяготение не влияет на сформулированный здесь закон сохранения энергии-импульса! Откуда видно, что в линеаризованной теории предполагается, что силы тяготения не совершают значи-

тельной работы. Например, в линеаризованной теории пренебрегают потерями энергии, вызванными затуханием гравитационного излучения. Аналогично, сохранение 4-импульса $P^\mu$ каждого тела, действующего как источник $h_{\mu\nu}$, означает, что каждое тело движется по геодезической $\eta_{\mu\nu}$ (прямые линии в почти лоренцевой системе координат), а не по геодезической $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Поэтому линеаризованную теорию можно использовать для расчета движения пробных частиц и полей с $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, но чтобы учесть гравитационное влияние на движение самих источников и заставить их удовлетворять уравнению $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, а не уравнению $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$, необходимо ввести в уравнения поля нелинейные члены, не учитываемые линеаризованной теорией. (О законах сохранения см., например, гл. 20; о генерации гравитационных волн и реакции излучения см. § 36.9—36.11; о постньютоновском приближении см. гл. 39.)

**Предел справедливости линеаризованной теории: тяготение не должно существенно воздействовать на движение источников**

Энергию, импульс и момент импульса, уносимые гравитационными волнами, в линеаризованной теории по аналогии с теорией электромагнитных волн (Фирц и Паули [78]) можно вычислить методами специальной теории относительности, однако сильнее и поучительнее использовать полностью гравитационный подход (гл. 35 и 36).

---

**УПРАЖНЕНИЯ**

### 18.4. Кривизна пространства-времени для плоской гравитационной волны

Вычислите компоненты тензора римановой кривизны [равенство (18.9)] для плоской гравитационной волны (18.11). [*Ответ*:

$$R_{x0x0} = -R_{y0y0} = -R_{x0xz} = R_{y0yz} = R_{xzxz} = -R_{yzyz} = -\frac{1}{4}(\bar{h}_{xx} - \bar{h}_{yy})_{,tt};$$

$$R_{x0y0} = -R_{x0yz} = R_{xzyz} = -R_{xzy0} = -\frac{1}{2}\bar{h}_{xy,\,tt},$$

остальные ненулевые компоненты получаются отсюда с помощью симметрий $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$.]

### 18.5. Простой детектор гравитационных волн (фиг. 18.1)

Две бусинки почти свободно скользят по гладкому стержню, их скольжению препятствует лишь слабое трение. Стержень свободно падает в пространстве-времени так, что центр масс его движется по геодезической, а концы прикреплены к гироскопам и поэтому не вращаются. Бусинки расположены эквидистантно (на расстоянии $\frac{1}{2}\ell$) от центра стержня. Плоские гравитационные волны [уравнение (18.11) и упражнение 18.4], падающие на стержень,

**УПРАЖНЕНИЯ**

ФИГ. 18.1.
Простейший детектор гравитационных волн, состоящий из палки с бусинками и гироскопами на концах [86]. Обсуждение см. в упражнении 18.5.

толкают бусинки взад и вперед («геодезическое отклонение», «приливные гравитационные силы»). Возникающее в результате трение бусинок о стержень нагревает его, и путем измерения увеличения температуры стержня детектируется прохождение волн [1]). (Конечно это не лучший из всех мыслимых приборов!) Пренебрегая влиянием трения на движение бусинок, вычислите собственное расстояние между ними как функцию времени. [*Указание*: Пусть $\boldsymbol{\xi}$ — интервал между бусинками и $\mathbf{n} = \boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|$ — единичный вектор, направленный вдоль стержня в системе покоя стержня. Тогда искомое расстояние равно $\ell = \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{n}$. Тот факт, что стержень не вращается, включен в закон параллельного переноса $\mathbf{n}$, т. е. $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n} = 0$. («Перенос Ферми — Уолкера» описанный в § 6.5, 6.6 и 13.6, сводится к параллельному переносу, так как стержень движется по геодезической с $\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$.) Таким образом,

$$d\ell/d\tau = \nabla_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{n}) = (\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\xi})\cdot\mathbf{n},$$

$$d^2\ell/d\tau^2 = \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{n}) = (\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\xi})\cdot\mathbf{n},$$

где $\tau$ — собственное время стержня. Но $\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\xi}$ порождается римановой кривизной волны (геодезическое отклонение):

$$\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\xi} = \text{проекция } \mathbf{n} \text{ на } [-\mathbf{R}(\ldots, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u})].$$

(Силы геодезического отклонения, перпендикулярные стержню, т. е. перпендикулярные $\mathbf{n}$, уравновешены реакцией стержня на бусинки, препятствующей им пройти сквозь стержень: вещество не проникает сквозь вещество!) Поэтому

$$d^2\ell/d\tau^2 = -\mathbf{R}(\ldots, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = -\mathbf{R}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}).$$

Вычислите это ускорение в локально лоренцевой системе отсчета стержня. Ориентируйте оси координат так, чтобы волна распространялась в направлении $z$, а направление стержня имело компоненты $n^z = \cos\theta$, $n^x = \sin\theta\cos\phi$, $n^y = \sin\theta\sin\phi$. Решите получающееся уравнение для $\ell(\tau)$]. [*Ответ*:

$$\ell = \ell_0\left[1 + \frac{1}{4}(\bar{h}_{xx} - \bar{h}_{yy})\sin^2\theta\cos 2\phi + \frac{1}{2}\bar{h}_{xy}\sin^2\theta\sin 2\phi\right],$$

[1]) Этот мысленный эксперимент был придуман Бонди [86—88] как способ убедить скептиков в реальности гравитационных волн.

где $\bar{h}_{jk}$ вычисляются вдоль мировой линии стержня ($x = y = z = 0$). Заметим, что если стержень ориентирован по направлению распространения волны (если $\theta = 0$), то бусинки не будут двигаться. В этом смысле влияние волн (геодезическое отклонение) чисто поперечное. Дальнейшее обсуждение см. в § 35.4—35.6.]

## § 18.4. ПОЧТИ НЬЮТОНОВСКИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ

**Решение линеаризованного уравнения поля в виде запаздывающего интеграла**

Общее решение линеаризованных уравнений поля в лоренцевой калибровке [уравнения (18.8а) и (18.8б)] выражается в виде запаздывающего интеграла, хорошо известного из теории электромагнитного поля

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, x) = \int \frac{4T_{\mu\nu}(t - |x - x'|, x')}{|x - x'|}\, d^3x'. \qquad (18.14)$$

Гравитационно-волновые аспекты этого решения будут изучены в гл. 36. Здесь же мы сконцентрируем внимание на почти ньютоновском источнике: $T_{00} \gg |T_{0j}|$, $T_{00} \gg |T_{jk}|$ и скорости достаточно малы, так что запаздыванием можно пренебречь [1]). В этом случае (18.14) сводится к

**Ньютоновская теория тяготения как предел линеаризованной теории**

$$\bar{h}_{00} = -4\Phi, \quad \bar{h}_{0j} = \bar{h}_{jk} = 0, \qquad (18.15а)$$

$$\Phi(t, x) = -\int \frac{T_{00}(t, x')}{|x - x'|}\, d^3x' = \text{ньютоновский потенциал}. \qquad (18.15б)$$

Соответствующая метрика (18.8в) равна

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)\, dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \approx$$
$$\approx -(1 - 2M/r)\, dt^2 + (1 + 2M/r)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \text{ вдали от источника}. \qquad (18.15в)$$

Эта метрика не учитывает: 1) нелинейные поправки порядка $\Phi^2$, которые вне компетенции линеаризованной теории, 2) поправки, возникающие из-за того, что положено $\bar{h}_{0j} = 0$ (они порядка $\bar{h}_{0j} \sim \Phi v$, где $v \sim |T_{0j}|/T_{00}$ — характерная скорость в источнике), 3) поправки из-за того, что положено $\bar{h}_{jk} = 0$ [которые порядка $\bar{h}_{jk} \sim \Phi(|T_{jk}|/T_{00})$]. В Солнечной системе, где $\Phi \sim 10^{-6}$, все эти ошибки порядка $10^{-12}$.

Пассивное соответствие ньютоновской теории требует только, чтобы $g_{00} = -(1 + 2\Phi)$ [см. уравнение (17.19)]. Однако линеари-

[1]) Более точно следует сказать, что мы находимся достаточно близко к источнику, поэтому запаздыванием можно пренебречь (в так называемой «неволновой зоне», $r < ct$, где $t$ — характерное время изменения параметров источника). — *Прим. ред.*

**Отклонение света и гравитационное красное смещение, предсказываемые линеаризованной теорией**

зованная теория определяет все метрические коэффициенты с ошибками порядка $\sim\Phi v$, $\sim\Phi^2$ и $\Phi$ ($|T_{jk}|/T_{00}$). Такой точности достаточно для правильного предсказания (относительная ошибка $\sim 10^{-6}$) отклонения света и гравитационного красного смещения в Солнечной системе, но не смещений перигелия.

---

УПРАЖНЕНИЯ

## 18.6. Отклонение света Солнцем

Солнце с высокой точностью является статичным и сферичным, а его внешнее поле описывается метрикой (18.15в) с $\Phi = -M/r$, т. е.

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)\,dt^2 + (1 + 2M/r)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) \text{ везде вне Солнца.} \tag{18.16}$$

Фотон, движущийся в экваториальной плоскости ($z = 0$) этого искривленного пространства-времени, испытывает очень слабое отклонение от мировой линии

$$x = t, \quad y = b \equiv \text{«прицельный параметр»}, \quad z = 0. \tag{18.17}$$

Вычислите величину отклонения следующим образом.

а. Запишите уравнение геодезических (16.4а) для мировой линии фотона

$$\frac{dp^\alpha}{d\lambda^*} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} p^\beta p^\gamma = 0. \tag{18.18}$$

Здесь $\mathbf{p} = d/d\lambda^*$ = (4-импульс фотона)=(касательный вектор к нулевой геодезической фотона.]

б. Вычислив в экваториальной плоскости коэффициенты связности и используя приближенные значения $|p^y| \ll p^0 \approx p^x$ компонент 4-импульса, соответствующих приближенной мировой линии (18.17), покажите, что

$$\frac{dp^y}{d\lambda^*} = \frac{-2Mb}{(x^2+b^2)^{3/2}} p^x \frac{dx}{d\lambda^*}, \qquad p^x = p^0\left[1 + O\left(\frac{M}{b}\right)\right] = \text{const}\left[1 + O\left(\frac{M}{b}\right)\right].$$

в. Проинтегрируйте это уравнение для $p^y$, предполагая, что $p^y = 0$ при $x = -\infty$ (фотон вначале движется точно в направлении оси $x$), и получите

$$p^y(x = +\infty) = -\frac{4M}{b} p^x.$$

г. Покажите, что это соответствует отклонению света на угол

$$\Delta\phi = 4M/b = 1''{,}75\,(R_\odot/b), \tag{18.19}$$

где $R_\odot$ — радиус Солнца. О сравнении этого предсказания с экспериментом см. в дополнении 40.1.

УПРАЖНЕНИЯ

**18.7. Гравитационное красное смещение**

а. Используя уравнение геодезических для фотона, записанное в виде

$$dp_\mu/d\lambda^* - \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} p_\alpha p^\beta = 0,$$

докажите, что для любого фотона, свободно движущегося в гравитационном поле Солнца [метрика (18.16)], $dp_0/d\lambda^* = 0$, т. е.

$$p_0 = \text{постоянная вдоль мировой линии фотона.} \quad (18.20)$$

б. Атом, находящийся в покое на поверхности Солнца, в связанной с ним ортонормальной системе отсчета испускает фотон с длиной волны $\lambda_e$.
[*Замечание*:

$$h\nu_e = h/\lambda_e = (\text{меры атомной энергии}) = -\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_e, \quad (18.21)$$

где $\mathbf{p}$ — 4-импульс фотона и $\mathbf{u}_e$ — 4-скорость излучателя.] Атом, покоящийся вдали от Солнца, поглощает этот фотон на длине волны $\lambda_r$. [*Замечание*: $h/\lambda_r = -\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_r$.] Покажите, что длина волны фотона смещена в красную сторону на величину

$$z \equiv \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{M_\odot}{R_\odot} = 2\cdot 10^{-6}. \quad (18.22)$$

[*Указание*: $\mathbf{u}_r = \partial/\partial t$; $\mathbf{u}_e = (1 - 2M/r)^{1/2}\partial/\partial t$. Почему?] Для дальнейшего обсуждения гравитационного красного смещения и экспериментальных результатов см. § 7.4 и 38.5, а также фиг. 38.1 и 38.2.

# 19. МАССА И МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ГРАВИТИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

## § 19.1. ВНЕШНЕЕ ПОЛЕ СЛАБО ГРАВИТИРУЮЩЕГО ИСТОЧНИКА

**Метрика вдали от слабо гравитирующей системы, представленная в виде ряда по степеням $1/r$:**

Рассмотрим изолированную систему с таким слабым полем тяготения, что при расчете структуры системы и движения можно полностью пренебречь самогравитацией. (Это справедливо для астероида или туманности с электронами и протонами высокой энергии, движущимися по спирали в магнитном поле, но не справедливо для Земли или Солнца.) Не будем ничего больше предполагать о системе: например, в отличие от случая ньютоновской теории скорости могут быть произвольно близкими к скорости света, а натяжения $T^{jk}$ и плотности импульса $T^{0j}$ — сравнимыми с плотностью массы-энергии $T^{00}$.

**1) вывод**

Вычислим слабое гравитационное поле, создаваемое такой системой [см. вариант уравнения (18.14) с чертой]:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{19.1}$$

$$\bar{\bar{h}}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} = \int \frac{4\bar{T}_{\mu\nu}(t - |x - x'|, x')}{|x - x'|}\, d^3x'. \tag{19.2}$$

Ограничимся рассмотрением пространственно-временной области, удаленной от системы, и разложим $h_{\mu\nu}$ по степеням $x'/r \equiv x'/|x|$, используя соотношения

$$\bar{T}_{\mu\nu}(t - |x - x'|, x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \bar{T}_{\mu\nu}(t - r, x')\right] \times$$
$$\times (r - |x - x'|)^n, \tag{19.3a}$$

$$r-|x-x'|=x^j\left(\frac{x^{j'}}{r}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{x^jx^k}{r}\left(\frac{x^{j'}x^{k'}-r'^2\delta_{jk}}{r^2}\right)+\ldots, \quad (19.3б)$$

$$\frac{1}{|x-x'|}=\frac{1}{r}+\frac{x^j}{r^2}\,\frac{x^{j'}}{r}+\frac{1}{2}\,\frac{x^jx^k}{r^3}\,\frac{(3x^{j'}x^{k'}-r'^2\delta_{jk})}{r^2}+\ldots. \quad (19.3в)$$

Проведем вычисления в системе отсчета, покоящейся относительно данной системы, для которой

$$P^j\equiv\int T^{0j}d^3x=0, \quad (19.4а)$$

а начало координат находится в центре масс

$$\int x^jT^{00}d^3x=0. \quad (19.4б)$$

В результате после изменения калибровки с целью упрощения $h_{00}$ и $h_{0j}$ получим

$$ds^2=-\left[1-\frac{2M}{r}+O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]dt^2-\left[4\varepsilon_{jk\ell}S^k\,\frac{x^\ell}{r^3}+\right. \quad \text{2) результат}$$

$$\left.+O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]dt\,dx^j+\left[\left(1+\frac{2M}{r}\right)\delta_{jk}+\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix}\text{члены, связанные с гравитационным}\\ \text{излучением, изменяющиеся как } O(1/r)\end{pmatrix}\right]dx^j\,dx^k \quad (19.5)$$

(вывод см. в упражнении 19.1). Здесь $M$ и $S^k$ — масса и собственный момент импульса тела:

$$M=\int T^{00}d^3x, \quad (19.6а)$$

$$S_k=\int\varepsilon_{k\ell m}x^\ell T^{m0}d^3x. \quad (19.6б)$$

Соответствующий ньютоновский потенциал равен

$$\Phi=-\frac{1}{2}(g_{00}-\eta_{00})=-\frac{M}{r}+O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (19.6в)$$

*Вывод*: При соответствующем выборе калибровки $\Phi$ и $g_{00}$ вдали от любого слабого источника не зависят от времени и однозначно определяются массой источника $M$; компонента $g_{0j}$ не зависит от времени и определяется собственным моментом импульса источника $S^j$, а компоненты $g_{jk}$ обладают зависящими от времени членами (гравитационные волны!) порядка $O(1/r)$.

Как зависит метрика от массы $M$ и момента импульса $S$ системы

В оставшейся части главы мы сконцентрируем внимание на «отпечатках» массы и момента импульса в гравитационном поле и вплоть до гл. 35 почти не будем касаться гравитационных волн.

УПРАЖНЕНИЕ

**19.1. Вывод метрики вдали от слабо гравитирующего тела**

а. Выведите формулу (19.5). [*Указания*: 1. Следуйте описанной в тексте процедуре. 2. При вычислении $h_{00}$ выпишите в явном виде с точностью $O(1/r^2)$ члены первого ($n=1$) и нулевого ($n=0$) порядков и упростите член $n=0$ с помощью тождеств

$$T^{jk} = \frac{1}{2}(T^{00}x^jx^k)_{,00} + (T^{\ell j}x^k + T^{\ell k}x^j)_{,\ell} - \frac{1}{2}(T^{\ell m}x^jx^k)_{,\ell m}, \tag{19.7а}$$

$$T^{\ell\ell}x^m = \left(T^{0\ell}x^\ell x^m - \frac{1}{2}T^{0m}r^2\right)_{,0} + \left(T^{\ell k}x^kx^m - \frac{1}{2}T^{\ell m}r^2\right)_{,\ell}. \tag{19.7б}$$

(Убедитесь, что эти тождества следуют из $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0$.) 3. При вычислении $h_{0m}$ выпишите в явном виде член в (19.2) с $n=0$ с точностью $O(1/r^2)$ и упростите его, используя тождество

$$T^{0k}x^j + T^{0j}x^k = (T^{00}x^jx^k)_{,0} + (T^{0\ell}x^jx^k)_{,\ell}. \tag{19.7в}$$

(Проверьте, что оно следует из $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0$.) 4. Упростите $h_{00}$ и $h_{0m}$ с помощью калибровочного преобразования, генерируемого

$$\xi_0 = \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00'}r'^2d^3x' + \\ + \frac{x^j}{r^3}\int\left(T^{0k'}x^{k'}x^{j'} - \frac{1}{2}T^{0j'}r'^2\right)d^3x' + \\ + \int(T_{00'} + T_{\ell\ell'})\left[\frac{x^jx^{j'}}{r^2} + \frac{(3x^{j'}x^{k'} - r'^2\delta_{jk})x^jx^k}{2r^4}\right]d^3x' + \\ + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\int(T_{00'} + T_{kk'})\frac{(r - |x-x'|)^n}{|x-x'|}d^3x',$$

$$\xi_m = -\frac{2x^j}{r^3}\int T_{00'}x^{j'}x^{m'}d^3x' + \\ + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\int T_{0m'}\frac{(r-|x-x'|)^n}{|x-x'|}d^3x' + \\ + \frac{x^m}{r}\xi_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\right)_{,m}\int T_{00'}r'^2d^3x' - \left(\frac{x^k}{r^2}\right)_{,m}\int\left(T^{0j'}x^{j'}x^{k'} - \frac{1}{2}T^{0k'}r'^2\right)d^3x' - \\ - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int(T_{00'} + T_{kk'})\left[\frac{(r-|x-x'|)^n}{|x-x'|}\right]_{,m}d^3x'.$$

Здесь $T_{\mu\nu'}$ обозначает $T_{\mu\nu}(t-r, x')$.]

б. Докажите, что масса и момент импульса системы сохраняются. [*Замечание*: Поскольку $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0$ (самогравитацией пренебрегаем), то доказательство здесь такое же, как и в плоском пространстве-времени (гл. 5).]

## § 19.2. ИЗМЕРЕНИЕ МАССЫ И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Величины массы и момента импульса системы можно измерить, анализируя тот отпечаток, который они оставляют в своем внешнем гравитационном поле. Простейшим орудием исследования является пробная частица на гравитационно связанной орбите. Если частица находится достаточно далеко от источника, то на ее движение почти совсем не влияют момент импульса источника или гравитационные волны, существенное влияние оказывает только сферическая ньютоновская часть гравитационного поля. В результате частица движется по эллиптической кеплеровской орбите и для определения массы источника $M$ достаточно применить лишь третий закон Кеплера (который, может быть, лучше назвать «кеплеровским законом 1—2—3»)

В случае слабо гравитирующей системы:

1) полную массу $M$ можно измерить, применяя «кеплеровский закон 1—2—3» к движущимся по орбитам частицам

$$M = \left(\frac{2\pi}{\text{орбитальный период}}\right)^2 \times (\text{большая полуось эллипса})^3, \text{ т. е.}$$

$$M^1 = \omega^2 a^3. \tag{19.8}$$

Момент импульса источника измерить не так просто. Необходимо использовать зонд, не чувствительный к ньютоновским гравитационным эффектам, но «чувствующий» недиагональный член

$$g_{0j} = -2\epsilon^{jk\ell} S^k x^\ell / r^3 \tag{19.9}$$

в метрике (19.5). Одним из таких зондов служит прецессия перигелия для спутника, вращающегося по часовой стрелке, относительно прецессии для спутника, вращающегося против часовой стрелки. Другим таким зондом является гироскоп. Пусть гироскоп, удерживаемый от падения силой, приложенной к его центру масс, покоится в источнике гравитационного поля. С течением времени член $g_{0j}$ в метрике будет воздействовать на гироскоп, заставляя его прецессировать относительно базисных векторов $\partial/\partial x^j$; поскольку эти базисные векторы «связаны» с системой координат, которая в свою очередь связана с лоренцевой системой на бесконечности, а последняя связана с «неподвижными звездами» (ср. § 39.12), то это будет прецессия относительно «неподвижных звезд». Угловая скорость прецессии, как это получено в упражнении 19.2, равна

2) полный момент импульса $S$ можно измерить, анализируя прецессию гироскопов

$$\Omega = \frac{1}{r^3}\left[-S + \frac{3(S\cdot x)x}{r^2}\right]. \tag{19.10}$$

Иногда говорят, что вращение источника «увлекает инерциальную систему вблизи источника», заставляя таким образом прецессировать гироскоп. Дальнейшее обсуждение см. в § 21.12, 40.7 и 33.4.

УПРАЖНЕНИЕ

**19.2. Прецессия гироскопа**

Выведите уравнение (19.10) для угловой скорости прецессии гироскопа. [*Указания*: Определите ортонормальную тетраду в центре масс гироскопа. Свяжите тетраду жестко с системой координат и, следовательно, с «неподвижными звездами»; более определенно, выберите тетраду так, чтобы она была базисом $\{e_{\hat{\alpha}}\}$, дуальным следующему базису из 1-форм:

$$\begin{aligned}\omega^{\hat{0}} &= [1-(2M/r)]^{1/2}\,dt + 2\varepsilon_{jk\ell}S^k\,(x^\ell/r^3)\,dx^j,\\ \omega^{\hat{j}} &= [1+(2M/r)]^{1/2}\,dx^j.\end{aligned} \tag{19.11}$$

Пространственные оси тетрады $e_{\hat{j}}$ вращаются относительно гироскопа с угловой скоростью $\omega$ [см. уравнение (13.69)]:

$$-\varepsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}\omega^{\hat{k}} = \Gamma_{\hat{i}\hat{j}\hat{0}}.$$

Следовательно, вектор момента импульса гироскопа $\boldsymbol{L}$ прецессирует относительно тетрады с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\omega}$:

$$\frac{dL^{\hat{j}}}{d\hat{t}} = \varepsilon_{\hat{j}\hat{k}\hat{\ell}}\Omega^k L^{\hat{\ell}}, \qquad \varepsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}\Omega^{\hat{k}} = \Gamma_{\hat{i}\hat{j}\hat{0}}. \tag{19.12}$$

Вычислите $\Gamma_{\hat{i}\hat{j}\hat{0}}$ для данной ортонормальной системы и получите тем самым уравнение (19.10) для $\boldsymbol{\Omega}$.]

## § 19.3. МАССА И МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ПОЛНОСТЬЮ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ИСТОЧНИКОВ

Откажемся теперь от условия слабости гравитирующих источников. Рассмотрим изолированную гравитирующую систему, пространство-время внутри которой может быть как угодно сильно искривлено или искривлено слабо. Это может быть черная дыра, нейтронная звезда или Солнце... Однако мы не будем сейчас анализировать внутреннюю область системы или «область сильного поля» вблизи системы, а ограничимся рассмотрением слабого поля вдали от источника, применяя для этой цели линеаризованную теорию в вакууме. Разложим $h_{\mu\nu}$ по мультипольным моментам и степеням $1/r$ и подберем калибровку, лоренцеву систему отсчета и начало координат таким образом, чтобы упростить получающуюся метрику. В результате такого расчета получим гравитационное поле, совпадающее с полем слабого источника [уравнение (19.5)]! (Детали расчета в силу их громоздкости здесь не приводятся, см. упражнение 19.3.)

Но прежде, чем считать его полем вдали от произвольного источника, необходимо рассмотреть нелинейные эффекты в уравнениях поля в вакууме. Вдали от источника оказываются важными два типа нелинейности:

1. Нелинейности в статической, ньютоновской, части метрики, порождающие поправки

$$\delta g_{00} = -2M^2/r^2, \qquad \delta g_{jk} = \frac{3}{2}(M^2/r^2)\,\delta_{jk}$$

(см. упражнение 19.3 и § 39.8), приводящие тем самым к метрике вида

Метрика вдали от произвольной гравитирующей системы, представленная в виде ряда по степеням $1/r$

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] dt^2 -$$
$$- \left[4\varepsilon_{jk\ell} S^k \frac{x^\ell}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] dt\, dx^j + \left[\left(1 + \frac{2M}{r} + \frac{3M^2}{2r^2}\right)\delta_{jk} + \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix}\text{члены, связанные с гравитационным} \\ \text{излучением, затухающие как } O(1/r)\end{pmatrix}\right] dx^j\, dx^k. \quad (19.13)$$

2. Постепенное уменьшение массы источника, постепенное изменение его момента импульса и постепенное изменение «покоящейся системы отсчета» для компенсации массы, момента импульса и линейного импульса, уносимых гравитационными волнами (см. дополнение 19.1, которое лучше всего прочесть после окончания этого параграфа).

Измеряя удаленную пространственно-временную геометрию (19.13) данного источника, нельзя установить, сильным или слабым собственным полем тяготения обладает источник. Но если выразить постоянные $M$ и $S_j$, которые определяют $g_{00}$ и $g_{0j}$, в виде интегралов, взятых по внутренней области источника, то обнаруживается решающее различие: если внутреннее поле тяготения слабо, то линеаризованная теория справедлива во всем пространстве и

$$M = \int T_{00} d^3x, \quad S_j = \int \varepsilon_{jk\ell} x^k T^{\ell 0} d^3x, \qquad (19.14)$$

Отсутствие объемных интегралов для $M$ и $S$ в случае, когда источник обладает сильным собственным гравитационным полем

но если поле тяготения сильное, то эти формулы уже не годятся. Не помешает ли это отождествлению постоянных $M$ и $S_j$ в метрике (19.13) для случая сильного тяготения с массой и моментом импульса источника? Отнюдь нет, согласно следующему аргументу.

Рассмотрим массу Солнца. Ньютоновская теория справедлива здесь с высокой точностью (относительная ошибка $\sim M_\odot/R_\odot \sim 10^{-6}$), поэтому можно утверждать, что постоянная $M$, появляющаяся в линейном элементе (19.13), действительно определяется выражением

$$M = \int \rho\, d^3x = \int T_{00}\, d^3x = \text{полная масса}.$$

Может ли это утверждение быть ошибочным? Чтобы приобрести больше уверенности и понимания, встанем на точку зрения *кон-*

*тролируемого неведения*, т. е. не будем стремиться знать больше, чем это необходимо. (Стиль такой физической аргументации восходит к знаменитому ньютоновскому «Hypotheses non fingo», т. е. «Гипотез не измышляю».) Для вычисления объемного интеграла от $T_{00}$ (обычное ньютоновское определение массы $M$) нужна теория внутренней структуры Солнца. Необходимо знать, например, что под видимыми поверхностными слоями Солнца не скрывается массивное центральное ядро, настолько плотное и большое, что гравитационные поля там будут релятивистскими, т. е. $|\Phi| \sim 1$. Если при анализе используется тензор энергии-импульса жидкости $T^{\mu\nu}$, то необходимо знать уравнение состояния, непрозрачность и теорию генерации и переноса энергии. Необходимо обосновать также адекватность приближенного описания атомного состава вещества как жидкости. Необходимо предположить, что окончательная теория материи, объясняющая массы покоя протонов и электронов, не припишет существенную долю их массы сильным (нелинейным) гравитационным полям субмикроскопического масштаба. Конечно, все это можно предположить, но, очевидно, это не тот способ, которым определяют массу Солнца астрономы! Теории звездной структуры подбирают так, чтобы получить наблюдаемую массу, а не так, чтобы вывести ее из негравитационных наблюдений. На практике массу Солнца измеряют, изучая орбиты планет, движущихся в его внешнем гравитационном поле, — процедура скорее эквивалентная получению массы $M$ с помощью линейного элемента (19.13), а не вычислению объемного интеграла $\int T^{00} d^3x$.

Определение «полной массы-энергии» $M$ и «момента импульса» $S$ как функций внешнего гравитационного поля

Чтобы избежать всех вышеуказанных неопределенностей и построить теорию, максимально близкую к эксперименту, *«полную массу-энергию» $M$ Солнца или любого другого тела определяют как постоянную, появляющуюся в удаленной внешней геометрии пространства-времени, описываемой линейным элементом (19.13). Аналогично, собственный «момент импульса» тела определяется как постоянный 3-вектор $S$, появляющийся в линейном элементе (19.13).* Полная масса-энергия $M$ измеряется экспериментально с помощью третьего закона Кеплера, а момент импульса $S$ — по его влиянию на прецессию гироскопа или орбиту планеты. Это справедливо как для Солнца, так и для черной дыры или нейтронной звезды.

$S$ как геометрический объект в удаленной от внешнего источника асимптотически плоской области

Какого рода геометрический объект представляет собой собственный момент импульса $S$? Он определяется с помощью измерений, выполненных вдали от источника, где с увеличением расстояния пространство-время становится все более плоским (асимптотически плоским). Поэтому момент импульса можно рассматривать как 3-вектор в *«асимптотически плоском пространстве-времени»*, окружающем источник. Но в какой лоренцевой системе отсчета $S$ будет 3-вектором? Ясно, что в асимптотической лоренцевой системе отсчета, где справедлив линейный элемент (19.13), т. е. в асимптотической лоренцевой системе отсчета, где удаленное

«Асимптотически покоящаяся система отсчета» и «полный 4-импульс»

«кулоновское» («$M/r$») поле источника статично, т. е. в *«асимптотически покоящейся системе отсчета»* источника. Альтернативно можно рассматривать $S$ как 4-вектор $\mathbf{S}$, который является чисто пространственным ($S^0 = 0$) в асимптотически покоящейся системе отсчета. Если обозначить через $\mathbf{U}$ 4-скорость асимптотически покоящейся системы отсчета, то тот факт, что $\mathbf{S}$ — чисто пространственный вектор, можно переформулировать как $\mathbf{S} \cdot \mathbf{U} = 0$, или

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{P} = 0, \tag{19.15}$$

где

$$\mathbf{P} \equiv M\mathbf{U} \equiv \text{«полный 4-импульс источника»} \tag{19.16}$$

— еще один вектор, принадлежащий асимптотически плоской области пространства-времени.

Законы сохранения полного 4-импульса и момента импульса

Полный 4-импульс $\mathbf{P}$ и собственный момент импульса $\mathbf{S}$ удовлетворяют законам сохранения, которые суммированы в дополнении 19.1. Эти законы сохранения — ценнейшие средства теории тяготения и релятивистской астрофизики, но вывод их (гл. 20) не сравним по первоочередности с такими разделами, как нейтронные звезды и основы космологии, поэтому большинство читателей захочет пропустить его при первом чтении этой книги.

---

### 19.3. Гравитационное поле вдали от стационарного полностью релятивистского источника

УПРАЖНЕНИЕ

Выведите линейный элемент (19.13) для специального случая не зависящего от времени источника ($g_{\mu\nu,t} = 0$). Это довольно трудная задача, если не следовать нижеописанному маршруту.

1. Пренебрегите сначала всеми нелинейностями в уравнениях поля Эйнштейна. Вдали от источника поле слабое. Эти нелинейности будут отсутствовать в главных членах.

2. Вычислите главные члены, используя линеаризованную теорию в лоренцевой калибровке [уравнение (18.8)].

3. Выпишите общее решение не зависящего от времени волнового уравнения (18.8б) в вакууме в виде, содержащем $n^j \equiv x^j/r \equiv$ $\equiv$ (единичный вектор в радиальном направлении):

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{00} &= \frac{A^0}{r} + \frac{B^j n^j}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \\
\bar{h}_{0j} &= \frac{A^j}{r} + \frac{B^{jk} n^k}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \\
\bar{h}_{jk} &= \frac{A^{jk}}{r} + \frac{B^{jk\ell} n^\ell}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \\
A^{jk} &= A^{(jk)}, \quad B^{jk\ell} = B^{(jk)\ell}.
\end{aligned} \tag{19.17}$$

(Круглые скобки означают симметризацию.)

УПРАЖНЕНИЯ

4 Наложите затем на это общее решение лоренцевы калибровочные условия $h_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta}=0$, в результате получите

$$A^j=0,\quad A^{jk}=0,$$
$$B^{jk}(\delta^{jk}-3n^jn^k)=0, \tag{19.18}$$
$$B^{jk\ell}(\delta^{k\ell}-3n^kn^\ell)=0.$$

5. Запишите тензор $B^{jk}$ в виде суммы его следа $3B$, симметричной части $S^{jk}$ и антисимметричной части («неприводимые части»), для каждой из которых след равен нулю

$$B^{jk}=B\delta^{jk}+S^{jk}+\varepsilon^{jk\ell}F^\ell,\quad S^{jj}=0. \tag{19.19}$$

Покажите, что к такому виду можно привести любой тензор $B^{jk}$. Покажите далее, что калибровочные условия (19.18) означают $S^{jk}=0$.

6. Аналогично, покажите, что любой тензор $B^{jk\ell}$, симметричный по первым двум индексам, можно привести к виду

$$B^{jk\ell}=\delta^{jk}A^\ell+C^{(j}\delta^{k)\ell}+\varepsilon^{m\ell(j}E^{k)m}+S^{jk\ell},$$

$E^{km}$ — симметричная часть со следом, равным нулю, т. е.

$$E^{km}=E^{(km)},\quad E^{kk}=0, \tag{19.20}$$

$S^{jk\ell}$ — симметричная часть со следом, равным нулю, т.е.

$$S^{jk\ell}=S^{(jk\ell)}$$
$$S^{jj\ell}=S^{jkk}=S^{jkj}=0.$$

Покажите затем, что калибровочные условия (19.18) означают $C^j=-2A^j$ и $E^{km}=S^{jk\ell}=0$.

7. Комбинируя эти результаты, получите

$$\bar{h}_{00}=\frac{A^0}{r}+\frac{Bn^j}{r^2}+O\left(\frac{1}{r^3}\right),$$
$$\bar{h}_{0j}=\frac{\varepsilon^{jk\ell}n^kF^\ell}{r^2}+\frac{Bn^j}{r^2}+O\left(\frac{1}{r^3}\right), \tag{19.21}$$
$$\bar{h}_{jk}=\frac{\delta^{jk}A^\ell n^\ell-A^jn^k-A^kn^j}{r^2}+O\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

Используйте далее калибровочные преобразования в рамках лоренцевой калибровки для исключения $B$ и $A^j$ из $\bar{h}_{0j}$ и $\bar{h}_{jk}$; таким образом, найдите

$$\bar{h}_{00}=\frac{A_0}{r}+\frac{(B^j+A^j)n^j}{r^2}+O\left(\frac{1}{r^3}\right),$$
$$\bar{h}_{0j}=\frac{\varepsilon^{jk\ell}n^kF^\ell}{r^2}+O\left(\frac{1}{r^3}\right), \tag{19.22}$$
$$\bar{h}_{jk}=O\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

**УПРАЖНЕНИЯ**

8. «Перенесите начало координат так, чтобы $x^j_{\text{нов}} = x^j_{\text{стар}} - (B^j + A^j)/A^0$; в новой системе координат $\bar{h}_{\alpha\beta}$ имеет тот же вид (19.22), но отсутствует $B^j + A^j$. Из получающихся $\bar{h}_{\alpha\beta}$ постройте метрику и в соответствии с уравнением (19.13) переопределите постоянные $A^0$ и $F^\ell$.

9. Все линейные члены в метрике теперь объяснены. Главные нелинейные члены должны быть пропорциональны квадрату $(M/r)^2$ главного линейного члена. Простейший путь найти постоянную пропорциональности — это взять шварцшильдовскую геометрию для полностью релятивистского статического сферического источника [уравнение (31.1)], приведенную с помощью преобразования координат к виду

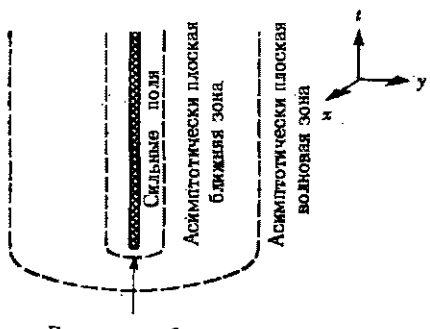
$$ds^2 = -\left(\frac{1-M/2r}{1+M/2r}\right)^2 dt^2 + \left(1+\frac{M}{2r}\right)^4 (dx^2+dy^2+dz^2), \quad (19.23)$$

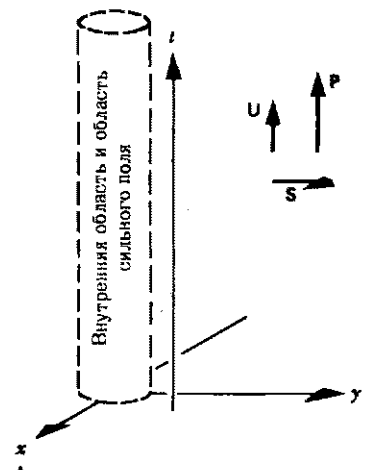
и разложить ее по степеням $M/r$ (уравнение 25.8).

---

## Дополнение 19.1. ПОЛНЫЕ МАССА-ЭНЕРГИЯ, 4-ИМПУЛЬС И МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ИЗОЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ

**А. Пространство-время разделено** на 1) внутреннюю область источника, которая окружена 2) вакуумной областью сильного поля, которая в свою очередь окружена 3) асимптотически плоской ближней зоной слабого поля, которая в свою очередь окружена 4) асимптотически плоской волновой зоной слабого поля. В этом дополнении и в этой главе рассматриваются только асимптотически плоские области. Внутренняя область и область сильного поля рассматриваются в следующей главе.




Асимптотически покоящаяся система отсчета.

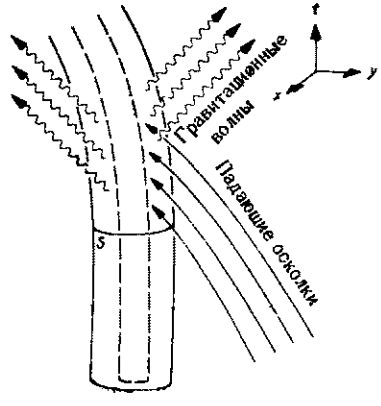
**Б. Асимптотически покоящейся системой отсчета источника** является та глобально лоренцева **система отсчета** (с координатами $t, x, y, z$), в которой покоится удаленная

«кулоновская» часть поля источника (см. диаграмму). Асимптотически покоящаяся система отсчета не продолжается в область сильного поля, при любом таком продолжении она под влиянием кривизны будет трансформироваться в сильно нелоренцеву систему криволинейной формы. Начало асимптотически покоящейся системы отсчета выбрано в центре источника, т. е. вдали ньютоновский потенциал имеет вид $\Phi = -M/(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} + O(1/r^3)$ и дипольный член $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{x}/r^3$ при таком выборе начала координат отсутствует.

**В. Источнику можно приписать полную массу-энергию $M$, 4-скорость $\mathbf{U}$, полный 4-импульс $\mathbf{P}$ и вектор собственного момента импульса $\mathbf{S}$.** 4-векторы $\mathbf{U}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{S}$ могут существовать и свободно перемещаться в асимптотически плоской области пространства-времени (при пренебрежимо малой кривизне параллельный перенос по замкнутым кривым не изменяет $\mathbf{U}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{S}$). 4-скорость $\mathbf{U}$ определяется как 4-скорость асимптотически покоящейся системы отсчета ($U^0 = 1$, $\boldsymbol{U} = 0$ в покоящейся системе отсчета). Полная масса-энергия изменяется с помощью третьего закона Кеплера («1—2—3») [см. уравнение (19.8)]. Полный 4-импульс определяется как $\mathbf{P} = M\mathbf{U}$. Собственный момент импульса $\mathbf{S}$ ортогонален 4-скорости $\mathbf{U}$, т. е. $\mathbf{S}\cdot\mathbf{U} = 0$ (поэтому $S^0 = 0$; $\boldsymbol{S} \neq 0$ в общем случае в асимптотически покоящейся системе отсчета); $\boldsymbol{S}$ измеряется с помощью гироскопической прецессии или дифференциальной прецессии перигелия (§ 19.2).

В асимптотически покоящейся системе отсчета при соответствующем выборе калибровки (т. е. ряби координат) *малые отклонения от геометрии плоского пространства-времени описываются линейным элементом*

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] dt^2 - \left[4\varepsilon_{jkl} S^k \frac{x^l}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] dt\, dx^j + \\ + \left[\left(1 + \frac{2M}{r} + \frac{3M^2}{2r^2}\right)\delta_{jk} + \begin{pmatrix}\text{члены, связанные с гра-}\\ \text{витационным излучением}\end{pmatrix}\right] dx^j\, dx^k. \qquad (1)$$




В черную дыру падают межзвездные осколки и появляются гравитационные волны.

**Г. Сохранение 4-импульса и момента импульса.** Предположим, что в источник падают или из него выбрасываются частицы, вытекают и втекают электромагнитные волны. Предположим также, что источник испускает гравитационные волны. Все эти процессы нарушают изоляцию источника и могут изменить его полный 4-импульс $\mathbf{P}$, собственный момент импульса $\mathbf{S}$ и асимптотически покоящуюся систему отсчета. Окружим источник сферической оболочкой $\mathscr{S}$, расположенной достаточно далеко, в асимптотически плоской области. Пусть оболочка всегда покоится в мгновенной асимптотически покоящейся системе отсчета источника. Зондируя гравитационное поле источника вблизи $\mathscr{S}$, измерим его 4-импульс $\mathbf{P}$ и собственный момент импульса $\mathbf{S}$ как функции собственного времени оболочки $\tau$. Анализ, проведенный в следующей главе, показывает,

что 4-импульс сохраняется в том смысле, что

$$\frac{dP^\alpha}{d\tau} = -\int_{\mathscr{S}} T^{\alpha j} n_j d\ (\text{площадь}) = \begin{pmatrix}\text{скорость, с которой}\\ \text{4-импульс втекает}\\ \text{внутрь оболочки}\end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\mathscr{S}$, а интеграл вычисляется в мгновенной системе покоя оболочки. Словесная формулировка: *скорость, с которой 4-импульс протекает через оболочку, измеренная стандартным способом в рамках специальной теории относительности, равна скорости изменения гравитационно измеренного 4-импульса источника. Аналогично, момент импульса сохраняется в том смысле, что*

$$\frac{dS_i}{d\tau} = -\int_{\mathscr{S}} (\varepsilon_{ijk} x^j T^{k\ell})\, n_\ell d\ (\text{площадь}) = \begin{pmatrix}\text{скорость, с которой}\\ \text{момент импульса втекает}\\ \text{внутрь оболочки}\end{pmatrix}, \qquad (3а)$$

$$\frac{dS_\alpha}{d\tau} = -\frac{dU^\alpha}{d\tau} S_\alpha = \begin{pmatrix}\text{изменение, необходимое для}\\ \text{сохранения ортогональности } \mathbf{S} \text{ и } \mathbf{U};\\ \text{«закон переноса Ферми — Уолкера»,}\\ \text{ср. § 6.5, 13.6}\end{pmatrix}. \qquad (3б)$$

В этих законах сохранения $T^{\alpha\beta}$ — полный тензор энергии-импульса на оболочке, учитывающий вклады вещества, электромагнитных полей и гравитационных волн. Вклад гравитационных волн $T^{(GW)\alpha\beta}$ рассмотрен в гл. 35.

*Замечание*: Законы сохранения в вышесформулированной форме имеют относительные ошибки порядка $M/r$ (вклады «гравитационной потенциальной энергии» падающего вещества), но такие ошибки стремятся к нулю в пределе очень большой оболочки ($r \to \infty$).

*Замечание*: Формулировка законов сохранения, приведенная в следующей главе, более точна и строга, но менее прозрачна физически, чем формулировка, изложенная выше.

## § 19.4. МАССА И МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ЗАМКНУТОЙ ВСЕЛЕННОЙ

*В Ирландии нет змей.*

Утверждение Святого Патрика после изгнания змей из Ирландии (легенда)[1])

**Полная масса-энергия $M$ и момент импульса $S$ замкнутой Вселенной не определены и не могут быть определены**

В соответствии с общей теорией относительности «замкнутая» Вселенная не обладает энергией, моментом импульса и зарядом

[1]) Стокс [89] и другие классические источники отрицают эту легенду. В части I основной рукописи Стокса перечислены работы, содержащие ссылки на старинную рукопись Роулинсона B.512, имеющую 154 листа, написанные в две колонки различными лицами в XIV и XV столетиях (*ср. каталог рукописных кодексов Бодлеяновской библиотеки*, т. 1, часть 5, Оксфорд, 1862, столбцы 728—732). Строка 14, лист 97b. 1 этой рукописи читается в переводе Стокса, часть I, стр. XXX, так: «Как рай без животных, без змей, без льва, без дракона, без скорпиона, без мыши, без лягушки, так и Ирландия без опасных зверей, опасен только волк...»

по следующей простой причине. Чтобы что-то взвесить, необходима платформа, на которой надо стоять при взвешивании.

Для взвешивания Солнца определяют периоды и главные полуоси планетных орбит и применяют кеплеровский закон «1—2—3», $M = \omega^2 a^3$. Для определения момента импульса Солнца $\boldsymbol{S}$ (задача космической техники 1970 или 1980 годов!) измеряется прецессия гироскопа на околосолнечной орбите или исследуются другие аспекты «увлечения инерциальной системы отсчета». Для определения электрического заряда тела его окружают большой сферой, вычисляют электрическое поле, нормальное к поверхности в каждой точке этой сферы, интегрируют его по сфере и применяют теорему Гаусса. Но в замкнутой модели Вселенной с топологией 3-сферы гауссова 2-сфера, достаточно широко расширяясь при переходе от точки к точке, коллапсирует в ничто в антиподной точке. Также в ничто коллапсирует и попытка извлечь полезную информацию о «заряде Вселенной»: заряд тождественно равен нулю. По той же причине любой «поверхностный интеграл» (детали см. в гл. 20), определяющий массу-энергию или момент импульса, превращается в ничто. Иными словами: вне замкнутой Вселенной нет места для пробного объекта или гироскопа на кеплеровской орбите, с помощью которых можно было бы определить так называемую «полную массу» или «покоящуюся систему отсчета», или «4-импульс», или «момент импульса» системы. Эти термины не определены и не могут быть определены. Слова есть; смысла нет.

Отсутствие 4-импульса у замкнутой Вселенной кажется с первого взгляда волнующим, но гораздо более волнующими были бы четыре числа и авторитетное заявление, что они представляют собой компоненты некоего воображаемого «полного 4-вектора энергии-импульса Вселенной». Компоненты относительно какой локально лоренцевой системы отсчета? В какой точке? И что можно сказать об изменении этого вектора при параллельном переносе по замкнутому пути, возвращающему к этой странно выделенной точке? Счастливое спасение от этих затруднений заключается в том, что вопроса нет и не может появиться!

Представьте себе фантастически точное измерение энергии $\gamma$-луча. Экспериментатор желает знать, сколько вносит этот $\gamma$-луч в полную массу-энергию Вселенной. Измерив энергию в лаборатории, он затем учитывает поправку на отрицательную гравитационную энергию связи с Землей. В результате получается энергия фотона, вырвавшегося из гравитационного поля Земли:

$$E_{\text{исправленная}} = h\nu\,(1 - M_\oplus/R_\oplus).$$

Но это лишь первая из цепи поправок на потерю энергии (красное смещение) фотона, ускользающего из гравитационного поля Солнечной системы, Галактики, Местной группы галактик, Сверхскопления. А что дальше? Поправки не исчезнут до тех пор, пока

$$E_{\text{исправленная}} \neq 0.$$

Полной противоположностью зарядово-моментно-энергетически безликой замкнутой Вселенной служат привлекательные возможности определения и измерения всех трех величин в любом асимптотически плоском пространстве. Во всех случаях, представляющих астрономический и астрофизический интерес (дополнение 19.2), чтобы заметить, насколько пространство отличается от плоского, достаточно измерить отклонение $(-g_{00})^{1/2}$ от единицы. В окрестности области с любой, как угодно сложной динамикой, если только с некоторой точностью геометрия асимптотически плоская, имеет смысл с той же точностью говорить о полном 4-векторе энергии-импульса динамической области $\mathbf{P}$ и ее полном собственном моменте импульса $\mathbf{S}$. Параллельный перенос каждого из этих векторов по любой замкнутой кривой в плоской области оставляет их неизменными. Более того, он не зависит от того, насколько сильны отклонения от плоского пространства-времени в динамической области (черные дыры, коллапсирующие звезды, интенсивные гравитационные волны и т. д.); вдали кривизна будет слабой и 4-импульс и момент импульса будут обнаружены по их отпечаткам на геометрии пространства-времени.

**Асимптотически плоское пространство — ключ к определению $M$ и $S$**

## Дополнение 19.2. ПОПРАВОЧНЫЙ ЧЛЕН К МЕТРИКЕ ВБЛИЗИ ВЫБРАННЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

| | $m$, г $m$, см | $r$, см | $\frac{m}{r} = 1-(-g_{00})^{1/2}$ |
|---|---|---|---|
| На плече Венеры Милосской | $2\cdot10^5 = 1{,}5\cdot10^{-23}$ | 30 | $5\cdot10^{-25}$ |
| На поверхности Земли | $6\cdot10^{27} = 4\cdot10^{-1}$ | $6{,}4\cdot10^{8}$ | $6\cdot10^{-10}$ |
| На расстоянии Земли от Солнца | $2\cdot10^{33} = 1{,}5\cdot10^{5}$ | $1{,}5\cdot10^{13}$ | $1\cdot10^{-8}$ |
| На расстоянии Солнца от центра Галактики | $2\cdot10^{44} = 1{,}5\cdot10^{16}$ | $2{,}5\cdot10^{22}$ | $6\cdot10^{-7}$ |
| На расстоянии Галактики от центра скопления галактик в созвездии Девы | $6\cdot10^{47} = 4\cdot10^{19}$ | $3\cdot10^{25}$ | $1\cdot10^{-6}$ |

# 2

# 20. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ 4-ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

*Мы называем энергией материальной системы в определенном состоянии вклад всех эффектов (измеренный в механических единицах работы), возникающих вне системы при переходе последней произвольным образом из того состояния, в котором она находилась, в заранее заданное состояние.*

ВИЛЬЯМ ТОМСОН (впоследствии лорд КЕЛЬВИН) [1]

*Все формы энергии обладают инерцией.*

АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН, 1905 г.[2]

**Гл. 5 (тензор энергии-импульса) необходима для подготовки к этой главе, которая в свою очередь необходима для подготовки к части гл. 36 курса 2 (генерация гравитационных волн) и будет полезна для понимания гл. 35 (распространение гравитационных волн).**

## § 20.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В гл. 19 изложены ключевые свойства полного 4-импульса **P** и полного момента импульса **S** произвольной гравитирующей системы. Однако осталась недоказанной одна решающая особенность: законы сохранения **P** и **S** (дополнение 19.1). Доказательство этих законов сохранения — основная цель данной главы.

В процессе доказательства мы столкнемся с другими интересными и не менее важными аспектами 4-импульса **P** и момента импульса **S**: с представлением их в форме интегральных гауссовых потоков, с «псевдотензором» энергии-импульса гравитационного поля, с помощью которого строятся объемные интегралы для **P** и **S**, и недокализуемостью энергии гравитационного поля.

## § 20.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ГАУССОВЫ ПОТОКИ ДЛЯ 4-ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

В теории электромагнетизма можно определить полный сохраняющийся заряд источника, суммируя исходящие из него силовые

[1] Цитируется по Максу фон Лауэ (см. [90], стр. 514).

[2] Заключение из его статьи цитируется по Максу фон Лауэ (см. [90], стр. 523).

Интегральные гауссовы потоки для заряда и ньютоновской массы

линии электрического поля, т. е. вычисляя интегральный гауссов поток через двумерную замкнутую поверхность, окружающую заряд:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \oint E^j d^2S_j = \frac{1}{4\pi} \oint E^{0j} d^2S_j. \tag{20.1}$$

Аналогично, в ньютоновской теории можно определить массу источника, вычисляя интегральный гауссов поток:

$$M = \frac{1}{4\pi} \oint \Phi_{,j}\, d^2S_j. \tag{20.2}$$

Эти интегральные потоки возникают потому, что заряд и масса источника оставляют неизгладимые отпечатки на окружающих их электромагнитном и гравитационном полях.

Внешнее гравитационное поле (геометрия пространства-времени) в общей теории относительности несет на себе аналогичные отпечатки не только от полной массы-энергии источника $M$, но и от полного 4-импульса $\mathbf{P}$ и собственного момента импульса $\mathbf{S}$ (см. дополнение 19.1). Поэтому разумно искать интегральные гауссовы потоки, представляющие 4-импульс и момент импульса источника.

Для упрощения поиска выполним его вначале в линеаризованной теории, используя аналогию с максвелловской электродинамикой. В электродинамике выражение для интегрального гауссова потока для заряда следует из уравнений Максвелла $F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^\mu$ и асимметрии $F^{\mu\nu}$ (т. е. $F^{0\mu}{}_{,\mu} = F^{0j}{}_{,j}$), что дает:

$$Q = \int J^0 d^3x = \frac{1}{4\pi} \int F^{0\nu}{}_{,\nu}\, d^3x = \frac{1}{4\pi} \int F^{0j}{}_{,j}\, d^3x = \int \frac{1}{4\pi} \oint F^{0j}\, d^2S_j.$$

теорема Гаусса

Чтобы найти аналогичный интегральный поток в линеаризованной теории, перепишем линеаризованные уравнения поля (18.7) в форме, содержащей объект с нужной симметрией. Таким объектом будет

Определение $H^{\mu\alpha\nu\beta}$

$$H^{\mu\alpha\nu\beta} \equiv -(\bar{h}^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta} - \bar{h}^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} - \bar{h}^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu}). \tag{20.3}$$

Легко убедиться отсюда, что он обладает той же симметрией, что и тензор Римана:

$$\begin{aligned} &H^{\mu\alpha\nu\beta} = H^{\nu\beta\mu\alpha} = H^{[\mu\alpha][\nu\beta]}, \\ &H^{\mu[\alpha\nu\beta]} = 0. \end{aligned} \tag{20.4}$$

Этот объект, подобно $\bar{h}^{\mu\nu}$, преобразуется как тензор при лоренцевых преобразованиях линеаризованной теории, однако он не калибровочно инвариантен и потому не является тензором в общерелятивистском смысле.

Выражение линеаризованных уравнений поля через $H^{\mu\alpha\nu\beta}$

Линеаризованные уравнения поля (18.7) приобретают значительно более простой вид, если их выразить через $H^{\mu\alpha\nu\beta}$:

$$2G^{\mu\nu} = H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta} = 16\pi T^{\mu\nu}. \tag{20.5}$$

Отсюда в силу антисимметрии $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ по $\nu$ и $\beta$ следуют законы сохранения линеаризованной теории, которые обсуждались в § 18.3:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{16\pi} H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta\nu} = 0.$$

Интегральные гауссовы потоки в линеаризованной теории: 1) 4-импульс

Та же антисимметрия, которая приводит к этим уравнениям движения, дает интегральный гауссов поток для полного 4-импульса источника

$$P^{\mu} = \int T^{\mu 0}\, d^3x = \frac{1}{16\pi} \int H^{\mu\alpha 0\beta}{}_{,\alpha\beta}\, d^3x =$$

$$= \frac{1}{16\pi} \int H^{\mu\alpha 0 j}{}_{,\alpha j}\, d^3x = \frac{1}{16\pi} \oint\limits_{\mathscr{S}} H^{\mu\alpha 0 j}{}_{,\alpha}\, d^2S_j. \tag{20.6}$$

теорема Гаусса

Здесь замкнутая двумерная поверхность интегрирования $\mathscr{S}$ должна полностью окружать источник и лежать на трехмерной поверхности постоянного времени $x^0$. Интеграл (20.6) для энергии источника $P^0$, который используется чаще, чем интегралы для $P^j$, сводится к особенно простой форме, если его выразить через $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$:

$$P^0 = \frac{1}{16\pi} \int\limits_{\mathscr{S}} (g_{jk,\,k} - g_{kk,\,j})\, d^2S_j \tag{20.7}$$

(см. упражнение 20.1).

2) момент импульса

Расчет, аналогичный (20.6), но более длинный (упражнение 20.2) дает интегральный поток для полного момента импульса относительно начала координат:

$$J^{\mu\nu} = \int (x^{\mu} T^{\nu 0} - x^{\nu} T^{\mu 0})\, d^3x =$$

$$= \frac{1}{16\pi} \oint\limits_{\mathscr{S}} (x^{\mu} H^{\nu\alpha 0 j}{}_{,\alpha} - x^{\nu} H^{\mu\alpha 0 j}{}_{,\alpha} + H^{\mu j 0\nu} - H^{\nu j 0\mu})\, d^2S_j. \tag{20.8}$$

Обобщение интегральных гауссовых потоков на полностью релятивистский случай

Для вычисления поверхностных интегралов (20.6) — (20.8) (в отличие от случая объемных интегралов) необходимо использовать лишь гравитационное поле вдали от источника. Поскольку это гравитационное поле имеет одинаковый вид в общей теории относительности для сильных источников и в линеаризованной теории для слабых источников, можно использовать эти поверх-

ностные интегралы для вычисления $P^\mu$ и $J^{\mu\nu}$ любого изолированного источника, слабого или сильного:

$$P^\mu = \frac{1}{16\pi}\oint_{\mathscr{S}} H^{\mu\alpha 0j}{}_{,\alpha}\, d^2S_j,$$

$$P^0 = \frac{1}{16\pi}\oint_{\mathscr{S}} (g_{jk,k} - g_{kk,j})\, d^2S_j;$$

$$J^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi}\oint_{\mathscr{S}} (x^\mu H^{\nu\alpha 0j}{}_{,\alpha} - x^\nu H^{\mu\alpha 0j}{}_{,\alpha} + H^{\mu j 0\nu} - H^{\nu j 0\mu})\, d^2S_j$$

в общей теории относительности для любого изолированного источника, если замкнутая поверхность интегрирования $s$ лежит в асимптотически плоской области, окружающей источник, и использованы координаты, асимптотически переходящие в координаты Минковского. (20.9)

Полная масса-энергия, центр масс и собственный момент импульса

Зная $P^\mu$ и $J^{\mu\nu}$, можно вычислить полную массу-энергию $M$ и собственный момент импульса $S^\mu$ источника, используя стандартную процедуру, указанную в дополнении 5.6:

$$M = (-P^\mu P_\mu)^{1/2}, \tag{20.10}$$

$$Y^\mu = -J^{\mu\nu}P_\nu M^2 = \begin{pmatrix}\text{вектор, на который смещается}\\ \text{асимптотическое сферическое}\\ \text{симметричное поле } «M/r»\\ \text{источника относительно поля}\\ \text{с центром в начале координат}\end{pmatrix}, \tag{20.11}$$

$$S_\rho = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}(J^{\mu\nu} - Y^\mu P^\nu + Y^\nu P^\mu)\,P^\sigma/M. \tag{20.12}$$

Особо отметим, что *подынтегральные выражения гауссовых потоков* (20.9) *не калибровочно инвариантны*. Они исчезают в любой локально инерциальной системе отсчета в точке $\mathscr{P}_0[g_{\mu\nu}(\mathscr{P}_0) = \eta_{\mu\nu},\ g_{\mu\nu,\alpha}(\mathscr{P}_0) = 0]$, поскольку

$$g_{\mu\nu,\alpha} = h_{\mu\nu,\alpha} = 0 \to H^{\mu\nu\alpha\beta}{}_{,\alpha} = 0, \qquad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \to H^{\mu\nu\alpha\beta} = 0.$$

Такое поведение выглядит разумным, поскольку их ньютоновский аналог — подынтегральное выражение $\Phi_{,j}$ = (гравитационное ускорение) ньютоновского интеграла (20.2) — также исчезает в локально инерциальной системе отсчета.

Хотя подынтегральные выражения в интегралах не калибровочно инвариантны, полные интегралы $P^\mu$ (4-импульс) и $J^{\mu\nu}$ (момент импульса), несомненно, калибровочно инвариантны! Они имеют смысл и значение независимо от какой-либо системы координат и калибровки. Это тензоры в асимптотически плоской области, окружающей источник.

Чтобы иметь возможность определить энергию и момент импульса, пространство-время должно быть асимптотически плоским. Только в этом случае можно применять линеаризованную теорию и только на основе применимости линеаризованной теории вдали от источника можно обосновать использование интегралов

(20.9) в полной нелинейной теории. Никто не может заставить физика, желающего определить энергию и момент импульса, двигаться вблизи источника. К тому же и нет необходимости так поступать. Он может привести неотразимые соображения, мешающие это сделать: внутренняя структура источника может быть недоступной, непонятной, неинтересной, опасной, слишком далекой или страшной. Требование того, чтобы пространство-время было асимптотически плоским, — не только замечательная, но и решающая особенность интегральных потоков (20.9). Даже координаты должны асимптотически переходить в координаты Минковского, иначе большинство формул этой главы не верны или требуют изменения. В частности, *при вычислении 4-импульса и момента импульса линеаризованной системы интегральные потоки (20.9) необходимо применять только в координатах, асимптотически переходящих в координаты Минковского. Если такие координаты не существуют (пространство-время не является асимптотически плоским на бесконечности), то необходимо полностью отказаться от интегральных потоков и основанных на них по определению величин: полной массы, импульса и момента импульса гравитирующего источника.* Напомним в этой связи обсуждение, проведенное в § 19.4. Там указано, что понятие «полная масса-энергия» ограничено, оно полезно, только если игнорируется космология. («Ср. «световой луч» или «частица» — понятия огромного значения, однако они бессмысленны в области действия волновой оптики или волновой механики.)

**Интегральные гауссовы потоки применимы только в асимптотически плоской области пространства-времени и в координатах, асимптотически переходящих в координаты Минковского**

*Резюме*: Попытки использовать формулы (20.9), не учитывая граничных условий Минковского (и, в частности, попытки просто применять их без изменения в криволинейных координатах), легко и неизбежно ведут к абсурду.

---

УПРАЖНЕНИЯ

### 20.1. Интегральный поток для полной массы-энергии в линеаризованной теории

Покажите, что интегральный поток (20.6) $P^0$ сводится к (20.7). Затем покажите, что в применении к случаю почти ньютоновского источника [линейный элемент (18.15в)] он сводится далее к известному ньютоновскому интегральному потоку (20.2).

### 20.2. Интегральный поток для момента импульса в линеаризованной теории

Выведите интегральный гауссов поток (20.8) для $J^{\mu\nu}$.
[*Указание*: Используя уравнения поля (20.5), покажите, что

$$16\pi x^\mu T^{\nu 0} = (x^\mu H^{\nu\alpha 0k}{}_{,\alpha})_{,k} - H^{\nu j 0\mu}{}_{,j} - H^{\nu 00\mu}{}_{,0}; \qquad (20.13)$$

затем примените теорему Гаусса для вычисления объемного интеграла в уравнении (20.8).]

УПРАЖНЕНИЯ

### 20.3. Интегральные потоки для произвольного стационарного источника

а. Используйте интегральные потоки (20.9) для вычисления $P^\mu$ и $J^{\mu\nu}$ произвольного стационарного источника. В качестве асимптотически плоской метрики вокруг источника используйте (19.13), опустив члены, связанные с гравитационным излучением.

б. Убедитесь, что «вспомогательные уравнения» (20.10) — (20.12) дают правильные выражения для полной массы-энергии $M$ и момента импульса источника $S^\mu$.

---

## § 20.3. ВЫРАЖЕНИЕ 4-ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА В ВИДЕ ОБЪЕМНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В линеаризованной теории легко превратить поверхностные интегралы для $P^\mu$ и $J^{\mu\nu}$ в интегралы, взятые по объему источника; можно просто проделать в обратном порядке тот путь, который впервые привел к поверхностным интегралам [уравнение (20.6); упражнение 20.2]. А как можно совершить аналогичный переход от поверхностных интегралов к объемным в общей теории относительности? Если мыслить прямолинейно, ответ довольно прост. Необходимо только привести полные уравнения поля Эйнштейна к виду

Полные уравнения поля Эйнштейна, выраженные через $H^{\mu\alpha\nu\beta}$

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta} = 16\pi T^{\mu\nu}_{\text{эфф}}, \tag{20.14}$$

аналогичному уравнениям (20.5) линеаризованной теории. Здесь $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ — функция $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$, которая должна определяться равенством (20.3) даже глубоко внутри источника, где $|h_{\mu\nu}|$ может быть $\gtrsim 1$. Уравнения Эйнштейна в таком виде, как и линеаризованная теория, допускают переход от гауссовых интегральных потоков к объемным интегралам

Объемные интегралы для 4-импульса и момента импульса в общей теории относительности

$$P^\mu = \frac{1}{16\pi}\oint H^{\mu\alpha 0j}{}_{,\alpha} d^2S_j = \\ = \frac{1}{16\pi}\int H^{\mu\alpha 0j}{}_{,\alpha j}\, d^3x = \frac{1}{16\pi}\int H^{\mu\alpha 0\beta}{}_{,\alpha\beta}\, d^3x = \int T^{\mu 0}_{\text{эфф}}\, d^3x. \tag{20.15}$$

Аналогично,

$$J^{\mu\nu} = \int (x^\mu T^{\nu 0}_{\text{эфф}} - x^\nu T^{\mu 0}_{\text{эфф}})\, d^3x. \tag{20.16}$$

[Решающим для такого перехода является использование в уравнениях (20.14) частных производных вместо ковариантных.] В этих объемных интегралах, как и во всем предыдущем обсуждении, вдали от источника координаты должны быть асимптотически лоренцевыми ($g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$).

Вспоминая, что $H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta}$ — приближенное линеаризованное выражение для тензора кривизны Эйнштейна (20.5), можно найти вид $T^{\mu\nu}{}_{\text{эфф}}$. Определим нелинейные поправки

$$16\pi t^{\mu\nu} \equiv H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta} - 2G^{\mu\nu}. \tag{20.17}$$

(Представление этих поправок в виде функции от $g_{\mu\nu}$ или $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ требует прямых, но длинных вычислений. Точный вид их в этой книге не понадобится.) Тогда уравнения Эйнштейна гласят

Определение «псевдотензора энергии-импульса» $t^{\mu\nu}$

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta} = 16\pi t^{\mu\nu} + 2G^{\mu\nu} = 16\pi\,(t^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}),$$

так что

Определение $T^{\mu\nu}_{\text{эфф}}$

$$T^{\mu\nu}_{\text{эфф}} = T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}. \tag{20.18}$$

Величину $t^{\mu\nu}$ называют иногда «псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля». Из уравнений поля Эйнштейна (20.14) в силу антисимметричности $H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta}$ по $\nu$ и $\beta$ следует

Закон сохранения для $T^{\mu\nu}_{\text{эфф}}$

$$T^{\mu\nu}_{\text{эфф},\nu} = (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})_{,\nu} = 0. \tag{20.19}$$

Эти уравнения эквивалентны уравнениям $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$, но записаны в частных, а не в ковариантных производных, что позволяет переходить от объемных интегралов к поверхностным и обратно.

$H^{\mu\alpha\nu\beta}$, $t^{\mu\nu}$ и $T^{\mu\nu}_{\text{эфф}}$ — величины, зависящие от выбора координат

Определение и существование всех величин $H^{\mu\alpha\nu\beta}$, $t^{\mu\nu}$ и $T^{\mu\nu}{}_{\text{эфф}}$ зависят от выбора координат; они не существуют независимо от координат, поскольку не являются компонентами тензора или любого другого геометрического объекта. Соответственно уравнения (20.14) — (20.19), содержащие $T^{\mu\nu}{}_{\text{эфф}}$ и $t^{\mu\nu}$, не имеют не зависящего от координат геометрического значения, т. е. не являются «ковариантными тензорными уравнениями». Тем не менее имеется адекватная инвариантность относительно общих преобразований координат, придающая величинам $P^\mu$ и $J^{\mu\nu}$, выраженным в виде интегралов (20.15) и (20.16), геометрический, не зависящий от координат смысл в асимптотически плоской области вдали от источника. Хотя в самих объемных интегралах эту инвариантность заметить трудно, из получающихся из них поверхностных интегралов (20.9) ясно, что никакие преобразования координат, изменяющие координаты только внутри некоторой пространственной ограниченной области, не могут повлиять на значения этих интегралов. Что касается изменения координат в удаленных асимптотически плоских областях, то линеаризованная теория гарантирует, что при преобразованиях Лоренца интегралы $P^\mu$ и $J^{\mu\nu}$ будут преобразовываться как тензоры в специальной теории относительности и что они будут инвариантными относительно бесконечно малых преобразований координат (калибровочных преобразований).

Поскольку $t^{\mu\nu}$ не являются компонентами тензора, они могут быть равны нулю в точке в одной системе координат и быть отлич-

ными от нуля в той же точке в другой системе координат. Получающаяся неоднозначность в определении локализованной плотности энергии $t^{00}$ гравитационного поля эквивалентна неоднозначностям, возникающим при формальном определении $t^{\mu\nu}$. Ясно, что любые величины $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\text{нов}}$, которые совпадают с первоначальными $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ в асимптотически плоской области слабого поля, будут давать те же значения для поверхностных интегралов $P^\mu$ и $J^{\mu\nu}$ (20.9), что и $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\text{нов}}$. Один, особенно удобный выбор был сделан Ландау и Лифшицем (см. § 100 в книге [2]), которые определили

Другие эквивалентные формы $H^{\mu\alpha\nu\beta}$, $t^{\mu\nu}$, $T^{\mu\nu}_{\text{эфф}}$

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\text{L-L}} = \mathfrak{g}^{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\alpha\nu}\mathfrak{g}^{\mu\beta}, \tag{20.20}$$

1) $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\text{L-L}}$

где $\mathfrak{g}^{\mu\nu} \equiv (-g)^{1/2}g^{\mu\nu}$. Они показали, что уравнения Эйнштейна можно записать в виде

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\text{L-L}},_{\alpha\beta} = 16\pi(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\text{L-L}}), \tag{20.21}$$

где компоненты псевдотензора Ландау — Лифшица точно квадратичны по первым производным метрики:

$$\begin{aligned}(-g)\,t^{\alpha\beta}_{\text{L-L}} = \frac{1}{16\pi}\Big\{ &\mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{,\lambda}\mathfrak{g}^{\lambda\mu}{}_{,\mu} - \mathfrak{g}^{\alpha\lambda}{}_{,\lambda}\mathfrak{g}^{\beta\mu}{}_{,\mu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\lambda\mu}\mathfrak{g}^{\lambda\nu}{}_{,\rho}\mathfrak{g}^{\rho\mu}{}_{,\nu} - \\ &- (g^{\alpha\lambda}g_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}{}_{,\rho}\mathfrak{g}^{\mu\rho}{}_{,\lambda} + g^{\beta\lambda}g_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\alpha\nu}{}_{,\rho}\mathfrak{g}^{\mu\rho}{}_{,\lambda}) + g_{\lambda\mu}g^{\nu\rho}\mathfrak{g}^{\alpha\lambda}{}_{,\nu}\mathfrak{g}^{\beta\mu}{}_{,\rho} + \\ &+ \frac{1}{8}(2g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta}g^{\lambda\mu})(2g_{\nu\rho}g_{\sigma\tau} - g_{\rho\sigma}g_{\nu\tau})\,\mathfrak{g}^{\nu\tau}{}_{,\lambda}\mathfrak{g}^{\rho\sigma}{}_{,\mu}\Big\}. \end{aligned} \tag{20.22}$$

2) $t^{\alpha\beta}_{\text{L-L}}$

(Эйнштейн также дал псевдотензор $t_E{}^\mu{}_\nu$ с такими свойствами, однако он не симметричен и не приводит к интегралу для $J^{\mu\nu}$.) Поскольку $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\text{L-L}}$ имеет ту же симметрию, как и $H^{\mu\alpha\nu\beta}$, равен $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ вдали от источника (упражнение 20.4) и уравнения поля (20.21), выраженные через $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\text{L-L}}$, имеют тот же вид, как и уравнения, выраженные через $H^{\mu\alpha\nu\beta}$, то отсюда следует, что

$$T^{\mu\nu}_{\text{L-Lэфф}} \equiv (-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\text{L-L}}) \tag{20.23а}$$

3) $T^{\mu\nu}_{\text{L-Lэфф}}$

обладает всеми свойствами $T^{\mu\nu}_{\text{эфф}}$, введенного в начале этого параграфа:

$$T^{\mu\nu}_{\text{L-Lэфф}},_\nu = 0, \tag{20.23б}$$

$$P^\mu = \int T^{\mu 0}_{\text{L-Lэфф}}\, d^3x, \tag{20.23в}$$

$$J^{\mu\nu} = \int (x^\mu T^{\nu 0}_{\text{L-Lэфф}} - x^\nu T^{\mu 0}_{\text{L-Lэфф}})\, d^3x. \tag{20.23г}$$

---

**20.4. Вид $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\text{L-L}}$ вдали от источника** УПРАЖНЕНИЕ

Покажите, что величины $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\text{L-L}}$, входящие в уравнение (20.20), сводятся к $H^{\mu\alpha\nu\beta}$, (20.3), в области слабого поля вдали от источника.

---

## § 20.4. ПОЧЕМУ НЕВОЗМОЖНА ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Рассмотрим элемент 3-объема $d\Sigma_\nu$ и вычислим вклад «гравитационного поля» этого элемента в 4-вектор энергии-импульса, используя при расчете псевдотензор $t^{\mu\nu}$ или псевдотензор $t^{\mu\nu}_{\text{L}-\text{L}}$, который обсуждался в предыдущем параграфе. Получим

$$\mathbf{p} = \mathbf{e}_\mu t^{\mu\nu}\, d\Sigma_\nu,$$

или

$$\mathbf{p} = \mathbf{e}_\mu t^{\mu\nu}_{\text{L}-\text{L}}\, d\Sigma_\nu.$$

Правильно? Нет, постановка вопроса неверна. Обоснование ошибочно. Результат ошибочен. Идея неверна.

Почему невозможно определить локализованную энергию-импульс гравитационного поля

Имеет смысл спрашивать о количестве электромагнитной энергии-импульса в элементе 3-объема. Во-первых, для этой величины имеется одна и только одна формула. Во-вторых, что более важно, эта энергия-импульс «имеет вес». Она искривляет пространство. Она служит источником, стоящим в правой части уравнений поля Эйнштейна. Она вызывает относительное геодезическое отклонение двух соседних мировых линий, проходящих через рассматриваемую область пространства. Она наблюдаема. «Локальная гравитационная энергия-импульс не обладает ни одним из этих свойств. Для нее нет единственной формулы, а имеется множество различных формул. Две приведенные выше формулы — лишь две из бесконечности. Более того, «локальная гравитационная энергия-импульс» не весит, не искривляет пространство, не служит источником, стоящим в правой части уравнений поля Эйнштейна, не вызывает никакого относительного геодезического отклонения двух соседних мировых линий, проходящих через рассматриваемую область пространства, и не наблюдаема.

Всякий, кто ищет магическую формулу для «локальной гравитационной энергии-импульса», ищет правильный ответ на неправильно поставленный вопрос. К несчастью, в прошлом было потрачено много времени и усилий, чтобы «ответить на этот вопрос», пока исследователи не осознали тщетность подобных попыток и в конце концов выше всех математических доказательств оценили спокойную, но скалоподобную силу эйнштейновского принципа эквивалентности. В любой локальной области можно всегда найти систему отсчета, в которой все «локальные гравитационные поля» (все символы Кристоффеля $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$) исчезают. Отсутствие $\Gamma$ означает отсутствие и «гравитационного поля», а отсутствие локального гравитационного поля означает отсутствие «локальной гравитационной энергии-импульса».

Никто не может или не хочет отрицать, что гравитационные силы вносят вклад в массу-энергию гравитационно взаимодействующей системы. Масса-энергия системы Земля — Луна меньше,

чем была бы масса-энергия этой системы, если бы эти два объекта находились бесконечно далеко друг от друга. Масса-энергия нейтронной звезды меньше, чем масса-энергия того же числа барионов, разведенных на бесконечность. Если вокруг области пустого пространства имеется концентрация гравитационных волн, то в этой области пространства создается чистое притяжение, означающее положительную массу-энергию (см. гл. 35). Вопрос не в существовании гравитационной энергии, а в ее локализуемости. Она не локализуема. Это запрещает принцип эквивалентности.

Взгляните на прошлогоднюю картофелину, испещренную морщинами и бородавками. Отметьте на ней оранжевым карандашом «северный полюс» и «экватор». Длина экватора совсем не равна умноженному на $2\pi$ расстоянию от северного полюса до экватора. Объяснить это «кривизной» так же просто, как объяснить «гравитацией» дефицит массы системы Земля — Луна (или дефицит массы нейтронной звезды, или избыток массы для области пространства, заполненной гравитационными волнами). Несмотря на это, невозможно приписать дефицит длины экватора в одном случае или массы в другом случае каким-либо единственно правильным образом различным элементам многообразия (двумерного в одном случае и трехмерного в другом). Взгляните на поверхность картофелины. Геометрия в малой области этой поверхности локально плоская. А теперь посмотрите на малую область пространства любой из трех гравитирующих систем. В подходящей системе координат в ней нет гравитационного поля. Общий эффект, который мы наблюдаем, будет глобальным, а не локальным. Это то, о чем вопиет математика. Урок неоднозначности $t^{\mu\nu}$!

## § 20.5. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ПОЛНОГО 4-ИМПУЛЬСА И ПОЛНОГО МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Рассмотрим систему, например нашу Галактику или Солнечную систему, состоящую из множества гравитирующих тел. Некоторые из этих тел могут быть высоко релятивистскими (черные дыры, нейтронные звезды), другие — нерелятивистскими. Однако потребуем, чтобы в областях между телами пространство-время было почти плоским (тяготение слабое) — фактически настолько плоским, чтобы всю систему можно было покрыть (почти) глобально инерциальными координатами, исключая малую окрестность каждого тела, в которой тяготение может быть сильным. Такие координаты могут существовать, только если ньютоновский гравитационный потенциал $\Phi \approx \frac{1}{2}(\eta_{00} - g_{00})$ в области между телами мал:

$$\Phi^{\text{между телами}} \sim (\text{масса системы})/(\text{радиус системы}) \ll 1.$$

Этому условию, конечно, удовлетворяет Солнечная система ($\Phi_{\text{между телами}} \sim 10^{-7}$), Галактика ($\Phi_{\text{между телами}} \sim 10^{-6}$), скоп-

ления галактик ($\Phi_{\text{между телами}} \sim 10^{-6}$), *но не Вселенная как целое* ($\Phi_{\text{между телами}} \sim 1$)!

При вычислении объемных интегралов для полного 4-импульса системы разделим объем системы на область, занятую каждым телом (обозначим ее «$A$») и область между телами и пренебрежем вкладом псевдотензора от почти плоской области между телами.

Полный 4-импульс и момент импульса системы гравитирующих тел

$$P^{\mu}_{\text{системы}} = \sum_A \int_A T^{\mu 0}_{\text{эфф}} d^3x + \int_{\substack{\text{область между} \\ \text{телами}}} T^{\mu 0}_{\text{эфф}} d^3x = \\ = \sum_A P^{\mu}_A + \int_{\substack{\text{область между} \\ \text{телами}}} T^{\mu 0} d^3x. \qquad (20.24а)$$

Поскольку вокруг каждого тела пространство-время асимптотически плоское, то $P^{\mu}_A$ будет 4-импульсом тела $A$, как это гравитационно измерит находящийся рядом экспериментатор. Интеграл от $T^{\mu 0}$, взятый по области между телами, будет представлять собой вклад в полный 4-импульс от любого газа, частиц или магнитных полей, существующих вне тела. Аналогичное разбиение момента импульса гласит:

$$J^{\mu\nu}_{\text{системы}} = \sum_A J^{\mu\nu}_A + \int_{\substack{\text{область между} \\ \text{телами}}} (x^{\mu} T^{\nu 0} - x^{\nu} T^{\mu 0})\, d^3x. \qquad (20.24б)$$

Конструктивно эти разбиения показывают, что *полные 4-импульс и момент импульса системы, гравитационно измеряемые наблюдателем, находящимся вне системы, есть суммы $P^{\mu}$ и $J^{\mu\nu}$ каждого отдельного тела, гравитационно измеряемые экспериментатором, находящимся вблизи него, плюс вклады вещества и полей, существующих между телами, вычисляемые с помощью обычной специальной теории относительности.* Это справедливо, даже если некоторые тела «просвистывают» через систему со скоростью, близкой к скорости света; их гравитационно измеряемые $P^{\mu}$ и $J^{\mu\nu}$ на равных правах с $P^{\mu}$ и $J^{\mu\nu}$ остальных тел вносят свой вклад в полные $P^{\mu}$ и $J^{\mu\nu}$!

Окружим эту асимптотически плоскую систему двумерной поверхностью $\mathcal{S}$, покоящейся в некоторой асимптотически плоской лоренцевой системе отсчета. Тогда 4-импульс и момент импульса внутри $\mathcal{S}$ (измеренные в системе покоя $\mathcal{S}$) изменяются со скоростью

Скорости изменения полного 4-импульса и момента импульса

1) выраженные в виде интегрального потока от $T^{\mu\nu}_{\text{эфф}}$

$$\frac{dP^{\mu}}{dt} = \frac{d}{dt} \int T^{\mu 0}_{\text{эфф}} d^3x = \int T^{\mu 0}_{\text{эфф},\,0} d^3x = \\ = -\int T^{\mu j}_{\text{эфф},\,j} d^3x = -\oint T^{\mu j}_{\text{эфф}} d^2S_j \qquad (20.25)$$

и аналогично

$$\frac{dJ^{\mu\nu}}{dt} = -\oint_{S_2} (x^\mu T^{\nu j}_{\text{эфф}} - x^\nu T^{\mu j}_{\text{эфф}})\, d^2S_j. \qquad (20.26)$$

Хотя вклад псевдотензора $t^{\mu\nu}$ в полные 4-импульс и момент импульса в области между телами и вне системы пренебрежимо мал (по предположению), вклад его, вносимый посредством гравитационных волн во временные производные $dP^\mu/dt$ и $dJ^{\mu\nu}/dt$, просуммированный за астрономические периоды времени, может оказаться существенным. Поэтому им нельзя пренебрегать в интегральных потоках (20.25) и (20.26).

При вычислении этих интегральных потоков особенно удобно использовать форму Ландау — Лифшица для $T^{\mu\nu}_{\text{эфф}}$, поскольку она не содержит вторых производных метрики. Положим

$$T^{\mu\nu}_{\text{эфф}} = (-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\text{L-L}}) \approx (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\text{L-L}}),$$

где $t^{\mu\nu}_{\text{L-L}}$ дается уравнениями (20.22). Вклад в интегральные потоки (20.25) и (20.26) могут вносить только те части $t^{\mu\nu}_{\text{L-L}}$, которые затухают на больших $r$ как $1/r^2$ или как $1/r^3$. Для статических решений [$g_{\mu\nu} \sim \text{const} + O(1/r)$] псевдотензор $t^{\mu\nu}_{\text{L-L}}$ затухает как $1/r^4$. Следовательно, вклад вносит только динамическая часть метрики, которая на таких больших расстояниях будет существовать лишь в форме гравитационных волн. Исследование гравитационных волн (гл. 35) покажет, что при усреднении по интервалу в несколько длин волн псевдотензор $t^{\mu\nu}_{\text{L-L}}$ превращается в тензор энергии-импульса $T^{(\text{GW})\mu\nu}$ гравитационных волн, который обладает всеми свойствами, требуемыми от любого тензора энергии-импульса. (Например, согласно уравнениям Эйнштейна $G^{(\text{B})\mu\nu} = 8\pi T^{(\text{GW})\mu\nu}$, он вносит вклад в «фоновую» кривизну пространства-времени, в котором распространяются волны.) Более того, указанное усреднение $t^{\mu\nu}_{\text{L-L}}$ по интервалу в несколько длин волн до вычисления интегральных потоков (20.25) и (20.26) не влияет на величину интегралов. Следовательно, в этих интегралах можно свободно производить замену

$$T^{\mu\nu}_{\text{эфф}} = T^{\mu\nu} + T^{(\text{GW})\mu\nu},$$

получая в результате

$$-\frac{dP^\mu}{dt} = \oint_{\mathscr{S}} (T^{\mu j} + T^{(\text{GW})\mu j})\, d^2S_j, \qquad (20.27)$$

$$-\frac{dJ^{\mu\nu}}{dt} = \oint_{\mathscr{S}} [x^\mu (T^{\nu j} + T^{(\text{GW})\nu j}) - x^\nu (T^{\mu j} + T^{(\text{GW})\mu j})]\, d^2S_j. \qquad (20.28)$$

2) выраженные в виде интегрального потока от $T^{\mu\nu} + T^{(\text{GW})\mu\nu}$

Это тензорные уравнения в асимптотически плоском пространстве-времени, окружающем систему. Все псевдотензоры и другие нетензорные величины исчезли.

Уравнения (20.27) и (20.28) гласят, *что скорость потери 4-импульса и момента импульса системы, измеренная гравитационно, точно равна скорости, с которой уносят 4-импульс и момент импульса вещество, поля и гравитационные волны.*

Эта теорема крайне полезна в мысленных экспериментах, где можно представить себе изменение 4-импульса и углового момента высокорелятивистского тела (например, вращающейся нейтронной звезды), бросая в него издалека частицы (см., например, [91]).

---

УПРАЖНЕНИЕ

**20.5. Полная масса-энергия в ньютоновском пределе**

а. Вычислите $t^{\alpha\beta}_{\text{L}-\text{L}}$ для почти ньютоновской системы с метрикой

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)\, dt^2 + (1 - 2\Phi)\, \delta_{jk}\, dx^j\, dx^k$$

(см. § 18.4). Предположите, что источник изменяется медленно, так что можно пренебречь временными производными $\Phi$ по сравнению с пространственными. [*Ответ:*

$$t^{00}_{\text{L}-\text{L}} = -\frac{7}{8\pi}\Phi_{,j}\Phi_{,j}, \qquad (20.29)$$

$$t^{0j}_{\text{L}-\text{L}} = 0,$$

$$t^{jk}_{\text{L}-\text{L}} = \frac{1}{4\pi}\left(\Phi_{,j}\Phi_{,k} - \frac{1}{2}\delta_{jk}\Phi_{,\ell}\Phi_{,\ell}\right).\ ]$$

(*Замечание*: Приведенный здесь тензор $t^{jk}_{\text{L}-\text{L}}$ представляет собой «тензор напряжений ньютоновского гравитационного поля»; ср. упражнения 39.5 и 39.6.)

б. Пусть источником гравитационного поля является идеальная жидкость с тензором энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)\, u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad p/\rho \sim v^2 \equiv (dx/dt)^2 \sim |\Phi|,$$

и пусть ньютоновский гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению с источником

$$\Phi_{,jj} = 4\pi\rho.$$

Покажите, что энергия источника равна

$$P^0 = \int (T^{00} + t^{00})\,(-g)\, d^3x = \int [\underbrace{\rho/(1-v^2)^{1/2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{лоренцево} \\ \text{сокращение}}} +$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\substack{\text{кинети-}\\\text{ческая}\\\text{энергия}}}+\underbrace{\frac{1}{2}\rho\Phi}_{\substack{\text{потен-}\\\text{циаль-}\\\text{ная}\\\text{энергия}}}\Big]\underbrace{(g_{xx}g_{yy}g_{zz})^{1/2}\,dx\,dy\,dz}_{\text{собственный объем}}+$$

$$+\text{поправки более высокого порядка.} \qquad (20.30)$$

в. Покажите, что «уравнения движения» $T^{\mu\nu}_{\text{L}-\text{L эфф},\,\nu}=0$ сводятся к классическим уравнениям (16.3) ньютоновской гидродинамики.

---

## § 20.6. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИЗ УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

Рассмотрим уравнение поля Эйнштейна

$$\mathbf{G}=8\pi\mathbf{T} \qquad (20.31)$$

в условиях, когда в пространстве нет ничего, кроме свободного электромагнитного поля

$$T^{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}g_{\alpha\beta}F^{\nu\beta}-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}\right) \qquad (20.32)$$

(ср. выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля, приведенное в § 5.6). Чтобы предсказать из (20.31) изменение геометрии со временем, необходимо знать, как изменяется со временем электромагнитное поле. Поле выражается в виде «внешней производной» от 4-потенциала;

$$\mathbf{F}=\mathbf{dA} \quad \text{(язык форм)},$$

или

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad \text{(язык компонент)}, \qquad (20.33)$$

и скорость изменения поля со временем определяется уравнением Максвелла

$$\mathbf{d}^*\mathbf{F}=0,$$

или

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0. \qquad (20.34)$$

Если полагать в духе честного разделения труда, что уравнение Максвелла должно предсказывать развитие во времени максвелловского поля, а уравнение Эйнштейна — эйнштейновского поля,

то можно с неподдельным удивлением обнаружить, что уравнение Эйнштейна (20.31) плюс выражение (20.32) для максвелловского тензора энергии-импульса могут выполнять обе эти функции. Не следует задаваться максвелловскими «уравнениями движения» (20.34). Их можно вывести непосредственно из (20.31) и (20.32). Доказательство проводится в определенной последовательности (см. также упражнение 3.18 и § 5.10).

**Вывод максвелловских уравнений в вакууме из уравнения поля Эйнштейна**

1. Из тождества Бианки $\nabla \cdot \mathbf{G} \equiv 0$ следует закон сохранения энергии-импульса $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$.

2. Закон сохранения выражается на языке компонент в виде

$$0 = 8\pi T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 2F^{\mu\alpha}{}_{;\nu} g_{\alpha\beta} F^{\nu\beta} + 2F^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} F^{\nu\beta}{}_{;\nu} - g^{\mu\nu} F_{\sigma\tau;\nu} F^{\sigma\tau}. \quad (20.35)$$

3. Оставляя неизменным средний член, преобразуем первый член таким образом, чтобы он, как и последний, содержал множитель $F^{\sigma\tau}$. С этой целью заменим в первом члене индексы $\nu\beta$ у $F^{\nu\beta}$ на $\sigma\tau$ и $\tau\sigma$ и разделим его на сумму

$$F^{\mu\alpha}{}_{;\sigma} g_{\alpha\tau} F^{\sigma\tau} + F^{\mu\alpha}{}_{;\tau} g_{\alpha\sigma} F^{\tau\sigma} = (F^{\mu}{}_{\tau;\sigma} - F^{\mu}{}_{\sigma;\tau}) F^{\sigma\tau} =$$
$$= g^{\mu\nu} (F_{\nu\tau;\sigma} + F_{\sigma\nu;\tau}) F^{\sigma\tau}. \quad (20.36)$$

4. Комбинируя первый и последний члены в (20.35), получаем

$$g^{\mu\nu} (F_{\nu\tau;\sigma} + F_{\sigma\nu;\tau} + F_{\tau\sigma;\nu}) F^{\sigma\tau}. \quad (20.37)$$

Индексы у производных от тензора электромагнитного поля расположены в циклическом порядке. Если выписать явно ковариантные производные, то в силу этого обстоятельства все члены, содержащие коэффициенты связности $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$, аннулируются. Поэтому ковариантные производные можно заменить обычными. Более того, если выразить тензор электромагнитного поля через потенциалы согласно равенству (20.33), то сумма этих трех производных тождественно обратится в нуль. В результате в законе сохранения (20.35) останется только второй член, дающий четыре равенства ($\mu = 0, 1, 2, 3$),

$$F^{\mu}{}_{\beta} F^{\beta\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (20.38)$$

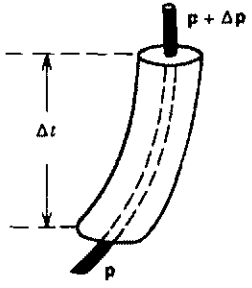
для четырех величин ($\beta = 0, 1, 2, 3$)

$$F^{\beta\nu}{}_{;\nu}. \quad (20.39)$$

5. Детерминант, составленный из коэффициентов четырех уравнений (20.38) для четырех неизвестных (20.39), имеет величину

$$\begin{vmatrix} F^0{}_0 & F^0{}_1 & F^0{}_2 & F^0{}_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F^3{}_0 & F^3{}_1 & F^3{}_2 & F^3{}_3 \end{vmatrix} = -(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B})^2 \quad (20.40)$$

(см. упражнение 20.6 п. «и»). В вырожденном случае эта функция четырех переменных $(t, x, y, z)$ исчезает на одной или нескольких




ФИГ. 20.1.

«Мировая трубка». Изменение 4-импульса частицы определяется потоком 4-импульса через границу мировой трубки.

гиперповерхностях. Однако вне каждой такой поверхности (т. е. в нормальных точках «пространства-времени») она отлична от нуля. Во всех нормальных точках решение четырех линейных уравнений (20.38) с отличным от нуля детерминантом приводит к тождественному обращению в нуль четырех неизвестных (20.39), другими словами, выполняются максвелловские «уравнения движения»

$$F^{\beta\nu}{}_{;\nu} = 0$$

и они должны выполняться как следствие уравнения поля Эйнштейна (20.31) плюс выражение (20.32) для тензора энергии-импульса. Специальные случаи допускают контрпримеры (см. упражнение 20.8), но в общем случае не обязательно взывать к максвелловским уравнениям движения, их можно вывести из уравнений поля Эйнштейна.

Обратимся теперь от динамики самого максвелловского поля к динамике заряженной частицы, движущейся под действием максвелловского поля. Заранее не будем отдавать предпочтения уравнению движения Лоренца перед уравнением движения Максвелла, а выведем его, обратившись еще раз к уравнению поля Эйнштейна или более непосредственно к его следствию — принципу локального сохранения энергии-импульса.

**Вывод уравнения для лоренцевой силы из уравнения поля Эйнштейна**

Возьмем отрезок мировой линии частицы от $t = t$ до $t = t + \Delta t$ (фиг. 20.1) и построим вокруг него «мировую трубку». Так, при каждом значении временной координаты $t$, принимая положение частицы за центр, проводим вокруг него сферу радиусом $\varepsilon$; замечаем, как последовательные сферы образуют требуемую мировую трубку. Наденем на эту трубку «шапки» во времена $t$ и $t + \Delta t$. Две шапки вместе с соответствующей мировой трубкой ограничивают область пространства-времени, в которой энергия и импульс не возникают и не исчезают (на языке тождества Бианки, гл. 15, это означает, что «не рождается момент вращения»). Поэтому энергия и импульс, выходящие из «верхней» шапки, должны быть равны

энергии и импульсу, входящим в «нижнюю» шапку, плюс количество энергии и импульса, переносимое поперек трубки максвелловским полем. Такой анализ, будучи проведенным в плоском пространстве-времени, приводит к уравнению Лоренца в элементарной форме (см. гл. 3 и 4)

$$d\mathbf{p}/d\tau = e(\mathbf{F}, \mathbf{u}) \qquad \text{(язык форм)}$$

или к уравнению движения Лоренца в ковариантной форме в искривленном пространстве-времени

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{p} = m\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = e(\mathbf{F}, \mathbf{u}) \qquad \text{(язык форм)}$$

или

$$m\left[\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right] = eF^\alpha{}_\beta\frac{dx^\beta}{d\tau} \qquad \text{(язык компонент).} \quad (20.41)$$

«Приходим к уравнению движения Лоренца», но только после разрешения труднейших принципиальных проблем, возникающих на пути вывода. Чтобы понять, как со всей строгостью вычислить баланс энергии-импульса, нужно понять, что представляет собой частица! Немногие расчеты во всей физике делались столь многочисленными способами и столь многими ведущими исследователями от Лоренца и его предшественников до Дирака и Рерлиха (для более полного понимания см. [92, 93]). Из всего рассмотренного два вопроса не перестают привлекать внимания.

**Действие на частицу ее собственного электромагнитного поля («радиационное торможение»)**

1. В соответствии с законом (20.41) для лоренцевой силы частица реагирует на поле. Поле есть сумма вкладов от внешних источников и самой частицы. Как вычислить поле, создаваемое частицей в самой частице? Поскольку оно не включено в «наблюдаемую массу» $m$ в (20.41), эта величина должна вычисляться как полуразность запаздывающего и опережающего полей, созданных частицей (более подробное обсуждение данного вопроса в связи с испусканием гравитационных волн см. в § 36.11). Эта разность не сингулярна и на мировой линии имеет следующее простое значение (справедливое, вообще говоря, для точечных частиц и для частиц конечного размера, причем для последних оно справедливо тогда и только тогда, когда изменения скорости частицы за время пролета через нее света пренебрежимо малы по сравнению со скоростью света; см., например, [94]):

$$\frac{1}{2}(F_{\text{запазд}} - F_{\text{опереж}})^{\mu\nu} = \frac{2e}{3}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d^3x^\nu}{d\tau^3} - \frac{d^3x^\mu}{d\tau^3}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right). \quad (20.42)$$

Каждый приемлемый способ рассуждения всегда приводит к выражению (20.42). Оно также представляет собой поле, требуемое для воспроизведения давно известного и досконально изученного закона торможения излучением.

Бесконечная собственная энергия точечной частицы

2. «Бесконечная собственная энергия». Вокруг покоящейся или вблизи произвольно движущейся частицы поле равно $e/r^2$, а энергия поля равна

$$(1/8\pi)\int_{r_{\text{мин}}}^{\infty}(e/r^2)^2\,4\pi r^2\,dr=(e^2/2)\,(r_{\text{мин}}^{-1}-\infty^{-1}). \qquad (20.43)$$

Выражение (20.43) расходится, если $r_{\text{мин}}$ устремить к нулю. Для преодоления этой трудности расчет баланса энергии переделывают таким образом, что всегда появляется сумма «собственной энергии» и «голой массы». Считается, что по отдельности оба члена «стремятся к бесконечности» при $r_{\text{мин}}\to 0$, но требуется, чтобы сумма, которая отождествляется с «экспериментальной массой», оставалась конечной. Конечно, частица не является классическим объектом, и расчет энергии должен проводиться на квантовом уровне. Здесь легко укрыться от вида отдельных бесконечностей, однако они остаются и останутся до тех пор, пока не будет понята структура частицы.

Чем оправдано рассмотрение уравнения движения как следствия уравнения поля Эйнштейна

Прежде чем перейти от уравнений движения Максвелла и Лоренца к последнему примеру (вывод уравнений геодезических для незаряженной частицы), не время ли выступить против всей программы «вывода уравнения движения из уравнения поля Эйнштейна»? Во-первых, не претенциозный ли это парад помпезности говорить, что это следует из уравнения поля Эйнштейна» (и даже больше, «из уравнений поля Эйнштейна»), когда на самом деле это следует из такого элементарного и давно установленного принципа, как закон сохранения 4-импульса? Бесспорно, что принцип сохранения исторически был установлен до геометродинамики, так же как и до электродинамики и теорий всех других известных полей. Однако только в теорию Эйнштейна этот принцип входит как тождество. Только здесь сохранение энергии-импульса появляется как совершенно автоматическое следствие внутренней работы машины мира (плотность энергии связана с моментом вращения, а момент вращения автоматически сохраняется; см. гл. 17). Из теории Эйнштейна можно вывести уравнение движения частицы, чего нельзя сделать из теории Максвелла. Поэтому ничто не мешает действовать на заряд «внешней силой», добавленной к силе Лоренца, и записать эту силу таким образом, чтобы заряд следовал некоторой предписанной мировой линии («источник, движимый машиной»). На уравнениях Максвелла никак не отражается переход от мировой линии, удовлетворяющей уравнению движения Лоренца, к мировой линии, которая ему не удовлетворяет. В общей теории относительности ситуация прямо противоположна. При сдвиге от правильной мировой линии (геодезической) к неправильной мировой линии в окрестности этой мировой линии перестают работать уравнения Эйнштейна.

Уравнения Максвелла устроены так, что они автоматически удовлетворяют закону сохранения заряда и требуют сохранения

заряда, но не всё имеет заряд. Уравнения Эйнштейна устроены таким образом, что они автоматически удовлетворяют закону сохранения энергии-импульса, требуют сохранения энергии-импульса и всё имеет энергию. Уравнения поля Максвелла безразличны к введению «внешней» силы, поскольку эта сила никоим образом не угрожает принципу сохранения заряда. Уравнение поля Эйнштейна «чувствует» каждую силу, поскольку каждая сила может приводить к обмену энергией.

Электромагнетизм имеет девиз: «Я пересчитаю весь находящийся здесь электрический заряд». Все, что не имеет заряда, ускользает из поля зрения электромагнетизма.

«Я взвешу все, что здесь есть»,— таков девиз кривизны пространства-времени. Никакая физическая величина не ускользнет из-под такого надзора.

Почему же тогда говорят, что вывод уравнения геодезического движения объекта основан на «эйнштейновском геометродинамическом уравнении поля», а не на «принципе сохранения 4-импульса»? Потому, что геометрия реагирует своей кривизной на массу-энергию в любой форме. И в особенности потому, что геометрия снаружи говорит о массе-энергии внутри, совсем не касаясь вопроса о внутренней структуре (сильные движения, неизвестные силы, запутанно искривленная и даже многосвязанная геометрия).

Если от одного возражения к плану вывода уравнения движения частицы «из уравнения поля» удалось избавиться, то пришел момент рассмотреть другое естественное возражение: не содержит ли внутреннего противоречия применение к «частице» (предполагаемой точечной) уравнения поля, которое имеет дело с континуумом? *Ответ*: При рассмотрении точки противоречие *существует*. Поэтому не рассматривайте точку. Изучайте движения, не занимаясь вообще внутренней структурой, а рассматривая геометрию вне объекта. Эта геометрия предусматривает все управление, необходимое для контроля за движением.

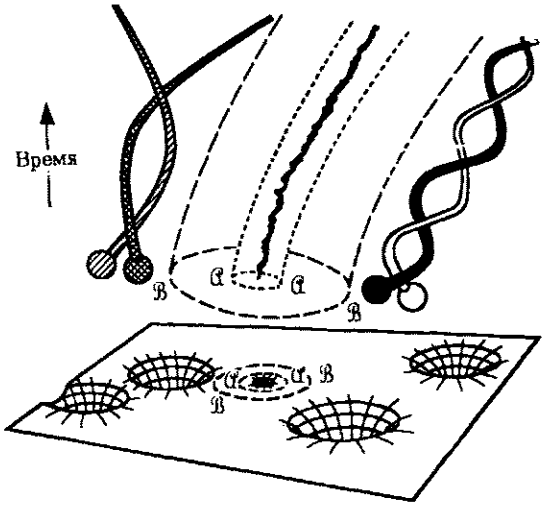
**Как можно избежать усложнений в структуре частицы при выводе уравнений движения: «внешняя точка зрения»**

Уже здесь видно отличие от вышеописанного вывода уравнения движения Лоренца. Там 1) не отдавалось предпочтения геометрии снаружи как индикатору движения внутри, 2) бухгалтерски детально рассматривалась локализация электромагнитной энергии в пространстве и 3) эта бухгалтерия подняла вопрос о внутренней структуре частицы, который не может быть удовлетворительно разрешен.

**Вывод движения по геодезической из уравнения поля Эйнштейна:**

Начнем теперь анализ в новом геометродинамическом духе. Окружив «шварцшильдовскую зону влияния» объекта, отметим «буферную зону» (фиг. 20.2); простирающуюся вплоть до области, где «фоновая геометрия» начинает существенно отличаться от плоской. Предположим, что геометрия в буферной зоне совпадает с геометрией неизменяющегося источника, асимптотически («на границе $\mathscr{B}$ буферной зоны») сливающегося с плоским пространством. Теперь достаточно вспомнить свойства геометрии пространства-времени вдали от неизменяющегося (т. е. неизлучающего)

**1) краткий вывод**




ФИГ. 20.2.
«Буферная зона»— оболочка пространства между $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, в которой геометрия надлежащим образом аппроксимируется сферически симметричной «геометрией Шварцшильда» локализованного центра притяжения (исследуемый объект) в асимптотически плоском пространстве. Внутри $\mathscr{A}$ находится «зона влияния» объекта. В общем случае, когда у объекта отсутствует всякая симметрия, при экстраполяции геометрии внутрь $\mathscr{A}$ метрика все больше и больше отклоняется от идеальной «шварцшильдовской» (влияние на метрику момента импульса, влияние квадрупольного момента, влияние высших моментов). Вне $\mathscr{B}$ находится «фоновая геометрия». При исследовании этой геометрии на все больших и больших расстояниях от $\mathscr{B}$ она все больше и больше отклоняется от плоской (влияние концентрации масс, гравитационных волн и другой геометродинамики).

источника (упражнение 19.3), чтобы сделать ключевой вывод: относительно этого плоского пространства-времени и независимо от его внутренней структуры объект сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения (закон сохранения полного 4-импульса; § 20.5). Другими словами, он подчиняется геодезическому уравнению движения. Если этот результат получается в одно мгновение, то имеет смысл вернуться на шаг назад, проверить его и понять, что он означает и что требует.

2) тщательный вывод

Если объект отсутствует и рассматривается только фоновая геометрия, то геодезическая является полностью определенной математической конструкцией. Кроме того, перенос Ферми — Уолкера вдоль этой геодезической дает полностью определенный способ построения сопутствующей локально инерциальной системы отсчета (см. § 13.6). По отношению к этой системе отсчета изображающая точка геодезической все время остается в покое в начале координат.

**Связь кривизны с моментами частицы вызывает отклонения от движения по геодезической**

Каким образом изменяет эту картину присутствие объекта? Объект обладает моментом импульса, квадрупольным моментом масс и высшими мультипольными моментами, которые взаимодействуют с приливными ускорениями, порождаемыми фоновой геометрией (римановой кривизной). В зависимости от ориентации этих моментов в пространстве взаимодействия сбивают объект с геодезического курса в том или ином направлении (см. § 40.9). Эти аномалии движения тесно связаны с аномалиями геометрии. Но и вблизи идеальной математической геодезической метрика совпадает с метрикой Минковского. В точке, смещенной с геодезической на вектор с нормальными римановыми координатами $\xi^1$, $\xi^2$, $\xi^3$ (см. § 11.6), компоненты метрики отличаются от канонических значений (—1, 1, 1, 1) на величины, пропорциональные 1) квадратам и произведениям $\xi^m$ и 2) компонентам риманова тензора кривизны (приливному ускорению) фоновой геометрии. Эти члены второго порядка вызывают в буферной зоне отклонения от идеальности, которые символически можно описать как отклонения порядка

$$\delta\,(\text{метрика}) \sim r^2 \cdot R \cdot (\text{вторая сферическая гармоника}). \quad (20.44)$$

Здесь $r$ — расстояние от геодезической и $R$ — величина главных компонент тензора кривизны. Объект вызывает не только стандартное «шварцшильдовское» отклонение от метрики плоского пространства-времени

$$\delta\,(\text{метрика}) \sim m/r, \quad (20.45)$$

которое само по себе (на плоском фоне) не вызывает отклонения от движения по геодезической, но приводит к поправочным членам; их символически можно записать как

$$\delta\,(\text{метрика}) \sim (S/r^2)(\text{первая сферическая гармоника}), \quad (20.46)$$

$$\delta\,(\text{метрика}) \sim (\mathcal{I}/r^3)(\text{вторая сферическая гармоника}) \quad (20.47)$$

и члены высшего порядка. Здесь $S$(см$^2$) — типичная компонента вектора момента импульса или «спина», $\mathcal{I}$ (см.$^3$) — характерная компонента момента инерции или тензора квадрупольного момента (подробнее см. гл. 36). Члены высшего порядка имеют коэффициенты более высокого порядка.

**Связь спина с кривизной**

Приливное ускорение объекта, порождаемое окружением объекта («фоновой геометрией»), действует на спин объекта с силой порядка $RS$ и отклоняет его от движения по геодезической с ускорением порядка $RS$:

$$\text{ускорение } (\text{см}^{-1}) \sim \frac{R\,(\text{см}^{-2})\,S\,(\text{см}^2)}{m\,(\text{см})} \quad (20.48)$$

(см. упражнение 40.8). Иначе говоря, окружение объекта и спин искривляют геометрию и эти искривления, тайно сговорившись, сталкивают объект с траектории.

Сумма двух относящихся к делу возмущений метрики качественно имеет вид

$$\delta g \sim r^2 R + S/r^2. \tag{20.49}$$

Если

$$r \sim (S/R)^{1/4}, \tag{20.50}$$

сумма имеет наименьшую величину

$$\delta g \sim (SR)^{1/2}. \tag{20.51}$$

Утверждение «вывести уравнение движения по геодезической с некоторой заданной точностью $\varepsilon$» означает, что метрика в буферной зоне является метрикой Минковского с точностью $\varepsilon$. В приводимом примере из этого следует, что $(SR)^{1/2}$ должно быть порядка $\varepsilon$ или меньше. С величиной $R$ ничего поделать нельзя, так как фоновая кривизна $R$ характеризует фоновую геометрию. Можно наложить пределы только на массу и моменты объекта. Если, например, доминирующим моментом является момент импульса, то необходимо потребовать, чтобы он был по порядку величины меньше

$$S \sim \varepsilon^2/R. \tag{20.52}$$

Очевидно, это и аналогичные условия, налагаемые на моменты более высокого порядка, легко удовлетворяются, если объект обладает сферической симметрией ($S = 0$, $\mathfrak{t} = 0$, высшие моменты равны 0). В таком случае (снова без учета угловых коэффициентов и индексов) возмущение метрики качественно имеет вид

$$\delta g \sim r^2 R + m/r, \tag{20.53}$$

и буферная зона наилучшим образом ограничивает минимизирующее значение $r$

$$r_{\mathscr{A}} \leqslant [r \sim (m/R)^{1/3}] \leqslant r_{\mathscr{B}}. \tag{20.54}$$

Отклонение метрики в буферной зоне от идеальной метрики Минковского порядка

$$\delta g \sim (m^2 R)^{1/3}. \tag{20.55}$$

Чтобы достигнуть для $\delta g$ любой заданной точности $\varepsilon$, необходимо потребовать, чтобы масса была меньше

$$m \sim \varepsilon^{3/2}/R^{1/2}. \tag{20.56}$$

**Почему ни одно из тел не может двигаться по геодезической пространства-времени**

Ни один из объектов конечной массы, движущийся под влиянием сложного фона, не обладает буферной зоной, в которой геометрия с произвольной точностью приближается к геометрии Минковского. Поэтому неверно говорить, что такой объект движется по геодезической мировой линии. Бессмысленно говорить, что объект конечной массы покоя движется по геодезической мировой линии. Мировая линия чего? Если объект является черной дырой, то внутри его «горизонта» (ловушечная поверхность, мембрана, пропускающая только в одном направлении; см. гл. 33 и 34) нет

точки, связанной с физическими процессами, протекающими снаружи. Геодезическая мировая линия в какой фоновой геометрии? Бессмысленно говорить о геометрии, которая «лежит за» черной дырой или является «фоновой» по отношению к черной дыре [1]).

Почему пробные частицы *должны* двигаться по геодезическим фоновой геометрии

Перейдем от одного движения одного объекта в одном пространстве-времени к непрерывному однопараметрическому семейству пространств-времен, в котором масса объекта $m$ будет параметром, позволяющим отличать одно решение уравнений поля Эйнштейна от другого. Устремим $m$ к 0. Тогда размер буферной зоны и отклонения метрики в ней от метрики Минковского будут стремиться к нулю. В этом пределе («пробная частица») имеет смысл говорить, что в локально инерциальной системе отсчета объект движется равномерно и прямолинейно, или, иначе говоря, он следует по геодезической фоновой геометрии. Кроме того, эта фоновая геометрия полностью определена: она представляет собой предельный случай геометрии пространства-времени при стремлении к нулю параметра $m$ (см. [95]). В этом смысле уравнение движения по геодезическим есть неизбежное следствие уравнения поля Эйнштейна.

Движение заряженной пробной частицы в искривленном пространстве-времени

Понятие «фона» как предела однопараметрического семейства пространств-времен обобщается на случай, когда объект в дополнение к массе обладает зарядом, а окружающее пространство заполнено электромагнитным полем. В этом случае однопараметрическое семейство состоит из решений объединенных уравнений Эйнштейна — Максвелла. Отношение заряда к массе, $e/m$, фиксировано. Масса $m$ по-прежнему является подгоночным параметром. В пределе при $m \to 0$ получается 1) фоновая геометрия, 2) фоновое электромагнитное поле и 3) мировая линия, подчиняющаяся как следствие уравнений поля общерелятивистскому аналогу уравнения движения Лоренца в этом фоне [96]. В противоположность этому так называемая «единая теория электромагнитного и гравитационного полей», которую Эйнштейн в виде эксперимента выдвигал на одном из этапов своего творчества как альтернативу к комбинации своей классической геометродинамики 1915 г. и классической электродинамики Максвелла, как показал Коллауэй [97] приводит к неправильному уравнению движения заряженной частицы. Частица движется как незаряженная, независимо от величины переносимого ею заряда. Если бы такая теория была верна, то не работал бы циклотрон, не существовал бы атом и сама жизнь была бы невозможной.

Поэтому способность приводить к правильному уравнению движения частицы стала сегодня дополнительным козырем в руках общей теории относительности. Идея такой трактовки восходит к Эйнштейну и Громмеру [98]. Поправки к уравнению движения по геодезической, возникающие из-за взаимодействия спина объек-

Работы, посвященные выводу уравнений движения из уравнения поля Эйнштейна

---

[1]) О движении черной дыры во внешнем гравитационном поле см. [513]. — *Прим. ред.*

та (обладающего конечными размерами) и кривизны фоновой геометрии, рассматривались Папапетру [99] и более подробно Пирани [100] (см. также упражнение 40.8). Этому вопросу посвящена книга Инфельда и Плебаньского [16]. В § 40.9 показано, как поправки к уравнению движения по геодезической вносят свой вклад в орбиты Луны и планет. Некоторые проблемы, возникающие, когда изучаемый объект фрагментирует или испускает направленный поток излучения, а также нерешенные принципиальные вопросы обсуждались Уилером [101].

Если обратиться от объекта бесконечно малой массы в пределе к объекту конечной массы, то непростую ситуацию будет тогда представлять система незаряженных черных дыр (гл. 33). Все, что можно сказать о движении этих объектов, следует из уравнения Эйнштейна без источников $\mathbf{G} = 0$, примененного к области пространства-времени, лежащей вне горизонтов (см. гл. 34) нескольких объектов. Теорией, описывающей движение, является в таком случае геометродинамика и только геометродинамика.

Следует подчеркнуть, что рассмотрение движения в этом параграфе проводилось полностью в рамках классической теории. В реальном мире, описываемом квантовой физикой, геометрия везде испытывает неизбежные, естественные нулевые флуктуации (гл. 43). Вычисленные локальные кривизны, связанные с этими флуктуациями в масштабах порядка планковской длины [$L = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1{,}6 \cdot 10^{-33}$ см], громадны [$R \sim 1/L^2 \sim 0{,}4 \cdot 10^{66}$ см$^{-2}$] по сравнению с кривизной, создаваемой в значительно больших масштабах любым известным объектом (электроном или звездой). Детальный анализ взаимодействия этих двух кривизн не проводился. Такой анализ должен дать сглаженную геометрию, усредненную по областям с размерами, превышающими локальные квантовые флуктуации. В этой усредненной геометрии объект будет двигаться по геодезической. Это то, что ожидается (и тут нет причин для вопроса), но еще не было доказано.

**Квантовомеханические ограничения вывода**

---

**УПРАЖНЕНИЯ**

### 20.6. Простые свойства электромагнитного поля и тензора энергии-импульса электромагнитного поля

а. Покажите, что «скаляр»—$1/2\ F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ (инвариантный относительно преобразований координат) и «псевдоскаляр» $1/4\ F^*_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ (воспроизводящий себя при преобразовании координат с точностью до знака $\pm$ в зависимости от того, положителен или отрицателен якобиан преобразования) в любой локально инерциальной системе отсчета принимают значения соответственно $\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2$ и $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$ («два лоренц-инварианта» электромагнитного поля).

б. Покажите, что всегда, кроме исключительного случая, когда оба лоренц-инварианта равны нулю (случай, когда поле локально равно «нулю»), вектор Пойнтинга $(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})/4\pi$ по величине меньше, чем плотность энергии $(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)/8\pi$.

УПРАЖНЕНИЯ

в. Заряженный мячик расположен на небольшом расстоянии от северного полюса полосового магнита. Нарисуйте картину электрических и магнитных силовых линий, указав «нулевые» точки поля. Законно ли говорить, что «нулевое поле» является «полем излучения»?

г. Покажите, что электромагнитное поле, соответствующее плоской электромагнитной волне, распространяющейся в направлении $z$, всюду равно нулю.

д. Покажите, что суперпозиция двух монохроматических плоских волн, распространяющихся в различных направлениях, равна нулю самое большее в семействе точек, обладающих мерой нуль.

е. Покажите, что в «вырожденном» случае, когда поле $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ в интересующей точке не равно нулю, вектор Пойнтинга сводится к нулю в локально инерциальной системе отсчета, движущейся в направлении $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ со скоростью

$$v = \operatorname{th}\alpha, \tag{20.57}$$

где параметр скорости $\alpha$ описывается формулой

$$\operatorname{th} 2\alpha = \frac{(\text{вектор Пойнтинга})}{(\text{плотность энергии})} = \frac{2|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}|}{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2}. \tag{20.58}$$

ж. Покажите, что в новой системе отсчета все компоненты электрического и магнитного полей можно положить равными нулю, кроме $E_x$ и $B_x$.

з. Покажите, что $4 \times 4$ детерминант, построенный из компонент поля в смешанном представлении $F_\alpha^\beta$, инвариантен относительно общих преобразований координат. (*Указание*: Воспользуйтесь теоремой, гласящей, что детерминант произведения трех матриц равен произведению детерминантов этих матриц.)

и. Покажите, что будучи вычисленным в специальной локально инерциальной системе отсчета (е), этот детерминант имеет величину $-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2$.

к. Покажите, что в этой же системе отсчета максвелловский тензор энергии-импульса имеет вид

$$\| T^\mu{}_\nu \| = \frac{E_x{}^2+B_x{}^2}{8\pi} \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix}. \tag{20.59}$$

Фарадеево натяжение вдоль силовых линий; фарадеево давление перпендикулярно силовым линиям.)

л. Покажите, что в остальных случаях, когда поле локально равно нулю, всегда можно найти локально инерциальную систему

отсчета, в которой поле имеет вид $E = (0, F, 0)$, $B = (0, 0, F)$, а тензор энергии-импульса поля имеет величину

$$\| T^{\mu}{}_{\nu} \| = \frac{F^2}{4\pi} \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(индекс } \mu \text{ для строк,} \\ \text{индекс } \nu \text{ для столбцов).} \end{matrix} \tag{20.60}$$

м. Покажите, что независимо от того, равно или не равно нулю электромагнитное поле, след максвелловского тензора энергии-импульса равен нулю, $T^{\mu}{}_{\mu} = 0$, а его квадрат кратен единичному тензору

$$T^{\mu}{}_{\alpha} T^{\alpha}{}_{\nu} = \frac{\delta^{\mu}{}_{\nu}}{(8\pi)^2} [(E^2 - B^2)^2 + (2E \cdot B)^2] =$$

$$= \frac{\delta^{\mu}{}_{\nu}}{(8\pi)^2} [(E^2 + B^2)^2 - (2E \times B)^2]. \tag{20.61}$$

## 20.7. Тензор энергии-импульса определяет электромагнитное поле с точностью до угла дуального поворота

а. Задавшись ненулевым симметричным $4 \times 4$ тензором $T^{\mu\nu}$ с нулевым следом $T^{\mu}{}_{\mu} = 0$, квадрат которого кратен величине $M^4/(8\pi)^2$, умноженной на единичную матрицу, покажите, что в зависимости от того, равно нулю («нулевой случай») или положительно это кратное, тензор можно привести к виду (20.60) или (20.59) подходящим вращением в 3-пространстве или соответственно подходящим выбором локально инерциальной системы отсчета.

б. В вырожденном (ненулевом) случае в рассматриваемой системе отсчета покажите, что $T^{\mu\nu}$ является максвелловским тензором энергии-импульса «электромагнитного поля экстремального типа» $\xi_{\mu\nu}$ с компонентами

$$\begin{aligned} E^{\text{внешн}} &= (M, 0, 0), \\ B^{\text{внешн}} &= (0, 0, 0). \end{aligned} \tag{20.62}$$

Покажите, что он является также максвелловским тензором «дуального экстремального поля» ${}^*\xi_{\mu\nu}$ с компонентами

$$\begin{aligned} {}^*E^{\text{внешн}} &= (0, 0, 0), \\ {}^*B^{\text{внешн}} &= (M, 0, 0). \end{aligned} \tag{20.63}$$

в. Вспоминая, что двухкратное применение операции дуализирования (*) к антисимметричному тензору второго ранга (2-форма) в четырехмерном пространстве приводит к тому же тензору с отри-

УПРАЖНЕНИЯ

цательным знаком, покажите, что оператор $e^{*\alpha}$(«дуальное вращение») имеет величину

$$e^{*\alpha} = (\cos\alpha) + (\sin\alpha)^*. \tag{20.64}$$

г. Покажите, что наиболее общим электромагнитным полем, которое может воспроизвести ненулевой тензор $T^{\mu\nu}$ в рассматриваемой, а потому и в любой системе отсчета, будет поле

$$F_{\mu\nu} = e^{*\alpha}\xi_{\mu\nu}. \tag{20.65}$$

д. Выведите соответствующий результат для нулевого случая. [Поле $F_{\mu\nu}$, определенное (в п. «г» и «д») в одной, а потому в каждой системе отсчета, называется «максвелловским корнем квадратным» из $T^{\mu\nu}$, поле $\xi_{\mu\nu}$ — «экспериментальным максвелловским корнем квадратным» из $T^{\mu\nu}$, угол $\alpha$ — углом «дуального поворота электромагнитного поля». См. [102], а также дополнения 20.1 и 20.2, написанные по этой статье.]

### 20.8. Если в протяженной области $(E \cdot B) = 0$, то уравнения Максвелла нельзя вывести из закона сохранения энергии-импульса

Постройте контрпример к утверждению, что уравнения Максвелла

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

следуют из уравнения Эйнштейна; или, более точно, покажите, что даже если 1) дивергенция максвелловского тензора энергии-импульса равна нулю и 2) максвелловское поле есть ротор 4-потенциала $A_\mu$, уравнения Максвелла нарушаются. [*Указание*: Анализ упростится без потери для существа дела, если рассматривать проблему в плоском пространстве-времени. Отсылаем к статье Тайтельбойма [93], в которой проведено разбиение запаздывающего поля произвольно ускоренного заряда на две части, из которых вторая, $F^{\mu\nu}{}_{II}$, удовлетворяет сформулированным требованиям и везде вне мировой линии имеет $(E \cdot B) = 0$, однако не удовлетворяет вышеприведенным уравнениям Максвелла].

### 20.9. Уравнение движения скалярного поля как следствие уравнения поля Эйнштейна

Тензор энергии-импульса безмассового скалярного поля выбран в виде

$$T_{\mu\nu} = (1/4\pi)\left(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}\right). \tag{20.66}$$

Выведите уравнение движения этого скалярного поля из уравнения поля Эйнштейна.

**Дополнение 20.1. ОТЛИЧИЕ СОБСТВЕННО ЛОРЕНЦЕВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОТ ДУАЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ**

| Величина | Общее собственное преобразование Лоренца | Дуальное вращение |
|---|---|---|
| Компоненты максвелловского тензора энергии-импульса или «максвелловского квадрата» поля $F$ | Преобразуются | Не изменяются |
| Инварианты $E^2-B^2$ и $(E\cdot B)^2$ | Не изменяются | Преобразуются |
| Комбинация $[(E^2-B^2)^2+(2E\cdot B)^2]=[(E^2+B^2)^2-(2E\cdot B)^2]$ | Не изменяется | Не изменяется |

**Дополнение 20.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРОЖДЕННОГО (НЕНУЛЕВОГО) ТЕНЗОРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ $F=(E, B)$ В ЛОКАЛЬНО ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА**

| Полевые величины | Вначале | После упрощенного дуального вращения |
|---|---|---|
| *Вначале* | $E$, $B$ | $E$ и $B$ перпендикулярны и $E$ больше $B$ |
| *После упрощенных преобразований Лоренца* | $E$ и $B$ параллельны друг другу и оси $x$ | $E$ параллелен оси $x$, а $B=0$ |

# 2

# 21. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ[1)]

*Всякий раз, когда в природе происходит какое-либо изменение, величина действия, вызванного этим изменением, является наименьшей из возможных.*

ПЬЕР МОРО ДЕ МОПЕРТЮИ, 1746 г.[2)]

*В теории тяготения, как и во всех других областях теоретической физики, проблема должна быть математически правильно сформулирована в той мере, в которой это позволяет природа проблемы; если возможно, то формулировка должна обеспечивать однозначность решения проблемы.*

ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ ФОК, 1959 г.[3)]

*Вещи являются такими, какие они есть, потому что они были такими, какими они были.*

ТОМАС ГОЛД, 1972 г.[4)]

*Calculemus*

ЛЕЙБНИЦ, 1961 г.[5)]

**Эта глава полностью относится к курсу 2. Никакого предварительного знакомства с ранее рассмотренным материалом из курса 2 здесь не требуется, однако гл. 9—11 и 13—15 будут полезны. Данная глава необходима как подготовительный материал к дополнению 30.1 о перемешанном мире и к гл. 42 и 43.**

## § 21.1. ДИНАМИКА ТРЕБУЕТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Нет более ошибочного и в то же время более правильного плана предсказания динамики геометрии, чем следующий: задайтесь распределением массы-энергии и затем для нахождения геометрии решите эйнштейновское уравнение второго порядка

$$\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}. \tag{21.1}$$

---

[1)] Мы сердечно благодарим Карела Кухаржа, Клаудио Тайтельбойма и Джеймса Йорка за участие в подготовке этой главы. Мы признательны за разрешение воспользоваться лекционными записями Кухаржа и сослаться на его результаты (особенно в упражнении 21.10) и результаты Йорка [особенно уравнения (21.87), (21.88) и (21.152)] до их опубликования.

[2)] Из книги [105].

[3)] Из книги [12].

[4)] Из разговора с Уилером.

[5)] Слово (исчисление) из неозаглавленного очерка, входящего в работу [106].

Задаться распределением массы-энергии в пространстве-времени и найти геометрию пространства-времени? Нет. Задаться полями, которые генерируют массу-энергию, и скоростью их изменения со временем, задаться 3-геометрией пространства и скоростью ее изменения со временем в одно и то же время и найти 4-геометрию пространства-времени в то же самое время? Да. И только в этом случае уравнения геометродинамики и динамики полей сами по себе без дальнейших предписаний извне (нужна только работа!) позволяют предсказывать для всех моментов времени как геометрию пространства-времени, так и течение массы-энергии. Короче говоря, это есть «план» построения геометродинамики, который будет подробно разобран в данной главе.

Для предсказания геометрии задайте начальные данные

Можно оспаривать этот план. Указать, что искусство решения любой связанной системы уравнений заключается в отделении неизвестных от известных или заданных величин. Настаивать на том, что такое разделение уже проведено в уравнении (21.1). В правой стороне уже стоит источник кривизны, в левой — приемник кривизны в интересующей нас форме: в виде дважды продифференцированных метрических коэффициентов. Заявлять потому, что ничего не остается делать, кроме как идти вперед и решать уравнения для метрических коэффициентов. Однако при более глубоком анализе структуры уравнений (о логическом обосновании анализа связанной системы уравнений в частных производных см. [107]) обнаруживается, что произвести должным образом разделение «источника и приемника» можно, только если сначала произведено еще более важное разделение между «начальными данными и будущим». Таким образом (если просуммировать результаты до проведения анализа), из 10 компонент уравнения Эйнштейна 4 связывают кривизну пространства здесь и теперь с распределением массы-энергии здесь и теперь, а 6 других гласят, как будет эволюционировать найденная таким образом геометрия.

Из 10 компонент уравнения Эйнштейна 4 представляют собой условия на начальные данные

При определении того, какие начальные данные следует задать в соответствующем случае, нет более полезного ведущего принципа, чем вариационный принцип Гильберта

$$I = \int \mathscr{L}\, d^4x = \int L(-g)^{1/2} d^4x = \int Ld \quad \text{(собственный 4-объем)-экстремум} \tag{21.2}$$

↑ упражнение 8.16

или вариант этого принципа (§ 21.6), предложенный Арновиттом — Дезером — Мизнером (АДМ) и обобщенный далее Кухаржом (§ 21.9). Исходя из принципа Гильберта, можно наиболее прямо выявить то, что следует фиксировать на пределах (на начальной пространственноподобной гиперповерхности и на конечной пространственноподобной гиперповерхности), и если необходимо иметь полностью определенную задачу на экстремум, то следует проварьировать геометрию (§ 21.2) по пространству-времени, «заполняющему этот сандвич».

Функция Лагранжа $L$ (скалярная функция) или лагранжева плотность $\mathscr{L} = (-g)^{1/2}L$ (величина, которая должна быть проинтегрирована по координатному объему) в искривленном пустом пространстве строится только из геометрии; однако обычно в пространстве присутствуют поля, которые вносят вклад в лагранжиан:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{геом}} + \mathscr{L}_{\text{поля}} = (-g)^{1/2}L;$$
$$L = L_{\text{геом}} + L_{\text{поля}}. \tag{21.3}$$

**Новый вывод тензора энергии-импульса**

Варьирование лагранжиана $L_{\text{полн}}$ по типичному метрическому коэффициенту оказывается во всех отношениях наиболее удобным способом для получения (т. е. для вычисления) соответствующих компонент симметричного тензора энергии-импульса поля (§ 21.3).

Компьютер, учитывающий влияние этого поля на геометрию и вычисляющий эволюцию метрики со временем последовательно от одного момента времени к другому, налагает собственное упорядочение на события пространства-времени. Фактически он разрезает пространство-время на большое число пространственноподобных сечений. При этом оказывается наиболее удобным «навести отдельную бухгалтерию» 1) на 3-геометрию отдельных сечений и 2) на связь между одним таким сечением и следующим, выраженную через «функцию хода» $N$ и 3-векторную «функцию сдвига» $N_i$.

Внутренняя 3-геометрия индивидуального сечения или «гиперповерхности одновременности» определяет в себе и собой трехмерную риманову кривизну, внутреннюю по отношению к этой гиперповерхности; однако для полного описания этой гиперповерхности необходимо также знать внешнюю кривизну (§ 21.5), указывающую, как данная гиперповерхность искривлена по отношению к окружающему четырехмерному пространственно-временному многообразию.

Исходя из расщепления 4-геометрии на пространство плюс время, можно придать принципу действия Гильберта простую и полезную форму (§ 21.6).

В наиболее элементарном примере приложения принципа действия в механике, где записывают

$$I = \int_{x', t'}^{x, t} L\,(dx/dt, x, t)\,dt \tag{21.4}$$

и находят экстремум интеграла, уже известно, что получающаяся «динамическая длина пути», или «динамическая фаза», или «действие»,

$$S\,(x, t) = I_{\text{экстремум}}, \tag{21.5}$$

является существенной величиной по меньшей мере потому, что оно дает (с точностью до коэффициента $\hbar$) фазу квантовомеханической волновой функции. Кроме того, скорость изменения действия с положением определяет импульс

$$p = \partial S\,(x, t)/\partial x, \tag{21.6}$$

а скорость (со знаком минус) изменения действия со временем дает энергию (фиг. 21.1)

$$E = -\partial S\,(x,\ t)/\partial t. \tag{21.7}$$

Связь между этими двумя характеристиками системы волновых гребней

$$E = H\,(p,\ x), \tag{21.8}$$

Гамильтониан как дисперсионное соотношение

которую можно назвать «дисперсионным соотношением» или как-нибудь иначе, представляет собой главный предмет обсуждения в механике.

Если рассматривать динамику геометрии в формулировке Арновитта — Дезера — Мизнера [1]), то оказывается удобным считать заданными 3-геометрию ${}^{(3)}\mathcal{G}$ начальной пространственноподобной гиперповерхности и 3-геометрию ${}^{(3)}\mathcal{G}$ конечной пространственноподобной гиперповерхности. Интеграл действия рассматривается как экстремальный по отношению к выбору пространства-времени, заполняющему «сандвич» между этими поверхностями. Если пространство-время определено таким образом, то каждым таким актом автоматически определено разделение собственного времени на этих двух гиперповерхностях. Никакой дополнительной временной переменной не вводится и не рассматривается. Таким образом, понятие ${}^{(3)}\mathcal{G}$ заменяет в геометродинамике две величины $x$ и $t$ динамики частиц. Действие $S$, которое зависело там от $x$ и $t$, зависит здесь от 3-геометрии на поверхности сандвича; таким образом,

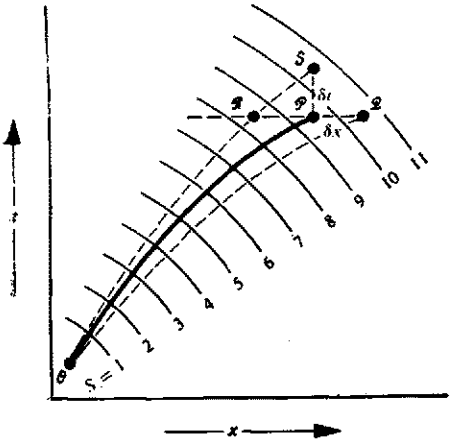
$$S = S({}^{(3)}\mathcal{G}). \tag{21.9}$$

Действие как функция 3-геометрии

Изменение 3-геометрии приводит к изменению действия. Величина изменения действия, вызванного элементарным изменением 3-гео-

---

[1]) *К истории вопроса.* До недавнего времени никто не знал, какая не зависящая от выбора координат геометрическая физическая величина фиксируется *в действительности* на пределах в вариационном принципе Гильберта — Палатини. В своей пионерской работе по гамильтоновой формулировке общей теории относительности Дирак не уделил специального внимания какому-либо вариационному принципу. Он должен был обобщить гамильтонов формализм, чтобы приспособить его к общей теории относительности, вводя «связи первого и второго класса» и обобщения скобок Пуассона классической механики. В противоположность этому в работе Арновитта, Дезера и Мизнера за основу всего изложения берется вариационный принцип в таком виде, будто они не интересуются, какая не зависящая от выбора координат геометрическая физическая величина фиксируется на пределах. Крупным результатом этой работы было отождествление функции хода и функции сдвига из уравнения (21.40) с лагранжевыми множителями, коэффициенты при которых давали прямо и просто дираковские связи. Им не удалось получить естественную и простую временну́ю координату, но эта цель была достигнута с помощью понятия «внешнего времени», введенного Кухаржом и Йорком (§ 21.11). Однако подход Арновитта — Дезера — Мизнера открыл дверь к «внутреннему времени» Шарпа, Баэйрлайна и Уилера, где 3-геометрия задана на пределах и 3-геометрия несет информацию о времени, а это прямо ведет к уилеровской «суперпространственной версии» трактовки подхода Арновитта, Дезера и Мизнера.




ФИГ. 21.1.

Рассмотрение импульса и (с отрицательным знаком) энергии как скорости изменения «динамической фазы», или «действия»,

$$S(x, t) = I_{\text{экстремум}}(x, t) = \left(\begin{matrix}\text{экстремальное}\\ \text{значение}\end{matrix}\right) \int_{x', t'}^{x, t} L(x, \dot{x}, t)\, dt \tag{1}$$

относительно положения и времени, т. е.

$$\delta S = p\delta x - E\delta t. \tag{2}$$

Вариация интеграла $I$ относительно изменения истории вдоль пути $\delta x(t)$ уже равна нулю по причине «оптимизации истории», поэтому будет иметь место лишь единственное изменение

$$\delta S = \delta I_{\text{экстремум}} = L(x, \dot{x}, t)\,\delta t + \int_{x', t'}^{x+\Delta x, t} \delta L\, dt =$$

$$= L\delta t + \int_{x', t'}^{x+\Delta x, t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial x}\delta x\right) dt = L\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Delta x + \int_{x', t'}^{x+\Delta x, t} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)}_{\text{равно нулю в силу экстремальности}} \delta x\, dt. \tag{3}$$

Если рассматривается только изменение $\delta x$ координаты $(x, t)$ конечной точки (изменение истории от $\mathcal{OP}$ к $\mathcal{OQ}$), то $\Delta x = \delta x$. Если производится лишь изменение $\delta t$ в конечной точке (изменение истории от $\mathcal{OP}$ к $\mathcal{OP}$), то $\Delta x =$ $=$ (индикатор изменения от $\mathcal{P}$ к $\mathcal{R}$) $= -\dot{x}\delta t$. Для полной вариации в конечной точке находим, таким образом, $\Delta x = \delta x + \dot{x}\delta t$ и

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x - \left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L\right)\delta t. \tag{4}$$

Поэтому приходим к заключению, что «дисперсионное соотношение» можно получить, если взять соотношения [ср. (2) и (4)]

$$\left(\begin{matrix}\text{скорость изменения}\\ \text{динамической фазы}\\ \text{с положением}\end{matrix}\right) = (\text{импульс}) = p = \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \tag{5}$$

и

$$-\left(\begin{matrix}\text{скорость изменения}\\ \text{динамической фазы}\\ \text{со временем}\end{matrix}\right) = (\text{энергия}) = E = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L, \tag{6}$$

и исключить из них $\dot{x}$ [решите (5) для $\dot{x}$ и подставьте это значение $\dot{x}$ в (6)]; дисперсионное соотношение имеет вид

$$E = H(p, x, t) \tag{7}$$

или

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x, t\right). \tag{8}$$

Каждая черта этого элементарного анализа имеет аналог в электродинамике

метрии, согласно формуле

$$\delta S = \int \pi^{ij}_{\text{истин}} \delta g_{ij}\, d^3x, \tag{21.10}$$

определяет «импульс поля» $\pi^{ij}_{\text{истин}}$ сопряженный геометродинамической координате поля $g_{ij}$. Если сравнить это уравнение из канонической формулировки геометродинамики Арновитта, Дезера и Мизнера (АДМ) с выражением из элементарной механики для изменения действия при изменении конечной точки

$$\delta S = p\delta x - E\delta t, \tag{21.11}$$

то может показаться с первого взгляда, что здесь что-то неправильно, поскольку в (21.10) нет явного намека на время. Однако 3-геометрия сама автоматически несет информацию о времени, а потому равенство (21.10) полно. Более того, если в формуле нет «временной» переменной, а информацию о времени несет сама 3-геометрия ${}^{(3)}\mathcal{G}$, то в формуле также отсутствует и «энергия». Поэтому «дисперсионное соотношение», связывающее скорость изменения действия с некоторыми изменениями «координат поля», или 3-геометрии, принимает вид

$$\mathscr{H}\,(\pi^{ij},\ g_{mn}) = 0, \tag{21.12}$$

т. е. $E = 0$ в (21.8) (подробнее см. § 21.7). Из этого гамильтониана, который лучше назвать «супергамильтонианом», можно извлечь все содержание общей теории относительности Эйнштейна. [Оценка вкладов Дирака, Арновитта, Дезера и Мизнера и других в гамильтонову формулировку геометродинамики содержится в [108], стр. 1113—1118; о значении и следствиях этой формулировки см. § 21.7 и последующие параграфы этой главы.]

**Сопоставление гамильтониана и супергамильтониана**

Отличие гамильтониана от супергамильтониана (см., например, [109]) нигде не проявляется более ясно, чем в задаче о сопряженной частице, движущейся в плоском пространстве под действием поля, выведенного из электромагнитного 4-потенциала $A_\mu(x^\alpha)$. В гамильтоновой трактовке уравнение движения выводится из принципа наименьшего действия

$$0 = \delta I = \delta \int \left[ p_i \frac{dx^i}{dt} - H\,(p_j, x^k, t) \right] dt,$$

где

$$H = -\frac{e}{c}\phi + \left[ m^2 + \eta^{ij} \left( p_i + \frac{e}{c} A_i \right) \left( p_j + \frac{e}{c} A_j \right) \right]^{1/2}.$$

В супергамильтоновом анализе уравнения движения получаются из принципа действия

$$0 = \delta I' = \delta \int \left[ p_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} - \mathscr{H}\,(p_\alpha, x^\beta) \right] d\lambda.$$

Здесь супергамильтониан определяется выражением

$$\mathscr{H}(p_\alpha, x^\beta) = \frac{1}{2}\left[m^2 + \eta^{\mu\nu}\left(p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right)\left(p_\nu + \frac{e}{c}A_\nu\right)\right].$$

Вариационный принцип дает гамильтоновы уравнения для скорости изменения координаты и импульса

$$dx^\alpha/d\lambda = \partial\mathscr{H}/\partial p_\alpha,$$
$$dp_\beta/d\lambda = -\partial\mathscr{H}/\partial x^\beta.$$

Как выясняется из этих уравнений, супергамильтониан $\mathscr{H}$ должен быть постоянной, не зависящей от времениподобного параметра $\lambda$. Величина этой постоянной должна быть задана в качестве начального условия $\mathscr{H} = 0$ («спецификация массы частицы»), после чего она поддерживается самими гамильтоновыми уравнениями. Равенство нулю $\mathscr{H}$ никоим образом не означает исчезновение частных производных

$$\partial\mathscr{H}/\partial p_\alpha \text{ и } -\partial\mathscr{H}/\partial x^\beta,$$

которые входят в гамильтоновы уравнения для скоростей

$$dx^\alpha/d\lambda \text{ и } dp_\beta/d\lambda.$$

Выведенные в одном или в другом формализме уравнения движения эквивалентны, однако ковариантность проявляется более ясно в супергамильтоновом формализме; аналогично обстоит дело и в общей теории относительности.

**Динамическая эволюция геометрии**

Допустимые значения «координат поля» $g_{ij}(x, y, z)$ в 3-геометрии $({}^{(3)}\mathcal{G})$ и импульсов поля $\pi^{ij}_{\text{истин}}(x, y, z) = \delta S/\delta g_{ij}$, совместимые с (21.12), называются «совместимыми начальными данными на исходной гиперповерхности». Можно продолжить, как это описано в § 21.8, последовательное интегрирование по времени шаг за шагом от одной пространственноподобной гиперповерхности к другой и построить всю 4-геометрию. Здесь рассматриваются, согласно математической терминологии, гиперболические дифференциальные уравнения, которые имеют характер волнового уравнения.

В противоположность этому, когда сначала пытаются сформулировать необходимые начальные данные (§ 21.9), то рассматриваются эллиптические дифференциальные уравнения, имеющие характер уравнения Пуассона для потенциала. При анализе этих эллиптических уравнений полезно различать в 3-геометрии 1) часть метрики, которая определяет относительные длины в точке, т. е. углы («конформная часть метрики»), и 2) общий множитель, который входит во все компоненты $g_{ij}$ в точке и определяет абсолютный масштаб длины в этой точке. Это разбиение 3-геометрии на две части обеспечивает особенно простой способ рассмотрения двух специальных проблем для начальных значений — симметричной и антисимметричной по времени (§ 21.10).

Сегодня, как это изложено в § 21.11, формализм АДМ находится в стадии разработки. В трактовке подхода АДМ в уилеровской «суперпространственной» форме [110] считается, что 3-геометрия фиксирована на каждой из граничных пространственноподобных гиперповерхностей. В противоположность этому Йорк (§ 21.11) возвращается назад к первоначальному принципу действия Гильберта и находит то, что должно быть задано на каждой из граничных пространственноподобных гиперповерхностей. Соответствующими данными оказываются «конформная часть 3-геометрии» плюс нечто, близко связанное с тем, что Кухарж [111, 112] называет «внешним временем». Особенно ясный контраст между подходами Уилера и Кухаржа — Йорка обнаруживается, когда 1) рассматривается плоское пространственно-временное многообразие, 2) в этом пространстве-времени делается плоское пространственноподобное сечение и затем 3) на полученном сечении вводится небольшая выпуклость веса $\varepsilon$. 3-геометрия, внутренняя по отношению к этому деформированному сечению, отличается от эвклидовой геометрии только во втором порядке по $\varepsilon$. Поэтому обратный переход от полной 3-геометрии ко времени («продвижение выпуклости вперед») требует в данном случае операции типа извлечения квадратного корня. В отличие от этого в трактовке Кухаржа — Йорка рассматривается «внешняя кривизна» сечения, нечто пропорциональное первой степени $\varepsilon$ и поэтому обеспечивающее в некотором смысле более удобную меру времени (о построении «внешнего времени» для произвольно сильных цилиндрических гравитационных волн, см. особо [111]; см. также дополнение 30.1 о «времени», по-разному определенном в модели «перемешанного мира»). Йорк показывает, что наиболее удобно отождествлять временную переменную с переменной, динамически сопряженной с конформным множителем 3-геометрии.

**Другой выбор данных на граничной гиперповерхности: конформная часть 3-геометрии плюс внешнее время**

Проблему начальных значений в геометродинамике можно сформулировать либо на языке Уилера, либо на языке Кухаржа и Йорка. В любой формулировке (§ 21.9 или § 21.11) проливается свет на современное понимание принципа Маха (§ 21.12). Этот принцип означал для Маха, что «ускорение», рассматриваемое в ньютоновской механике, может иметь смысл, только если это ускорение по отношению к неподвижным звездам или к чему-нибудь, равным образом полностью определенному. Он привел Эйнштейна к общей теории относительности. В современной формулировке принцип гласит, что «масса-энергия там определяет инерцию здесь», и ему дано математическое выражение в виде уравнений для начальных значений.

**Современный Мах: масса-энергия там определяет инерцию здесь**

Анализ проблемы начальных значений связывает прошлое и будущее через пространственноподобную гиперповерхность. В противоположность этому при рассмотрении (§ 21.13) условий сшивки одного решения уравнения поля Эйнштейна (скажем, фридмановской геометрии, внутренней по отношению к сферическому облаку пыли однородной плотности) с другим решением

(скажем, шварцшильдовской геометрией, внешней по отношению к этому облаку пыли) сталкиваются с гиперповерхностью, соответствующей времениподобному вектору. Данная глава заканчивается замечаниями о гравитационных ударных волнах и о проблеме начальных значений (например, формулировка начальных данных на световом конусе).

## § 21.2. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ ГИЛЬБЕРТА И ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ПАЛАТИНИ

**Вариационный принцип — простейший путь к уравнению Эйнштейна**

За пять дней до того, как Эйнштейн представил свой геометродинамический закон в окончательной и теперь классической форме, Гильберт, воодушевленный более ранней работой Эйнштейна, независимо сформулировал [47] этот закон в простейшей из возможных форм как следствие принципа действия [см. (21.2), (21.3)]:

$$L_{\text{геом}} = (1/16\pi)\,{}^{(4)}R. \tag{21.13}$$

(При переходе от геометрических единиц, в которых записан данный лагранжиан, к обычным единицам замените $1/16\pi$ на $c^3/16\pi G$; при переходе же от динамической фазы, выраженной в единицах действия, к действительной фазе волновой функции, выраженной в радианах, разделите на $\hbar \sim L^{*2}$.) Здесь ${}^{(4)}R$ — скалярный инвариант четырехмерной кривизны, разобранный в дополнении 8.4.

В приведенный выше принцип действия входят вторые производные от метрических коэффициентов. В противоположность этому принцип действия в механике содержит только первые производные динамических переменных, и аналогично в принцип действия в электродинамике входят лишь производные $\partial A_\alpha/\partial x^\beta$. Поэтому и здесь можно было ожидать, что принцип действия будет содержать лишь первые производные вида $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\gamma$. Однако из этих первых производных невозможно построить скалярный инвариант. Чтобы быть инвариантом, лагранжиан $L_{\text{геом}}$ обязан иметь величину, не зависящую от выбора системы координат. Но в окрестности данной точки можно всегда выбрать систему координат, в которой все первые производные от $g_{\mu\nu}$ исчезают. С точностью до постоянной не существует скалярного инварианта, который можно было бы построить однородным образом из метрических коэффициентов и их первых производных.

Обращаясь от первых ко вторым производным, мы получаем 20 отдельных компонент тензора кривизны. Будучи выраженными в локально инерциональной системе, отсчеты этих 20 компонент являются произвольными в пределах шестипараметрического локального преобразования Лоренца. Таким образом, имеется $20-6=14$ независимых локальных характеристик кривизны («инварианты кривизны»), которые не зависят от выбора координат, и каждая из них может быть использована в принципе действия.

Единственный естественный выбор скалярного инварианта кривизны

Однако из этих 14 величин только инвариант ${}^{(4)}R$ линеен по вторым производным от метрических коэффициентов. Любой выбор инварианта, отличного от инварианта Гильберта, усложняет геометродинамический закон и нарушает простое соответствие с ньютоновской теорией тяготения гл. 17.

Первоначально Гильберт принимал в вариационном принципе в качестве независимых пробных функций от $x$, $y$, $z$, $t$ 10 компонент метрического тензора в контравариантном представлении $g^{\mu\nu}$. Позже Палатини [113] обнаружил, что проще и в то же время поучительней причислить к независимым пробным функциям не только 10 компонент $g_{\mu\nu}$, но еще и 40 компонент $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ аффинной связности.

Отказаться от стандартной формулы для связности $\Gamma$ как функции метрики $g$ и пустить $\Gamma$ «качаться на ветру»— не новое предприятие в математической физике. Даже в простейшей проблеме механики можно отказаться от стандартной формулы для импульса $p$ как производной по времени от координаты $x$ и также пустить $p$ «качаться на ветру». Тогда $x(t)$ и $p(t)$ становятся двумя независимыми пробными функциями в новом вариационном принципе:

Предоставление о независимом варьировании координаты и импульса

$$I = \int_{x', t'}^{x, t} \left[ p(t) \frac{dx(t)}{dt} - H(p(t),\ x(t),\ t) \right] dt = \text{экстремум}. \quad (21.14)$$

К счастью, стандартная формула для импульса как функции скорости получается без экстремизации по $p(t)$. Экстремизация по $x(t)$ дает уравнение движения, как и в более элементарном вариационном анализе Эйлера и Лагранжа, где $x(t)$ — единственная пробная функция. Дальнейший анализ этой эквивалентности между двумя видами вариационных принципов в механике частиц проводится в дополнении 21.1. Там же можно найти два вида вариационных принципов в применении к электродинамике.

Чтобы выразить вариационный принцип Гильберта через величины $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $g^{\alpha\beta}$, которые рассматриваются в качестве первичных функций $t$, $x$, $y$, $z$, заметим, что лагранжева плотность равна

$$L_{\text{геом}} (-g)^{1/2} = (1/16\pi)^{(4)}R (-g)^{1/2} = (1/16\pi)\, g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} (-g)^{1/2}. \quad (21.15)$$

Здесь, как и в любом пространственно-временном многообразии с аффинной связностью, имеем (гл. 14)

$$R_{\alpha\beta} = R^{\lambda}{}_{\alpha\lambda\beta}, \quad (21.16)$$

где

$$R^{\lambda}{}_{\alpha\mu\beta} = \partial\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}/\partial x^{\mu} - \partial\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}/\partial x^{\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu} \quad (21.17)$$

и каждая функция $\Gamma$ заранее задается в системе координат симметричной по двум нашим индексам. Чтобы интеграл $I$ из (21.2), (21.3) был экстремальным, требуется, чтобы вариация $I$ из-за

изменения как $g^{\mu\nu}$, так и Г, равнялась нулю; таким образом,

$$0=\delta I=(1/16\pi)\int \delta\left[g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}(-g)^{1/2}\right]d^4x+\int \delta\left[L_{\text{поля}}(-g)^{1/2}\right]d^4x. \tag{21.18}$$

Рассмотрим теперь вариации отдельных множителей в первом и втором интегралах (21.18). Вариация первого множителя тривиальна, $\delta g^{\alpha\beta}$. В вариацию второго множителя $R_{\alpha\beta}$ изменения $g^{\alpha\beta}$ не вносят вклада; появляются только изменения Г. Кроме того, даже если функция $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ сама по себе не тензор, вариация ее $\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ является тензором. Так, в формуле преобразования

**Вариация связности является тензором**

$$\Gamma^{\bar{\nu}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}=\left[\Gamma^{\lambda}_{\sigma\tau}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\bar{\alpha}}}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\bar{\beta}}}+\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\bar{\alpha}}\partial x^{\bar{\beta}}}\right]\frac{\partial x^{\bar{\nu}}}{\partial x^{\lambda}} \tag{21.19}$$

последний член нарушает тензорный характер каждого отдельного набора $\Gamma^{\lambda}_{\sigma\tau}$, но в разности $\delta\Gamma^{\lambda}_{\sigma\tau}$ между двумя альтернативными наборами Г происходит компенсация этих членов. Заметим, что вариация типичной компоненты тензора кривизны $\delta R^{\lambda}{}_{\alpha\mu\beta}$ состоит из двух членов вида $\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta,\mu}$ и четырех членов вида $\Gamma\delta\Gamma$ (для простоты индексы опущены). При рассмотрении тензора одна система координат не имеет никаких преимуществ перед другой. Поэтому выберем систему координат, в которой все наборы Г в рассматриваемой точке исчезают. Члены $\Gamma\delta\Gamma$ пропадают. В этой системе координат вариация кривизны выражается через первые производные величины типа $\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$. Далее необходимо только заменить обычные производные на ковариантные, чтобы получить формулу, справедливую в любой системе координат,

$$\delta R^{\lambda}{}_{\alpha\mu\beta}=\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta;\,\mu}-\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu;\,\beta}, \tag{21.20}$$

и ее свертку

$$\delta R_{\alpha\beta}=\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta;\,\lambda}-\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda;\,\beta}. \tag{21.21}$$

Третий множитель в вариационном принципе есть $(-g)^{1/2}$. Его вариация (упражнение 21.1) равна

$$\delta(-g)^{1/2}=-\frac{1}{2}(-g)^{1/2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{21.22}$$

Другое подынтегральное выражение, а именно лагранжева плотность $L_{\text{поля}}$, будет зависеть от имеющихся полей и их производных, причем предполагается, что она содержит только саму метрику $g^{\mu\nu}$ и не содержит какие-либо производные от $g^{\mu\nu}$.

Для существования экстремума необходимо, чтобы следующее выражение было равно нулю:

$$(1/16\pi)\int\left[\left(R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right)\delta g^{\alpha\beta}+g^{\alpha\beta}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta;\,\lambda}-\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda;\,\beta}\right)\right](-g)^{1/2}d^4x+$$
$$+\int\left(\frac{\delta L_{\text{поля}}}{\delta g^{\alpha\beta}}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}L_{\text{поля}}\right)\delta g^{\alpha\beta}(-g)^{1/2}d^4x=0. \tag{21.23}$$

Сосредоточим внимание в (21.23) на члене, содержащем вариации Γ:

$$(1/16\pi)\int g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta;\,\lambda}-\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda;\,\beta})(-g)^{1/2}d^4x,$$

и проинтегрируем его по частям, чтобы исключить производные от δΓ. Для этого введем понятие *тензорной плотности*, широко применяемое в общей теории относительности. Понятие тензорной плотности вводится из соображений экономии. Без этого понятия следует рассматривать тензор

Понятие тензорной плотности

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}=(-g)^{1/2}[\mu\alpha\beta\gamma]$$

(см. упражнение 3.13) как тензор с $4^4=256$ компонентами, а его ковариантную производную как тензор с $4^5=1024$ компонентами, одна из которых равна

$$\begin{aligned}\varepsilon_{0123;\,\rho}&=\partial(-g)^{1/2}/\partial x^{\rho}\varepsilon_{0123}-\Gamma^{\sigma}_{0\rho}\varepsilon_{\sigma123}(-g)^{1/2}-\Gamma^{\sigma}_{1\rho}\varepsilon_{0\sigma23}(-g)^{1/2}-\\&-\Gamma^{\sigma}_{2\rho}\varepsilon_{01\sigma3}(-g)^{1/2}-\Gamma^{\sigma}_{3\rho}\varepsilon_{012\sigma}(-g)^{1/2}=\\&=[(-g)^{1/2}{}_{,\,\rho}-\Gamma^{\sigma}_{\sigma\rho}(-g)^{1/2}][0123].\end{aligned}$$

Символ $[\alpha\beta\gamma\delta]$ со значениями (0, −1, +1) лишь утяжеляет бухгалтерский учет перестановки индексов. Отбросим это неудобство. Введем нетензорную величину $(-g)^{1/2}$ и *определим* для нее закон ковариантного дифференцирования

$$(-g)^{1/2}{}_{;\rho}=(-g)^{1/2}{}_{,\rho}-\Gamma^{\sigma}_{\sigma\rho}(-g)^{1/2}. \qquad (21.24)$$

Эти 4 компоненты заменяют 1024 компоненты и передают всю существенную информацию, содержавшуюся в них.

С вектором $j_\mu$ связывается векторная плотность

$$\mathfrak{j}_\mu=(-g)^{1/2}j_\mu;$$

с тензором $T_{\mu\nu}$ — тензорная плотность

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu}=(-g)^{1/2}T_{\mu\nu}$$

и т. д.; немецкая готическая буква служит стандартным указателем на присутствие множителя $(-g)^{1/2}$. В некоторых случаях (см., например, § 21.11) удобно умножать компоненты тензора на степени $(-g)^{1/2}$, отличные от 1. В соответствии со значением степени получающуюся совокупность компонент называют в таком случае тензорной плотностью того или иного *веса*.

Закон дифференцирования обычной или стандартной тензорной плотности, образованной из тензора произвольного ранга

$$\mathfrak{A}^{\cdots}_{\cdots}=(-g)^{1/2}A^{\cdots}_{\cdots},$$

имеет вид

$(\mathfrak{A}^{\cdots}_{\cdots})_{;\rho}=(\mathfrak{A}^{\cdots}_{\cdots})_{,\rho}+$ (стандартные $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ члены стандартной ковариантной производной, умноженной на $\mathfrak{A}^{\cdots}_{\cdots}$)$-(\mathfrak{A}^{\cdots}_{\cdots})\Gamma^{\sigma}_{\sigma\rho}$.

Ковариантная производная произведения есть сумма двух членов: ковариантной производной первого сомножителя, умноженной на второй сомножитель, плюс первый сомножитель, умноженный на ковариантную производную второго.

Вернемся теперь к расчету интеграла и скомбинируем множители $g^{\alpha\beta}$ и $(-g)^{1/2}$ в тензорную плотность $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$. Проинтегрируем ковариантно по частям, что оправдано правилом ковариантного дифференцирования произведения. Получим «член на пределах» плюс интеграл

$$-(1/16\pi)\int (\mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{;\lambda} - \delta^{\beta}_{\lambda}\mathfrak{g}^{\alpha\gamma}{}_{;\gamma})\,\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\,d^4x.$$

Этот интеграл — единственный член в интеграле действия, который содержит вариации $\Gamma$ во «внутренних точках», представляющих здесь интерес. Чтобы интеграл был экстремальным, симметризованные коэффициенты $\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ должны равняться нулю, т. е.

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{;\lambda} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\lambda}\,\mathfrak{g}^{\beta\gamma}{}_{;\gamma} - \frac{1}{2}\delta^{\beta}_{\lambda}\,\mathfrak{g}^{\alpha\gamma}{}_{;\gamma} = 0.$$

Этот набор из 40 уравнений для 40 компонент ковариантной производной $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{;\lambda}$ имеет только нулевое решение

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{;\lambda} = 0. \tag{21.25}$$

Таким образом, «плотность, образованная из обратного метрического тензора», является ковариантно постоянной.

Этот простой результат влечет за собой много простых результатов: ковариантное постоянство 1) $(-g)^{1/2}$, 2) $g^{\alpha\beta}$, 3) $g_{\alpha\beta}$ и 4) $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$. Результат 3 представляет здесь интерес, и для его доказательства необходим, как это следует ниже, результат 1. Примем определение (21.24) для ковариантной производной от $(-g)^{1/2}$ и вычислим с помощью упражнения 21.1 обычную производную, которая появляется в первом члене. Для вычисления возникающих в расчете членов вида $\partial\mathfrak{g}^{\alpha\beta}/\partial x^{\lambda}$ используем (21.25) и в результате получим

$$(-g)^{1/2}{}_{;\lambda} = 0.$$

Отсюда следует, что ковариантная производная от $\binom{1}{1}$-тензорной плотности $(-g)^{1/2}\delta^{\alpha}_{\gamma}$ также равна нулю. Но эта тензорная плотность есть произведение тензорной плотности $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ на обычный метрический тензор $g_{\beta\gamma}$. Мы уже знаем, что при ковариантном дифференцировании этого произведения по $x^{\lambda}$ производная от первого множителя равна нулю. Следовательно, произведение первого множителя на производную от второго должно быть равно нулю

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma;\lambda} = 0,$$

откуда вытекает

$$g_{\beta\gamma;\lambda} = 0, \tag{21.26}$$

что и следовало доказать; или, более подробно,

$$\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\lambda}} - g_{\gamma\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\lambda} - g_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\lambda} = 0.$$

Решая эти уравнения для Г, которые вплоть до настоящего момента были независимы от $g_{\beta\gamma}$, получаем стандартное уравнение для коэффициентов связности

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (g_{\mu\sigma, \nu} + g_{\sigma\nu, \mu} - g_{\mu\nu, \sigma}), \tag{21.27}$$

как требуется в римановой геометрии.

Аналогично, приравнивая нулю коэффициент при $\delta g^{\alpha\beta}$ в вариации (21.23), находим все 10 компонент уравнения поля Эйнштейна в виде

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi \underbrace{\left( g_{\alpha\beta} L_{\text{поля}} - 2 \frac{\delta L_{\text{поля}}}{\delta g^{\alpha\beta}} \right)}_{\downarrow}. \tag{21.28}$$

тензор, отождествленный в § 21.3 с тензором энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$

Среди вариаций метрики простейшая

$$g_{\text{нов}\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} \tag{21.29}$$

вызывается бесконечно малым преобразованием координат

$$x^{\mu}_{\text{нов}} = x^{\mu} - \xi^{\mu}. \tag{21.30}$$

Хотя метрика изменяется, 3-геометрия остается неизменной. Не имеет значения, является ли она пространственно-временной геометрией, которая рассматривается при экстремизации принципа действия, или нет, является ли она решением уравнений Эйнштейна или нет; интеграл действия $I$ есть скалярный инвариант — число, значение которого зависит от рассматриваемых физических процессов, а вовсе не от системы координат, которая используется при этом. Эта инвариантность равным образом справедлива для каждой из частей интеграла действия в отдельности ($I_{\text{геом}}$ и $I_{\text{полей}}$). Поэтому вариация (21.29) не будет влиять ни на одну из частей. Другими словами, величина

Действие не зависит от простого изменения системы координат

$$\delta I_{\text{геом}} = (1/16\pi) \int G_{\alpha\beta} (\xi^{\alpha;\,\beta} + \xi^{\beta;\,\alpha}) (-g)^{1/2} d^4x =$$

$$= -(1/8\pi) \int G_{\alpha\beta}{}^{;\beta} \xi^{\alpha} (-g)^{1/2} d^4x \tag{21.31}$$

«ковариантное интегрирование по частям»

должна равняться нулю, какова бы ни была 4-геометрия и каково бы ни было изменение $\xi^{\alpha}$. На этом пути свернутые тождества Бианки (гл. 15)

$$G_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = 0 \tag{21.32}$$

предстают под новым углом.

«Нейтральность» принципа наименьшего действия по отношению к простому координатному преобразованию типа (21.29) еще раз показывает, что вариационный принцип, а с ним и уравнение Эйнштейна не могут определять координаты или метрику, а определяют только саму 4-геометрию.

---

УПРАЖНЕНИЕ

**21.1. Вариация детерминанта метрического тензора**

Вспоминая, что величина изменения любого детерминанта равна сумме произведений изменения каждого элемента детерминанта на его алгебраическое дополнение (упражнение 5.5), докажите, что

$$\delta(-g)^{1/2}=\frac{1}{2}(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad \text{и} \quad \delta(-g)^{1/2}=-\frac{1}{2}(-g)^{1/2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

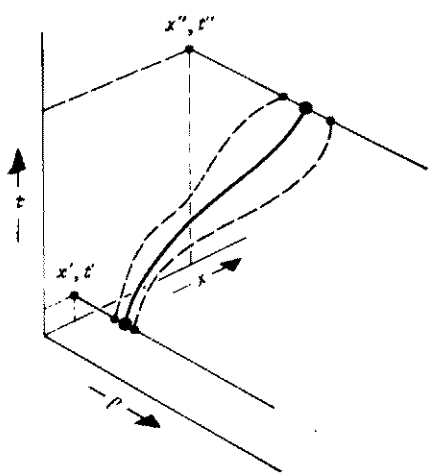
Покажите также, что

$$g=\det\| g^{\mu\nu}\| \quad \text{и} \quad \delta(-g)^{1/2}=+\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

---

## Дополнение 21.1. СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ДЕЙСТВИЯ СО ВРЕМЕНЕМ, СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ДЕЙСТВИЯ С ДИНАМИЧЕСКОЙ КООРДИНАТОЙ (= «ИМПУЛЬСОМ») И ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ (= «ГАМИЛЬТОНИАН»), КОТОРОЕ СВЯЗЫВАЕТ ЭТИ СКОРОСТИ В МЕХАНИКЕ ЧАСТИЦЫ И В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

### А. Пролог об аналоге метода Палатини в механике частицы




В механике частицы рассматривают историю $x = x(t)$, которая протекает между конечными точками $(x', t')$ и $(x, t)$ и которую варьируют при отыскании экстремума интеграла $I = \int L(x, \dot{x}, t)\,dt$, взятого между этими пределами.

Интеграл $I$, выраженный через координаты и импульсы (см. фиг. 21.1), имеет вид

$$I=\int [p\dot{x}-H(p, x, t)]\,dt, \qquad (1)$$

где $x(t)$ — снова та функция, которую надо варьировать, а $p$ — лишь сокращенное обозначение определенной функции $x$ и $\dot{x}$, т. е. $p = \partial L(x, \dot{x}, t)/\partial\dot{x}$. С этой точки зрения вариация импульса $\delta p(t)$ является лишь отражением вариации $\delta x(t)$ и определяется ею.

### 1. Рассмотрение импульса как независимой переменной

Существует, однако, совершенно другой удивительный способ рассмотрения проблемы. Можно рассматривать $x(t)$ и $p(t)$ как две несогласованные и независимые пробные функции. Откажемся от формулы $p = \partial L(x, \dot{x}, t)/\partial\dot{x}$, но только для того, чтобы восстановить ее или эквивалентную ей формулу из нового варианта вариационного принципа «с независимыми координатой и импульсом».

Вариация интеграла (1), определенная и вычисленная этим новым способом, равна

$$\delta I = p\delta x\Big|_{x', t'}^{x'', t''} + \int_{x', t'}^{x'', t''} \left[\left(\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p + \left(-\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)\delta x\right] dt. \tag{2}$$

Требуя исчезновения коэффициента при $\delta p$, получаем искомый новый вариант

$$\dot{x} = \frac{\partial H(p, x, t)}{\partial p}$$

старого соотношения $p = \partial L(x, \dot{x}, t)/\partial\dot{x}$ между импульсом и скоростью. Приравнивая нулю коэффициент при $\delta x$, находим другое уравнение Гамильтона

$$\dot{p} = -\frac{\partial H(p, x, t)}{\partial x}, \tag{3}$$

эквивалентное по содержанию первоначальному уравнению движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \tag{4}$$

Тот факт, что $p(t)$ в этой концепции с двумя независимыми переменными является (до экстремизации!) функцией времени, полностью независимой от функции $x(t)$, яснее всего проявляется в том, что на $p(t)$ в конечных точках не налагается условий, в то время как $x'$ и $x''$ заданы. Поэтому для достижения экстремума подгоняется не только форма истории в пространстве $x$, $p$, $t$, но даже конечные точки могут скользить вдоль двух указанных на фигуре линий подобно бусинкам на проволоке.

### 2. Действие как средство для нахождения дисперсионного соотношения

Обозначим через $S(x, t)$ «действие» или экстремальное значение $I$ для классической истории, которая начинается в $(x', t')$ и кончается в $(x, t)$ (=фаза волны де Бройля, умноженная на $\hbar$). Переход от конечной точки $(x, t)$ к точке $(x + \delta x, t)$ приводит к изменению действия

$$\delta S = p\delta x. \tag{5}$$

Таким образом, импульс есть «скорость изменения действия с динамической координатой».

Переход от конечной точки $(x, t)$ к точке $(x + \delta x, t + \delta t)$

$$(x + \delta x, t + \delta t) = ([x + \dot{x}\delta t] + [\delta x - \dot{x}\delta t], t + \delta t) \tag{6}$$

ведет к изменению действия

$$\delta S = p\,[\delta x - \dot{x}\delta t] + L\delta t = p\delta x - H\delta t. \tag{7}$$

Поэтому гамильтониан есть взятая с отрицательным знаком «скорость изменения действия со временем».

Выраженное через гамильтониан $H = H(p, x)$ «дисперсионное соотношение» для волн де Бройля имеет вид

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x\right). \tag{8}$$

При выводе этого дисперсионного соотношения можно выгодно сократить весь разговор о $p(t)$ и $x(t)$ как независимых переменных и вывести результат едва ли не сразу после определения $I = \int L(x, \dot{x}, t)\,dt$. Аналогично обстоит дело и в электродинамике.

К оставшейся части этого дополнения лучше всего перейти после первого внимательного чтения гл. 21.

## Б. Аналог метода Палатини в электродинамике

В электродинамике без источников рассматриваются две заданные пространственноподобные гиперповерхности $S'$ и $S''$ с магнитными полями $B'$ и $B''$ как функциями положения на каждой из них (для упрощения обозначений второе поле будет далее записываться без верхнего индекса $''$). Варьироваться должен интеграл, взятый по области пространства-времени, заключенной между двумя гиперповерхностями, т. е.

$$I_{\text{Максвелл}} = \int \mathscr{L}_{\text{Максвелл}} d^4x = -\frac{1}{16\pi}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(-g)^{1/2}\,d^4x. \tag{9}$$

### *1. Вариация поля на гиперповерхности и вариация положения гиперповерхности — совершенно различные понятия в электромагнетизме*

Электромагнитное поле **F** в электромагнетизме является физической величиной (ср. 3-геометрию в геометродинамике). В противоположность этому 4-потенциал **A** не имеет непосредственного физического смысла. Изменение калибровки потенциалов

$$A_\mu = A_{\mu\text{нов}} + \partial\lambda/\partial x^\mu$$

не изменяет компонент поля

$$F_{\mu\nu} = \partial A_\nu/\partial x^\mu - \partial A_\mu/\partial x^\nu$$

(ср. преобразования координат, которые изменяют $g_{\mu\nu}$, но оставляют неизменной 3-геометрию ${}^{(3)}\mathscr{G}$). Тем не менее вариацию полей внутри тела сандвича наиболее удобно выражать через результат изменения потенциалов $\delta A_\mu$.

Хочется понять, как на интеграл действия влияют изменения положения верхней пространственноподобной гиперповерхности («многострелочное время»). Представим себе, что точка гиперповерхности с координатами $x, y, z, t(x, y, z)$ смещена в положение $x, y, z, t + \delta t(x, y, z)$. Теперь откажемся от исполь-

зования привилегированной системы координат. Выразим смещение гиперповерхности одновременности через 4-вектор $\delta\mathbf{n}$ (неединичный 4-вектор), нормальный к гиперповерхности $\Sigma$. Элемент $\delta\Omega$ 4-объема, заключенного между первоначальной верхней поверхностью сандвича и новой верхней поверхностью, который в привилегированной системе координат имел вид $(-g)^{1/2}\,\delta t\,(x,\ y,\ z)\,d^3x$, в обозначениях гл. 20 принимает вид

$$\delta\Omega = \delta n^\mu d^3\Sigma_\mu = (\delta\mathbf{n}\cdot d^3\Sigma), \tag{10}$$

где элемент поверхности $d^3\Sigma_\mu$ уже включает в себя множитель $(-g)^{1/2}$.

Суммируя влияние изменений значений поля на верхней гиперповерхности и изменений в положении этой гиперповерхности, имеем

$$\delta S = \delta I_{\text{экстремальн}} = -(1/16\pi)\int\limits_{\text{выше }\Sigma} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(\delta\mathbf{n}\cdot d^3\Sigma)$$

$$+(1/4\pi)\int\limits_{\text{выше }\Sigma} F^{\mu\nu}\underbrace{\Delta A_\mu}_{\substack{\uparrow\\ \text{(заменить эквивалентной величиной}\\ (\delta A_\mu - \delta n^\alpha A_{\mu;\,\alpha})\text{)}}} d^3\Sigma_\nu +$$

$$+(1/4\pi)\int\limits_{\text{4-объем}} \underbrace{F^{\mu\nu}{}_{;\,\nu}}_{\substack{\uparrow\\ \text{должен исчезать в силу экстремальности}\\ \text{интеграла}}}\delta A_\mu\,(-g)^{1/2}\,d^4x. \tag{11}$$

Упростим это выражение, подобрав координаты таким образом, чтобы гиперповерхность стала гиперповерхностью постоянного $t$ и чтобы линии постоянных $x$, $y$, $z$ были нормальны к этой поверхности. Тогда отсюда следует, что элемент объема на этой гиперповерхности содержит единственную неисчезающую компоненту $d^3\Sigma_0 = (-g)^{1/2}d^3x$. В силу симметрии полевой величины $F^{0\nu}$ по двум своим индексам индекс $\nu$ должен быть пространственноподобным ($i = 1,\ 2,\ 3$). Вариация действия принимает вид

$$\delta S = \int\left[\frac{(-g)^{1/2}F^{i0}}{4\pi}\,\delta A_i - \underbrace{\left\{\frac{(-g)^{1/2}F^{i0}}{4\pi}A_{i;\,0} - \mathscr{L}_{\text{Максвелл}}\right\}}_{\substack{\text{добавить и вычесть}\\ \left\{\frac{(-g)^{1/2}F^{i0}}{4\pi}A_0\delta t\right\}_{,\,i}}}\delta t\right]d^3x. \tag{12}$$

*2. Смысл «импульса» поля в электродинамике*

Отождествим выражение (12) с величиной

$$\delta S = \int \pi^i_{EM}\delta A_i d^3x - \int \mathscr{H}\,\delta\Omega, \tag{13}$$

где

$$\pi^i_{EM} = \frac{\delta S}{\delta A_i} = \left(\begin{array}{l}\text{«плотность электромагнитного импульса,}\\ \text{динамически канонически сопряженного } A_i\text{»}\end{array}\right) =$$

$$= \frac{(-g)^{1/2} F^{i0}}{4\pi} = -\frac{\mathscr{E}^i}{4\pi} \tag{14}$$

— простое кратное электрического поля и где

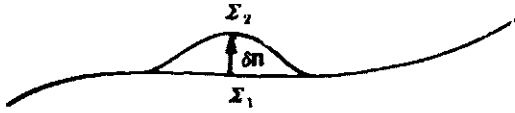
$$\mathscr{H} = -\frac{\delta S}{\delta \Omega} = \left(\begin{array}{l}\text{«плотность}\\ \text{электромагнитного}\\ \text{гамильтониана»}\end{array}\right) = (1/16\pi)\,[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + 4F^{i0}(A_{i;\,0} - A_{0;\,i})] =$$

$$= (1/8\pi)\,(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2). \tag{15}$$

Понятие динамической плотности гамильтониана согласуется с обычным понятием плотности электромагнитной энергии, несмотря на очень несхожий контекст, в котором вводятся и используются эти величины. Однако канонический импульс $\pi^i_{EM}$ не имеет прямого отношения к плотности электромагнитного импульса, определяемого, например, вектором Пойнтинга, несмотря не смущающую аналогию в стандартных названиях этих двух величин. Заметим, что в (13) отсутствует член $\delta A_0$, т. е. $\pi^0_{EM} \equiv 0$.

### *3 Пузырьковое дифференцирование*

«Пузырьковое дифференцирование» по «многострелочному времени», которое появилось в (15), было впервые введено Томонага [114]. Представим себе пространственноподобную гиперповерхность $\Sigma_1$ с определенным на ней как функцией положения магнитным полем $\boldsymbol{B}$ (наблюдатель находится на мировой линии, нормальной к этой гиперповерхности) и возьмем рецепт, согласно которому совершается




переход от этой информации к числу $S$ — действию. (Разделив это действие на $\hbar$, получим фазу «волновой функции» или «амплитуду вероятности» найти определенное распределение значений поля на определенной гиперповерхности.) Перейдем ко второй гиперповерхности $\Sigma_2$, которая везде, кроме непосредственной окрестности данной точки, тождественна $\Sigma_1$. Возьмем распределение поля на $\Sigma_2$, которое тождественно первоначальному распределению на $\Sigma_1$, причем «тождество положения» определяется с помощью нормали. Вычислим разность $\delta S$ между величинами динамической фазы или действий в двух случаях. Разделим эту разность на величину собственного 4-объема $\delta\Omega = \int (\delta\pi \cdot d^3\Sigma)$, заключенного в «пузырьке» между двумя гиперповерхностями. Возьмем частное, вычислим его в пределе, когда размер пузырька стремится к нулю, и придем к «пузырьково-временной производной» от действия, $\delta S/\delta\Omega$.

Что означает утверждение, что действие $S$, кроме зависимости от гиперповерхности $\Sigma$, зависит также от распределения магнитного поля $B$ по гиперповерхности? Действие зависит от физической величины $B = \nabla \times A$, а не от физической величины $A$. Поэтому изменение калибровки $\delta A_i = \partial\lambda/\partial x^i$ не может изменить $S$. С другой стороны, вычисленное значение $S$ для этого изменения $A$ равно

$$\delta\ (\text{действие}) = \delta S = \int \frac{\delta S}{\delta A_i}\,\delta A_i\,d^3x = \\ = \int \frac{\delta S}{\delta A_i}\frac{\partial\lambda}{\partial x^i}\,d^3x = -\int \left(\frac{\delta S}{\delta A_i}\right)_{,\,i}\lambda(x, y, z)\,d^3x. \tag{16}$$

Чтобы действие не зависело от калибровки, выражение (16) должно равняться нулю для произвольного $\lambda(x, y, z)$. Это возможно, если только $S(\Sigma, B) = S$ (гиперповерхность, поле на гиперповерхности) удовлетворяет тождеству

$$\left(\frac{\delta S}{\delta A_i}\right)_{,\,i} = \pi^i_{EM,\,i} = -(1/4\pi)\,\mathscr{E}^i{}_{,\,i} = 0. \tag{17}$$

*4. Электродинамический «закон распространения» Гамильтона — Якоби*

«Дисперсионное соотношение» или «уравнение Гамильтона — Якоби» для электромагнетизма связывает 1) изменения «динамической фазы» или «действия», вызванные изменениями динамических переменных $A_i$ (обобщающих координаты $x$ динамики частицы), с 2) изменениями, вызванными изменениями многострелочного времени (обобщающего единственное время $t$ динамики частицы). Поэтому (15) принимает вид

$$-\frac{\delta S}{\delta\Omega} = \frac{(4\pi)^2}{8\pi}\left(\frac{\delta S}{\delta A}\right)^2 + \frac{1}{(8\pi)}(\nabla \times A)^2. \tag{18}$$

## B. Дисперсионные соотношения для геометродинамики и электродинамики: сравнение и противопоставление

Уравнение (17), утверждающее, что «действие зависит только от той информации в векторном потенциале $A$, которая определяет магнитное поле $B = \nabla \times A$», имеет в геометродинамике непосредственный аналог — уравнение, гласящее, что действие зависит только от информации в метрике $g_{ij}$ на «верхней поверхности сандвича», которая характеризует 3-геометрию ${}^{(3)}\mathscr{G}$ на этой поверхности. В геометродинамике имеется также непосредственный аналог уравнения (18) («динамическое уравнение распространения действия») с одним различием: в электродинамике переменная поля $B$ и «многострелочное время» по характеру различны, тогда как в геометродинамике «поле» и «многострелочное время» можно считать двумя аспектами одной и той же 3-геометрии ${}^{(3)}\mathscr{G}$.

### Г. Принцип действия и дисперсионное соотношение уходят корнями в квантовый принцип: фейнмановский принцип демократического равенства всех историй

Дополнительно о принципах действия в физике см., например, [115—117].

Ньютон [118] на первой странице предисловия к первому изданию своей книги «*Начала*» замечает, что «описание прямых линий..., на которых основана геометрия, принадлежит механике. Геометрия не учит нас проводить эти линии, а требует, чтобы они были проведены».

Ньютоновское замечание тоже вопрос. Механика движет частицу по прямой линии, но что является машиной, с помощью которой механика выполняет это чудо? Ответ дает квантовый принцип. Частица движется по прямой линии, только не двигаясь по прямой линии. Она «наскакивает» на каждую мыслимую мировую линию, ведущую от старта $x'$, $t'$ к точке детектирования $x''$, $t''$, «сравнивает» их одну с другой и выбирает экстремальную мировую линию. Как она выполняет это чудо?

Движение частицы описывается «амплитудой вероятности перехода от $(x', t')$ к $(x'', t'')$». Эта амплитуда, или «пропагатор» $\langle x'', t'' \mid x', t' \rangle$, представляет собой демократическую сумму равновесных вкладов от каждой мировой линии, ведущей от старта к финишу, поэтому

$$\langle x'', t'' \mid x', t' \rangle = N \int e^{iI_H/\hbar}\, \mathscr{D}x. \tag{19}$$

Здесь $N$ — нормировочный множитель, одинаковый для всех историй, $\mathscr{D}x$ — «элемент объема» для суммы по историям. Для «скелетной истории», определяемой заданием $x_n$ в момент $t_n = t_0 + n\Delta t$, элемент объема $\mathscr{D}x$ равен с точностью до постоянного множителя $dx_1 dx_2 \ldots dx_N$. Если история определяется коэффициентом Фурье в таком выражении, как

$$x(t) = \frac{x'(t''-t)+x''(t-t')}{(t''-t')} + \sum_n a_n \sin n\pi \frac{(t-t')}{(t''-t')}, \tag{20}$$

то элемент объема вновь с точностью до постоянного множителя равен $da_1, da_2 \ldots$.

В действительности вклад в вероятность перехода от историй, значительно отличающихся от «экстремальной истории» или «классической истории», стирается гасящей интерференцией. С другой стороны, истории, расположенные вблизи экстремальной истории, складываются с усилением по следующей простой причине: малое отклонение первого порядка от классической истории вызывает изменение фазы, которое будет второго порядка по отклонению.

Этот элементарный пример иллюстрирует ту значительную роль, которую играют экстремальные принципы в классической динамике. Они напоминают, что вся классическая физика основана на квантовой физике. Перечислим основные идеи: 1) принцип суперпозиции амплитуд вероятности, 2) усиливающая и гасящая интерференция, 3) «демократическое равенство всех историй» и 4) амплитуда вероятности, связанная с историей $H$, равна $e^{iI_H/\hbar}$ с точностью до постоянного нормировочного множителя.

Дополнительно о демократическом равенстве историй и сумме по историям см. работы [48, 119—122], книгу Фейнмана и Хибса [123], работы [124—128], обзор и ссылки на литературу см. в [129], а также [130] и [131]. Эта точка зрения обсуждалась многими исследователями в применении к формулировке квантовой геометродинамики, причем первая работа принадлежит Мизнеру [132] и одна из последних—Фадееву [133].

## § 21.3. ЛАГРАНЖИАН МАТЕРИИ И ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

При выводе геометродинамического закона Эйнштейна из принципа наименьшего действия Гильберта источник, стоящий в правой стороне, получается из лагранжиана поля. В противоположность этому при выводе закона Эйнштейна в гл. 17 источник отождествлялся с тензором энергии-импульса поля. Чтобы два вывода были совместны, тензор энергии-импульса должен определяться выражением

$$T_{\alpha\beta} = -2\frac{\delta L_{\text{поля}}}{\delta g^{\alpha\beta}} + g_{\alpha\beta} L_{\text{поля}}, \tag{21.33а}$$

Лагранжиан порождает тензор энергии-импульса

или

$$(-g)^{1/2} T^{\alpha\beta} = \mathfrak{G}^{\alpha\beta} = 2\frac{\delta \mathscr{L}_{\text{поля}}}{\delta g_{\alpha\beta}}. \tag{21.33б}$$

Каковы следствия этого отождествления?

Под используемым здесь выражением «лагранжева функция поля» понимается лагранжева функция классической теории, сформулированной в плоском пространстве-времени с заменой метрики плоского пространства-времени на истинную метрику и применением ко всем производным правила гл. 16 «запятая переходит в точку с запятой».

Если рассматривается общее тензорное поле, то правило «запятая переходит в точку с запятой» вместе с производной тензорного поля со всеми его индексами будет вводить столько функций Г, сколько имеется индексов. Присутствие функций Г в лагранжиане поля привело бы к плохим последствиям для описанной в § 21.2 вариационной процедуры Палатини. В результате не получалась бы общепринятая формула (21.27), выражающая Г через метрические коэффициенты. А геометрия, вытекающая из вариационного принципа Гильберта — Палатини, не была бы римановой. И что тогда делать?

Эти мучительные вопросы не возникают в двух хорошо известных простых случаях скалярного и электромагнитного полей. В случае скалярного поля лагранжиан имеет вид

$$L_{\text{поля}} = (1/8\pi)\,[-g^{\alpha\beta}(\partial\phi/\partial x^{\alpha})(\partial\phi/\partial x^{\beta}) - m^2\phi^2]. \tag{21.34}$$

Поскольку дифференцируется скаляр, то коэффициенты связности не входят в лагранжиан. В случае электромагнитного поля лагранжиан строится из первых производных 4-потенциала $A_\mu$. Поэтому, согласно стандартным правилам ковариантного дифференцирования (дополнение 8.4), должны появиться функции Г. Однако производные от $A$ появляются не поодиночке, а всегда в антисимметричной комбинации, так что функции Г сокращаются и ковариантные производные становятся эквивалентными обычным производным

Электромагнетизм в качестве примера

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \tag{21.35}$$

В обоих случаях дифференцирования (21.33), порождающие тензор энергии-импульса, легко выполняются (упражнения 21.2 и 21.3) и дают классические выражения для $T_{\mu\nu}$, с которыми мы уже встречались ранее [(5.22) и (5.23)].

**Сопоставление с тензором энергии-импульса «канонической теории поля»**

Совсем иной метод дает теория поля для нахождения так называемого канонического выражения для тензора энергии-импульса (см., например, [134]). При каждом способе построения тензора энергии-импульса получающееся выражение должно удовлетворять закону сохранения энергии и импульса, и в силу этого обстоятельства в определенных контекстах оно становится полезным. Однако канонический тензор часто не симметричен по своим двум индексам, и закон сохранения момента импульса в этих случаях нарушается (см. обсуждение в § 5.7). Даже будучи симметричным, он может дать совершенно отличную от описываемой (21.33) локализацию напряжений и энергии. Теория поля не способна сделать выбор между этими различными картинами локализации энергии поля. Однако поскольку гравитация реагирует непосредственно на плотность массы-энергии и импульс, прямые измерения гравитационного притяжения обеспечивают в принципе [135] [1]) способ, с помощью которого можно сделать выбор между альтернативными рецептами локализации напряжений и энергии. То, что теория тяготения в вариационной формулировке дает единственное предписание для определения тензора энергии-импульса, который, будучи симметричным, автоматически удовлетворяет также законам сохранения энергии и импульса (упражнения 21.2 и 21.3), можно считать счастливым обстоятельством. (Обсуждение симметризации тензора энергии-импульса см. в работах [136, 137]. Более обширное обсуждение и ссылки на литературу см. в [7, 138].)

Если рассматривается спинорное поле, то в качестве варьируемых величин удобно выбирать не сами метрические коэффициенты, а компоненты тетрады ортонормальных векторов, определенных как тетрадное поле во всем пространстве (обсуждение и ссылки см. в [7]).

---

**УПРАЖНЕНИЯ**

### 21.2. Тензор энергии-импульса для скалярного поля

Выведите тензор энергии-импульса для скалярного поля, задавшись функцией Лагранжа (21.34). Выпишите также уравнение скалярного поля, выведенное из этой функции Лагранжа (в общем случае, когда динамика поля развивается в искривленном пространстве-времени). Покажите, что как следствие этого уравнения поля тензор энергии-импульса удовлетворяет закону сохранения $T_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = 0$.

---

[1]) Неопубликованная работа цитируется в книге [347].

### 21.3. Тензор энергии-импульса Фарадея — Максвелла

Упражнения

Задавшись лагранжевой плотностью $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/16\pi$, выразите ее через переменные $A_\mu$ и $g^{\mu\nu}$, и, используя (21.33), выведите тензор энергии-импульса, следуя § 5.6. Выведите также из вариационного принципа Лагранжа уравнение поля $F_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = 0$ (пространство-время искривлено, но заряды для простоты отсутствуют). Покажите как следствие этого уравнения поля, что тензор энергии-импульса Фарадея — Максвелла удовлетворяет закону сохранения $T_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = 0$. В качестве более претенциозного упражнения покажите, что любой тензор энергии-импульса, полученный из лагранжиана поля, согласно уравнению (21.33), будет автоматически удовлетворять закону сохранения.

---

## § 21.4. РАСЩЕПЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ НА ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ

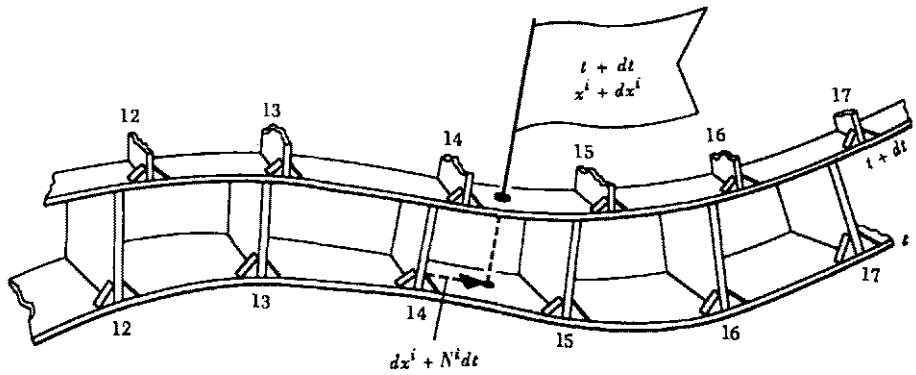
Можно многими способами «толкать вперед» многострелочное время и исследовать пространство-время быстрее здесь и медленнее там, или быстрее там и медленнее здесь. Однако вычислительная машина наиболее эффективно программируется, только если она следует одному определенному предписанию. Последовательные гиперповерхности, на которых задается геометрия, наиболее удобно описываются последовательными значениями параметра времени $t$. 3-геометрии на этих гиперповерхностях и 4-геометрия между ними трактуются на различных основаниях.

Расщепление пространства-времени для расчета пространства-времени

Рассечение пространства-времени на однопараметрическое семейство пространственноподобных гиперповерхностей предусматривается не только при анализе динамики вдоль пути, но и при наложении граничных условий, которые вводятся в любой принцип действия в виде: «Задайте 3-геометрии на двух поверхностях пространственно-временного сандвича и подберите между ними 4-геометрию, которая бы экстремизовала действие».

4-геометрия тонкого сандвича

Проще всего рассматривать сандвич бесконечно малой толщины (фиг. 21.2). Выберем координаты, приспособленные к (3 + 1)-расщеплению пространства-времени, обозначим «нижнюю», более раннюю гиперповерхность на диаграмме как $t = \text{const}$ и «верхнюю» более позднюю — как $t + dt = \text{const}$ (это лишь названия, а не явная мера, какого бы ни было собственного времени). Сравним две гиперповерхности с двумя узкими полосками стали, из которых хотят сконструировать твердую структуру. Задание геометрии на двух полосках никоим образом не задает структуру; для этой цели необходимы поперечные соединители между полосками. Недостаточно указать, что эти соединители 1) должны быть приварены на перпендикуляре к нижней полоске, 2) где каждый из них




ФИГ. 21.2.
Встраивание двух 3-геометрий в 4-геометрию тонкого сандвича путем наложения перпендикулярных соединителей с заданными длинами и смещениями. То, что в другой ситуации могло быть гибким, стало вследствие этого жестким. Точка с флагом иллюстрирует уравнение (21.40).

должен быть приварен и 3) дать их длину. В дополнение к этому необходимо сказать, где каждый соединитель присоединяется к верхней поверхности. Если соответствующие расстояния между вершинами соединителей везде короче, чем расстояния между основаниями соединителей, то двойная полоска будет иметь изгиб троса подвесного моста; если они везде длиннее, то двойная полоска будет иметь изгиб арки каменного моста. Таким образом, для построения сандвича необходимы следующие данные:

1) метрика 3-геометрии на нижней гиперповерхности

$$g_{ij}\,(t,\,x,\,y,\,z)\;\;dx^i dx^j, \tag{21.36}$$

дающая квадрат расстояния между двумя точками на этой гиперповерхности;

2) метрика на верхней гиперповерхности

$$g_{ij}\,(t+dt,\,x,\,y,\,z)\,dx^i dx^j; \tag{21.37}$$

3) формула для собственной длины соединителя, который крепится в точке $(x, y, z)$ на нижней гиперповерхности

$$\left(\begin{array}{l}\text{промежуток собственного}\\ \text{времени между нижней}\\ \text{и верхней гиперповерхно-}\\ \text{стями}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{«функция}\\ \text{хода»}\end{array}\right) dt = N\,(t,\,x,\,y,\,z)\,dt; \tag{21.38}$$

4) формула для места приварки соединителя на верхней гиперповерхности

$$x^i_{\text{верхн}}\,(x^m) = x^i - N^i\,(t,\,x,\,y,\,z)\,dt. \tag{21.39}$$

Опустим часть этой информации и найдем структуру, лишенную жесткости.

Метрика 4-геометрии зависит от промежутка собственного времени между гиперповерхностями и сдвига соединителей, связывающих две 3-геометрии

Жесткость структуры тонкого сандвича немедленно обнаруживается в определенности 4-геометрии пространства-времени, заполняющего сандвич. Ищем интервал $ds$ или собственное время $d\tau$ между $x^\alpha = (t, x^i)$ и $x^\alpha + dx^\alpha = (t + dt, x^i + dx^i)$. Теорема Пифагора в 4-мерной форме

$$ds^2 = \begin{pmatrix}\text{собственное расстояние}\\ \text{в нижней 3-геометрии}\end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix}\text{промежуток собственного}\\ \text{времени между нижней и}\\ \text{верхней 3-геометриями}\end{pmatrix}^2$$

приводит к результату (см. фиг. 21.2)

$$ds^2 = g_{ij}\,(dx^i + N^i dt)\,(dx^j + N^j dt) - (N dt)^2. \qquad (21.40)$$

Здесь, как и в (21.36), $g_{ij}$ — метрические коэффициенты 3-геометрии; они имеют латинские индексы, а компоненты 4-метрики — греческие, и кроме того, чтобы уменьшить возможную путаницу, верхний индекс $^{(4)}$

$$ds^2 = {}^{(4)}g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \qquad (21.41)$$

Детали 4-геометрии

Сравнивая (21.41) и (21.40), приходим к следующему построению 4-метрики из 3-метрики и функций хода и сдвига [139]:

$$\begin{Vmatrix} {}^{(4)}g_{00} & {}^{(4)}g_{0k} \\ {}^{(4)}g_{i0} & {}^{(4)}g_{ik} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (N_s N^s - N^2) & N_k \\ N_i & g_{ik} \end{Vmatrix}. \qquad (21.42)$$

Приваренные соединители делают свое дело!

В (21.42) величины $N^m$ — компоненты сдвига в своей первоначальной контравариантной форме, в то время как $N_i = g_{im}N^m$ — ковариантные компоненты, вычисленные с помощью 3-метрики в рамках 3-геометрии. Чтобы обратить это соотношение, т. е. написать

$$N^m = g^{ms}N_s, \qquad (21.43)$$

необходимо рассмотреть обратную 3-метрику, величину, которая должна резко отличаться от обратной 4-метрики. Так, обратная 4-метрика равна

$$\begin{Vmatrix} {}^{(4)}g_{00} & {}^{(4)}g^{0m} \\ {}^{(4)}g^{k0} & {}^{(4)}g^{km} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -(1/N^2) & (N^m/N^2) \\ (N^k/N^2) & (g^{km} - N^k N^m/N^2) \end{Vmatrix}, \qquad (21.44)$$

что проверяется путем вычисления произведения

$${}^{(4)}g_{\alpha\beta}\,{}^{(4)}g^{\beta\nu} = {}^{(4)}\delta_\alpha{}^\nu$$

согласно стандартным правилам перемножения матриц.

Элемент объема имеет вид

$$(-{}^{(4)}g)^{1/2}dx^0dx^1dx^2dx^3 = Ng^{1/2}dtdx^1dx^2dx^2. \qquad (21.45)$$

Приваривание соединителей к двумя стальным полоскам или добавление к 3-метрике функций хода и сдвига наряду с фиксированием 4-метрики также автоматически определяет компоненты единичного времениподобного нормального вектора $\mathbf{n}$. Условие нормировки 4-вектора $\mathbf{n}$ легче всего сформулировать, сказав, что существует 1-форма, для удобства также называемая $\mathbf{n}$, дуальная к $\mathbf{n}$ и такая, что произведение вектора $\mathbf{n}$ на эту 1-форму

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}, \rangle = -1. \tag{21.46}$$

Эта форма определяется выражением

$$\mathbf{n} = n_\beta \mathbf{d}x^\beta = -N\mathbf{d}t + 0 + 0 + 0. \tag{21.47}$$

Только тогда эта 1-форма, т. е. структура слоевых поверхностей, автоматически принимает значение 1, когда ее пронзает (фиг. 2.4) вектор, отвечающий продвижению на единицу собственного времени, независимо от тех смещений по $x$, $y$ и $z$, которые он имеет. Поэтому единичный времениподобный нормальный вектор в ковариантном 1-формном представлении с необходимостью имеет компоненты $-N$, 0, 0, 0, т. е.

**Компоненты единичной нормали**

$$n_\beta = (-N, 0, 0, 0). \tag{21.48}$$

Поднимая индексы с помощью (21.44), получаем контравариантные компоненты той же нормали, представляющие собой тангенциальный вектор; таким образом,

$$n^\alpha = [(1/N), -(N^m/N)]. \tag{21.49}$$

После рассмотрения фиг. 21.2 этот результат получает простую интерпретацию. Например, можно сказать, что типичный «перпендикулярный соединитель» на диаграмме должен иметь компоненты

$$(dt,\ -N^m dt)$$

и собственную длину $d\tau = N dt$, а потому его компоненты, отнесенные к вектору $\mathbf{n}$, обладающему единичной собственной длиной, точно совпадают с компонентами вектора (21.49).

## § 21.5. ВНУТРЕННЯЯ И ВНЕШНЯЯ КРИВИЗНА

Основным понятием в эйнштейновском объяснении тяготения является кривизна, поэтому целесообразно проанализировать кривизну на языке (3 + 1)-пространственно-временного расщепления. Кривизну внутреннюю по отношению к 3-геометрии пространственноподобной гиперповерхности можно определить и вычислить методами, описанными и использованными в гл. 14 для расчета четырехмерной кривизны. Среди всех мер внутренней кривизны одна из простейших — скалярный инвариант римановой кривизны ${}^{(3)}R$ (записываемый далее для простоты как $R$), а среди всех способов определения этого инварианта (см. гл. 14) один из наибо-

ее компактных — использование предела (см. упражнение 21.4)

$$R\begin{pmatrix}\text{в исследуемой}\\ \text{точке}\end{pmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0} 18\,\frac{4\pi\varepsilon^2 - \begin{pmatrix}\text{собственная площадь поверхности (приблизительно 2-сферы), определенной как геометрическое место точек, расположенных на собственном расстоянии } \varepsilon\end{pmatrix}}{4\pi\varepsilon^4} \tag{21.50}$$

Скалярная кривизна как мера дефицита площади

Для более подробного описания кривизны, внутренней по отношению к 3-геометрии, воспользуемся дифференциальной геометрией, уже развитой в гл. 8—14, поправляя ее только там, где требуется отличить трехмерную величину от четырехмерной. Начнем с рассмотрения смещения на гиперповерхности

$$\mathbf{d}\mathscr{P} = \mathbf{e}_i\, dx^i. \tag{21.51}$$

Здесь $\mathbf{e}_i$ — базисные касательные векторы, причем $\mathbf{e}_i = \partial/\partial x^i$ (по одной терминологии), или $\mathbf{e}_i = \partial\mathscr{P}/\partial x^i$ (по другой терминологии); эти векторы являются дуальными к трехкоординатным 1-формам $dx^i$. Любое поле касательных векторов $\mathbf{A}$, лежащих на гиперповерхности, можно выразить через эти базисные векторы в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_i A^i. \tag{21.52}$$

Скалярное произведение вектора $\mathbf{A}$ на базисный вектор $\mathbf{e}_j$ равно

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_j) = A^i(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j) = A^i g_{ij} = A_j. \tag{21.53}$$

Обратимся теперь от вектора в одной точке к параллельному переносу вектора в соседнюю точку.

Если вектор, лежащий на экваторе Земли и указывающий на Северную звезду, перенести параллельно самому себе вдоль меридиана в точку земной поверхности, находящуюся на 1000 км к северу, то он не будет больше лежать в 2-геометрии поверхности Земли. Телескоп, расположенный в северной полусфере, должен поднять свою трубу, чтобы увидеть Северную звезду. Этот результат непосредственно обобщается на случай трехмерной гиперповерхности, погруженной в 4-геометрию. Возьмем вектор $\mathbf{A}$, лежащий на гиперповерхности, перенесем его по элементарному пути, также лежащему на гиперповерхности, причем в ходе переноса на каждой стадии будем смещать вектор параллельно самому себе, где «параллельно» означает параллельно по отношению к геометрии окружающего 4-многообразия. В конце такого переноса вектор $\mathbf{A}$ обычно не будет лежать на гиперповерхности. Поэтому «ковариантная производная» от $\mathbf{A}$ в направлении $i$-координатного

направления в геометрии окружающего пространства-времени (т. е. $\mathbf{A}$ в новой точке минус перенесенное $\mathbf{A}$) имеет вид (см. § 10.4)

$$ {}^{(4)}\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{A} = {}^{(4)}\nabla_i\mathbf{A} = {}^{(4)}\nabla_i(\mathbf{e}_j A^j) = \mathbf{e}_j\frac{\partial A^j}{\partial x^i} + ({}^{(4)}\Gamma^{\mu}_{ji}\mathbf{e}_{\mu})A^j. \qquad (21.54) $$

Специальным примером этой формулы является уравнение для ковариантно измеренного изменения самого базисного вектора $\mathbf{e}_m$:

$$ {}^{(4)}\nabla_i\mathbf{e}_m = {}^{(4)}\Gamma^{\mu}_{mi}\mathbf{e}_{\mu}. \qquad (21.55) $$

В равенствах (21.54) и (21.55) совершенно очевидно присутствует «компонента, выходящая из гиперповерхности»:

$$ (A^j\,{}^{(4)}\Gamma^0_{ji})(\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{n}). \qquad (21.56) $$

**От параллельного переноса в 4-геометрии к параллельному переносу в 3-геометрии**

Теперь уничтожим эту компоненту. Спроектируем ${}^{(4)}\nabla\mathbf{A}$ ортогонально на гиперповерхность. Таким образом придем к параллельному переносу и ковариантной производной, внутренним по отношению к 3-геометрии гиперповерхности. По правилам эту ковариантную производную следует записывать как ${}^{(3)}\nabla$, но для упрощения формы записи в оставшейся части данной главы она будет обозначаться как $\nabla$, кроме тех мест, где может возникнуть неоднозначность. Чтобы получить величину новой ковариантной производной, достаточно переписать (21.54), заменив везде индекс ${}^{(4)}$ на ${}^{(3)}$, или лучше, опустив и то и другое, заменить «немой индекс» суммирования $\mu = (0, 1, 2, 3)$ на $m = (1, 2, 3)$. Однако более удобно, следуя Израилю [140], перейти от выражения, содержащего контравариантные компоненты $A^i$ вектора $\mathbf{A}$, к выражению, содержащему ковариантные компоненты $A_i = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_i)$. В таком случае ковариантная производная от $h$-й ковариантной компоненты $\mathbf{A}$ по направлению $i$-го координатного направления на гиперповерхности, вычисленная по отношению к 3-геометрии, внутренней к самой гиперповерхности, определяется выражением [см. уравнение (10.18)]

**Новая ковариантная производная, взятая относительно 3-геометрии**

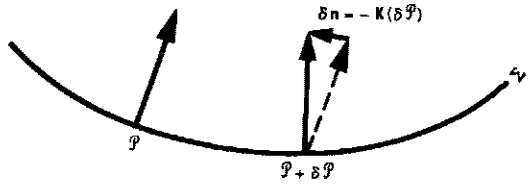
$$ A_{h\,|\,i} = \mathbf{e}_h\cdot{}^{(3)}\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{A} \equiv \mathbf{e}_h\cdot\nabla_i\mathbf{A} = \frac{\partial A_h}{\partial x^i} - $$

$$ - A^m\Gamma_{mhi} \quad (= A_{h;\,i} \text{ для } \mathbf{A} \text{ на } \Sigma). \qquad (21.57) $$

Вертикальная черта введена здесь для того, чтобы отличить эту ковариантную производную от ковариантной производной, взятой по отношению к 4-геометрии, как, например, в уравнении (10.17). Трехмерные коэффициенты связности здесь, подобно рассмотренным ранее четырехмерным коэффициентам связности [см. уравнения, ведущие от (14.14) к (14.15)], выражаются через метрические коэффициенты и их первые производные и представляются в виде

$$ {}^{(3)}\Gamma_{mhi} \equiv \Gamma_{mhi} \equiv \mathbf{e}_m\nabla_i\mathbf{e}_h. \qquad (21.58) $$

Из коэффициентов связности в свою очередь, как и в гл. 14, вычисляется тензор полной римановой кривизны ${}^{(3)}R^i_{jmn}$ 3-геометрии, внутренней по отношению к гиперповерхности.




ФИГ. 21.3.
Внешняя кривизна измеряет относительное сжатие и деформацию фигуры, лежащей на пространственноподобной гиперповерхности Σ, которая возникает, если каждая точка фигуры перемещается в окружающее пространство-время на единичный интервал собственного времени, «нормальный» к гиперповерхности. (А что если нет окружающего пространства-времени? Тогда нет и внешней кривизны!) Тензор внешней кривизны положительно кратен единичному тензору, если элементарные смещения на поверхности $\delta\mathcal{P}$, куда бы они ни были направлены, все испытывают одно и то же относительное сжатие. Так, внешняя кривизна гиперповерхности, иллюстрируемой здесь, положительна. Пунктирная стрелка обозначает нормальный вектор $\mathbf{n}$ в опорной точке $\mathcal{P}$ после параллельного переноса в соседнюю точку $\mathcal{P} + \delta\mathcal{P}$.

Вдобавок к кривизне, внутренней по отношению к гиперповерхности одновременности, мы сталкиваемся с понятием *внешней кривизны* 3-геометрии, которое еще не встречалось в предыдущих главах (лишь вскользь мы касались его в дополнении 14.1). Это понятие не имеет смысла в самой 3-геометрии. Оно имеет смысл, если 3-геометрия погружена в виде полностью определенного сечения в полностью определенную окружающую ее 4-геометрию. Внешняя кривизна измеряет кривизну этого сечения относительно окружающей 4-геометрии (фиг. 21.3).

Возьмем нормаль в точке $\mathcal{P}$ и, «удерживая ее основание на гиперповерхности» Σ, перенесем ее параллельно самой себе в качестве «опорного вектора» в точку $\mathcal{P} + \delta\mathcal{P}$, где вычтем ее из нормального вектора, расположенного в этой точке. Разность $\delta\mathbf{n}$ можно в подходящем приближении рассматривать как «вектор», значение которого определяется и линейно зависит от «вектора» смещения $\delta\mathcal{P}$.

Чтобы не привлекать понятия приближения, перейдем от конечного смещения $\delta\mathcal{P}$ к предельному понятию вектора, определяющего «смещение 1-формы» $\mathbf{d}\mathcal{P}$ (см. уравнение 15.13). Заменим также конечный, но не строго определенный вектор $\delta\mathbf{n}$ предельным понятием вектора 1-формы $\mathbf{dn}$. Эта величина должна представлять такое изменение вектора $\mathbf{n}$, при котором не изменяется его длина, а изменяется направление, и поэтому вектор $\mathbf{dn}$ перпендикулярен $\mathbf{n}$. Следовательно, можно считать, что вектор лежит на гиперповерхности Σ. Так как он линейно зависит от $\mathbf{d}\mathcal{P}$, то его можно представить в форме

$$\mathbf{dn} = -\mathbf{K}(\mathbf{d}\mathcal{P}). \qquad (21.59)$$

Внешняя кривизна как оператор

Здесь линейный оператор $\mathbf{K}$ есть внешняя кривизна, представленная как абстрактный геометрический объект, не зависящий от

выбора координат. Знак $\mathbf{K}$ в определенной здесь форме будет положительным, если вершины нормалей на фиг. 21.3 будут ближе, чем их основания; так будет, например, в модели Вселенной, переходящей от расширения к сжатию; это находится в согласии с условиями, используемыми Эйзенхартом [11], Шутеном [27] и Арновиттом, Дезером и Мизнером [139], но противоречит условию, принятому Израилем [140].

Вставим в 1-формы, стоящие в левой и правой частях (21.59), вместо общего касательного вектора [который должен описывать общее локальное смещение, до сих пор оставшееся открытым, см. обсуждение после (2.12а)] очень специальный касательный вектор — базисный вектор $\mathbf{e}_i$ для смещения в $i$-координатном направлении. Тогда (21.59) принимает вид

$$^{(4)}\nabla_i \mathbf{n} = -\mathbf{K}(\mathbf{e}_i) = -K_i^j \mathbf{e}_j, \tag{21.60}$$

где $K_i^j$ — компоненты линейного оператора $\mathbf{K}$ в координатном представлении. Умножим скалярно обе стороны (21.60) на базисный вектор $\mathbf{e}_m$ и вспомним, что $(\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{n}) = 0$. Таким образом установим, что тензор $K_{im}$ в ковариантном представлении симметричен по двум своим индексам

$$\begin{aligned} K_{im} = K_i^j g_{jm} = K_i^j (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_m) = -\mathbf{e}_m \cdot {}^{(4)}\nabla_i \mathbf{n} = \\ = \mathbf{n} \cdot {}^{(4)}\nabla_i \mathbf{e}_m = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_0)\,{}^{(4)}\Gamma^0_{mi} = \mathbf{n} \cdot {}^{(4)}\nabla_m \mathbf{e}_i = K_{mi}. \end{aligned} \tag{21.61}$$

↑ см. (21.55)

Зная тензор внешней кривизны $K_{ij}$, можно найти изменения четырех векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ при параллельном переносе. Уравнение (21.60) показывает, как изменяется $\mathbf{n}$ при параллельном переносе. Изменение $\mathbf{e}_m$ находится из (21.55) и представляет собой вектор. Для адекватного отождествления этого вектора необходимо знать его скалярное произведение с каждым из четырех независимых векторов, т. е. с базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, или, более кратко, с $\mathbf{e}_s$ из (21.58) и с вектором нормали $\mathbf{n}$ из (21.61). Таким образом, следуя Израилю [140], мы приходим к известным уравнениям Гаусса — Вайнгартена, счастливо обходя все изменения обозначений, происшедшие в текущем столетии:

**Уравнение Гаусса — Вайнгартена для 4-переноса в функции внешней кривизны**

$$^{(4)}\nabla_i \mathbf{e}_j = K_{ij} \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} + {}^{(3)}\Gamma^h_{ji} \mathbf{e}_h. \tag{21.62}$$

Зная из этого уравнения, как изменяется каждый базисный вектор на гиперповерхности $\Sigma$, мы также знаем, как переписать (21.54), чтобы найти изменение любого векторного поля $\mathbf{A}$, лежащего на $\Sigma$. В обоих случаях изменения выражаются относительно опорного вектора, переносимого из соседней опорной точки. Под выражением «параллельный перенос» теперь понимается «параллельный по

отношению к геометрии окружающего пространства-времени»:

$$^{(4)}\nabla_i \mathbf{A} = A^j{}_{|i}\mathbf{e}_j + K_{ij}A^j \frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})}. \tag{21.63}$$

Особую важность представляет вычисление внешней кривизны, если в соответствии с планом Арновитта, Дезера и Мизнера, описанным в § 21.4, пространство-время разрезано на пространственноподобные сечения. Проиллюстрированная на фиг. 21.2 4-геометрия тонкого сандвича, несмотря на свою рудиментарность, полностью определяется 3-метрикой на двух поверхностях сандвича и функциями хода и сдвига $N$ и $N^i$. Нормаль в ковариантном представлении, согласно (21.47), имеет компоненты

$$(n_0, n_1, n_2, n_3) = (-N, 0, 0, 0). \tag{21.64}$$

Изменение $\mathbf{n}$ по отношению к «вектору $\mathbf{n}$, переносимому параллельно самому себе в окружающей 4-геометрии», в соответствии с определением параллельного переноса выражается формулой

$$(\mathbf{dn})_i = n_{i;\,k}\,\mathbf{d}x^k = \left[\frac{\partial n_i}{\partial x^k} - {}^{(4)}\Gamma^\sigma_{ik} n_\sigma\right]\mathbf{d}x^k = \\ = N\,{}^{(4)}\Gamma^0_{ik}\,\mathbf{d}x^k. \tag{21.65}$$

Выражая это изменение через тензор внешней кривизны

$$(\mathbf{dn})_i = -K_{ik}\,\mathbf{d}x^k \tag{21.66}$$

и сравнивая с (21.65), заключаем, что тензор $K_{ik}$ имеет величину

$$K_{ik} = -n_{i;\,k} = -N\,{}^{(4)}\Gamma^0_{ik} = -N\,[{}^{(4)}g^{00}\,{}^{(4)}\Gamma_{0ik} + {}^{(4)}g^{0p}\,{}^{(4)}\Gamma_{pik}],$$

или [используются уравнения (21.42) и (21.44)]

$$K_{ik} = (1/N)\,[{}^{(4)}\Gamma_{0ik} - N^p\,{}^{(3)}\Gamma_{pik}] = \\ = \frac{1}{2N}\left[\frac{\partial N_i}{\partial x^k} + \frac{\partial N_k}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} - 2\Gamma_{pik}N^p\right] = \\ = \frac{1}{2N}\left[N_{i|k} + N_{k|i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right]. \tag{21.67}$$

**Внешняя кривизна как функция сдвига и изменения 3-метрики**

Это внешняя кривизна, выраженная через функции хода и сдвига АДМ [139].

Пусть, например, $\Sigma$ имеет геометрию 3-сферы

$$ds^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]. \tag{21.68}$$

**Внешняя кривизна расширяющейся 3-сферы**

Пусть соседнее сечение из однопараметрического семейства сечений есть сечение, обозначенное $t + dt$ (только обозначение!), имеет 3-геометрию, заданную той же самой формулой, но с заменой радиуса $a$ на $a + da$. 4-геометрия тонкого сандвича между двумя этими сечениями совершенно не определена до тех пор, пока не заданы функции хода и сдвига. Пусть для простоты вектор сдвига $N^i$ (см. фиг. 21.2) везде равен нулю, а функция хода в каждой

точке на гиперповерхности $\Sigma$ имеет одну и ту же величину $N$. Интервал собственного времени между двумя сферами равен тогда $d\tau = N dt$. Любая расположенная на поверхности $\Sigma$ геометрическая фигура расширяется со временем. Относительное увеличение размера этой фигуры на единицу собственного времени одинаково во всех направлениях и имеет величину

$$\begin{pmatrix}\text{относительное увеличение}\\ \text{размера на единицу соб-}\\ \text{ственного времени}\end{pmatrix} = \frac{1}{a}\frac{da}{d\tau} = \frac{1}{2N}\frac{1}{a^2}\frac{d(a^2)}{dt}. \quad (21.69)$$

Взяв эту величину со знаком минус и умножив ее на единичный тензор $\binom{1}{1}$, т. е. $\mathbf{1} = \mathbf{d}\mathscr{F}$, получим тензор внешней кривизны в $\binom{1}{1}$-представлении

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2N}\frac{1}{a^2}\frac{d(a^2)}{dt}\mathbf{1}. \quad (21.70)$$

Этот результат подтверждается (упражнение 21.5) прямым вычислением компонент $K^i_j$, если использовать в качестве отправной точки формулу АДМ (21.67).

Риманова кривизна $R^a{}_{bcd} = {}^{(3)}R^a{}_{bcd}$, внутренняя по отношению к гиперповерхности $\Sigma$, вместе с внешней кривизной $K_{ij}$ дает информацию о римановой и эйнштейновской кривизнах 4-геометрии. Использование в расчете координатного базиса

| базисные векторы | базисные 1-формы |
|---|---|
| $\mathbf{e}_0 = \partial_t$, | $\mathbf{d}t$, |
| $\mathbf{e}_i = \partial_i$, | $\mathbf{d}x^i$, |

неудобно, поскольку обычно базисный вектор $\mathbf{e}_0$ не перпендикулярен гиперповерхности (см. фиг. 21.2). Выберем другой базис, также дуальный самому себе:

**Базисные формы для расчета 4-кривизны**

| базисные векторы | базисные 1-формы |
|---|---|
| $\mathbf{e}_n \equiv \mathbf{n} = N^{-1}(\partial_t - N^m\partial_m)$, | $\boldsymbol{\omega}^n = N\,\mathbf{d}t = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}$, |
| $\mathbf{e}_i = \partial_i$, | $\boldsymbol{\omega}^i \equiv \mathbf{d}x^i = N^i\,\mathbf{d}t$. |

(21.71)

Вместо греческих индексов $\alpha = 0, 1, 2, 3$, для перечисления компонент используем греческие индексы $\bar{\alpha} = n, 1, 2, 3$.

Напомним, что кривизна определяется изменением вектора, перенесенного по замкнутому пути, или из уравнения (14.23) имеем

$$\mathscr{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,\mathbf{w} = \nabla_u\nabla_v\mathbf{w} - \nabla_v\nabla_u\mathbf{w} - \nabla_{[u,\,v]}\mathbf{w}. \quad (21.72)$$

Пусть $\mathbf{e}_t$ — переносимый вектор, а путь определяется векторами $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_k$. Последние два вектора принадлежат к координатному

базису. Следовательно, путь замыкается автоматически» $[\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k]=0$ и последний член в (21.72) выпадает из рассмотрения. Апеллируя к (21.62) и (21.60), находим

$$
\begin{aligned}
{}^{(4)}\nabla_{\mathbf{e}_j}{}^{(4)}\nabla_{\mathbf{e}_k}\mathbf{e}_i &= {}^{(4)}\nabla_{\mathbf{e}_j}\left[K_{ik}\frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})}+{}^{(3)}\Gamma^m_{ik}\mathbf{e}_m\right]= \\
&= K_{ik,\,j}\frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})}-K_{ik}K^m_j\mathbf{e}_m\frac{1}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})}{}^{(3)}\Gamma^m_{ik,\,j}\mathbf{e}_m+ \\
&+{}^{(3)}\Gamma^m_{ik}\left[K_{mj}\frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})}+{}^{(3)}\Gamma^s_{mj}\mathbf{e}_s\right]. \qquad (21.73)
\end{aligned}
$$

Вычисляя аналогично член с обращенными индексами $j$ и $k$, вычитая его из (21.73) и упрощая выражение, получаем

Гаусс — Кодацци: 4-кривизна как функция внутренней 3-геометрии и внешней кривизны

$$
\begin{aligned}
\mathscr{R}(\mathbf{e}_j,\,\mathbf{e}_k)\,\mathbf{e}_i &= (K_{ik|j}-K_{ij|k})\frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})}+ \\
&+[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}(K_{ij}K^m_k-K_{ik}K^m_j)+{}^{(3)}R^m{}_{ijk}]\,\mathbf{e}_m. \qquad (21.74)
\end{aligned}
$$

Коэффициенты этого равенства непосредственно дают искомые компоненты тензора кривизны

$${}^{(4)}R^m_{ijk}={}^{(3)}R^m_{ijk}+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}(K_{ij}K^m_k-K_{ik}K^m_j) \qquad (21.75)$$

и

$${}^{(4)}R^n_{ijk}=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}\,{}^{(4)}R_{nijk}=-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}(K_{ij|k}-K_{ik|j}) \qquad (21.76)$$

Уравнения (21.75) и (21.76) известны как уравнения Гаусса и Кодацци (см. литературу в [11]). Из (21.75) следует, что компоненты кривизны 3-геометрии будут совпадать с соответствующими компонентами кривизны 4-геометрии только тогда, когда выполнено погружение в рассматриваемой точке на гиперповерхности, не обладающей внешней кривизной. Прямо противоположную ситуацию иллюстрирует пример 2-сферы, погруженной в плоское 3-пространство; в этом случае левая сторона (21.75) (со сдвигом на одно измерение!) равна нулю, и внешняя и внутренняя кривизны в правой части точно компенсируют друг друга.

Результаты Гаусса — Кодацци позволяют вычислить важные компоненты тензора кривизны Эйнштейна. При выполнении вычислений проще всего считать $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_k$ ортогональной тетрадой, а $\mathbf{n}$ — нормированным и ортогональным каждому вектору на гиперповерхности. Используя тогда (14.7) и (21.75), находим

Выражение тензора кривизны Эйнштейна через внешнюю кривизну

$$
\begin{aligned}
-G^0_0 &= {}^{(4)}R^{12}_{12}+{}^{(4)}R^{23}_{23}+{}^{(4)}R^{31}_{31}={}^{(3)}R^{12}_{12}+{}^{(3)}R^{23}_{23}+{}^{(3)}R^{31}_{31}+ \\
&+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}[(K^2_1K^1_2-K^2_2K^1_1)+(K^3_2K^2_3-K^3_3K^2_2)+ \\
&+(K^1_3K^3_1-K^1_1K^3_3)]=\frac{1}{2}R-\frac{1}{2}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}[(\mathrm{Sp}\,\mathbf{K})^2-\mathrm{Sp}\,(\mathbf{K}^2)]. \qquad (21.77)
\end{aligned}
$$

Здесь $R$ — скалярный инвариант 3-мерной кривизны и Sp означает «след от», так,

$$\mathrm{Sp}\,\mathbf{K}=g^{ij}\mathbf{K}_{ij}=g_{ij}\mathbf{K}^{ij}=K^j_j \qquad (21.78)$$

и

$$\operatorname{Sp} \mathbf{K}^2 = (K^2)^i_j = K^m_j K^j_m = g_{js} K^{sm} g_{mt} K^{ij}. \tag{21.79}$$

Результат (21.79), полученный в ортонормальной тетраде, очевидно, ковариантен по отношению к общим преобразованиям координат на пространственноподобной гиперповерхности; он не содержит явно какой-либо координаты времени, обеспечивая в этом отношении не зависящее от координат описание эйнштейновской кривизны.

**Выражение (21.77) — основное уравнение Эйнштейна, «масса-энергия определяет кривизну»**

Согласно уравнению поля Эйнштейна, выражение (21.77) равно $8\pi\rho$, где $\rho$ — плотность массы-энергии. Выражение (21.77) есть «мера кривизны, которая не зависит от того, насколько искривлено пространственноподобное сечение». Эта мера кривизны — основное понятие при выводе уравнения поля Эйнштейна; оно обсуждается в дополнении 17.2, п. 3.

Другая компонента тензора кривизны Эйнштейна, которая легко вычисляется из (14.7) на основании полученных результатов, если ее выразить в ортонормальной системе координат, имеет вид

$$\begin{aligned} G^n_1 &= {}^{(4)}R^{n2}{}_{12} + {}^{(4)}R^{n3}{}_{13} = \\ &= -(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}(K^2_{1|2} - K^2_{2|1} + K^3_{1|3} - K^3_{3|1}). \end{aligned} \tag{21.80}$$

Она немедленно принимает форму, справедливую в любой ортонормальной или неортонормальной системе координат $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ на гиперповерхности:

**Другое уравнение для начальных значений**

$$G^n_i = -(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}[K^m_{i|m} - (\operatorname{Sp}\mathbf{K})_{|i}]. \tag{21.81}$$

Согласно уравнению поля Эйнштейна, эта величина равна умноженной на $8\pi$ $i$-й ковариантной компоненте плотности импульса, переносимого веществом и негравитационными полями.

Выписанные 4 компоненты уравнения поля Эйнштейна будут в последующем занимать центральное место, выступая в качестве «уравнений для начальных значений» общей теории относительности. Остальные 6 компонент не будут выписаны, поскольку 1) динамику проще анализировать гамильтоновыми методами и 2) их вычисление довольно трудоемкое. Требуется, например, вычислить оставшуюся величину типа $\mathscr{R}(\mathbf{e}_j, \mathbf{n})\mathbf{e}_i$. Один шаг к этому расчету будет найден в упражнении 21.7. Расчет был выполнен Саксом ([25], уравнение 10), но только в гауссовых нормальных координатах. Эти координаты предполагают весьма специальное сечение пространства-времени:

1) геодезические, нормально исходящие из пространственноподобной гиперповерхности $n = 0$, пересекают все последующие поверхности одновременности $n = \text{const}$ нормально,

2) координата $n$ непосредственно измеряет промежуток собственного времени или любую соответствующую [1]) ему собствен-

[1]) Уравнение (10) из работы Сакса [25] обобщено здесь на случай, когда единичная нормаль $\mathbf{n}$ не обязательно времениподобна. Сакс использовал $\mathbf{n} = \partial/\partial t$.

ную длину вдоль этих геодезических. Неудивительно, что в специализированных таким образом координатах ответ выглядит просто:

$$ {}^{(4)}R^{n}_{inlk} = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}\left(\frac{\partial K_{ik}}{\partial n} + K_{im}K^{m}_{k}\right). \qquad \left(\begin{array}{c}\text{гауссовы нормальные}\\ \text{координаты}\end{array}\right) $$

(21.82)

Если вместо гауссовой нормальной системы координат взять систему координат Арновитта, Дезера и Мизнера, то в (21.82) появятся дополнительные члены. Координаты АДМ используются здесь потому, что они позволяют анализировать динамику так, как *хочется* анализировать динамику: сдвигая свободную пространственноподобную гиперповерхность вперед по времени с различными скоростями в различных местах («многострелочное время»). Фишер и Марсден [142] показывают, как, применяя понятие производной Ли тензорного поля, введенное в упражнении 21.8, получить такие формулы и понять их геометрическое содержание не зависящим от координат способом.

---

**21.4. Скалярный инвариант кривизны как функция дефицита площади** УПРАЖНЕНИЯ

Если бы Земля была плоская, то при расстоянии в 10 000 км от Северного полюса до экватора мы получили бы 62 832 км для длины «экватора» в противоположность действительной длине экватора 40 000 км. Это различие отражает тот факт, что поверхность искривлена в замкнутую конфигурацию. Обратимся от этой «псевдопроблемы» к истинной проблеме, 3-сфере:

$$ ds^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]. $$

Измерьте, отправляясь от $\chi = 0$, 2-сферу с собственным радиусом $\varepsilon = a\chi$. Определите собственную площадь этой 2-сферы как функцию $\chi$. Проверьте, что соотношение (21.50) для дефицита площади дает в пределе $\varepsilon \to 0$ правильный результат $R = 6/a^2$. Сделайте более претенциозное упражнение: 1) возьмите общую (гладкую) 3-геометрию; 2) выразите метрику вблизи любой выбранной точки через римановы нормальные координаты, приведенные в § 11.6; 3) определите в наинизшем интересующем порядке по $\varepsilon$ геометрическое место точек, расположенных на собственном расстоянии $\varepsilon$, в зависимости от сферических полярных углов $\theta$ и $\phi$ (направление начала геодезической длины $\varepsilon$); 4) найдите в наинизшем интересующем порядке по $\varepsilon$ собственную площадь фигуры, определяемой этими точками, обосновывая тем самым (21.50) (подробнее об этом см., например, [6], стр. 252—256).

УПРАЖНЕНИЯ

### 21.5. Тензор внешней кривизны для сечения фридмановской геометрии

Подтвердите результат (21.70) для внешней кривизны прямым расчетом, используя формулу (21.67).

### 21.6. Вычисление $\mathscr{R}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)\,\mathbf{n}$

Вычислите эту величину в модели (21.74) или другим путем. Как можно заранее предугадать, что коэффициент при $\mathbf{n}$ в окончательном результате должен тождественно обращаться в нуль? Сравнивая коэффициенты при $\mathbf{e}_m$, найдите ${}^{(4)}R^m{}_{njk}$ и убедитесь, что результат эквивалентен (21.76).

### 21.7. Вычисление коммутатора $[\mathbf{e}_j, \mathbf{n}]$

Вычисление этого коммутатора — первый шаг к расчету величины типа $\mathscr{R}(\mathbf{e}_j, \mathbf{n})\mathbf{e}_i$. Выразив $\mathbf{e}_j$ в виде дифференциального оператора $\partial/\partial x^j$, используйте (21.49), чтобы представить $\mathbf{n}$ также в виде дифференциального оператора. Покажите таким способом, что рассматриваемый коммутатор имеет величину

$$-(N_{,j}/N)\,\mathbf{n} - (N^m{}_{,j}/N)\,\mathbf{e}_m.$$

### 21.8. Производная Ли от тензора[1])

Определите производную Ли от тензорного поля и исследуйте некоторые ее свойства. Производная Ли в направлении векторного поля $\mathbf{n}$ есть дифференциальный оператор, который действует на тензорные поля $\mathbf{T}$ типа $\binom{r}{s}$, превращая их в тензоры $\mathscr{L}_{\mathbf{n}}\mathbf{T}$ также типа $\binom{r}{s}$. Процесс дифференцирования Ли подчиняется обычному цепному правилу и имеет аддитивные свойства [ср. уравнения (10.2б) — (10.2г) для ковариантной производной]. Для скалярных функций $f$ имеем $\mathscr{L}_{\mathbf{n}} f \equiv \mathbf{n}[f] = f_{,\mu} n^{\mu}$. Производная Ли от векторного поля $\mathbf{u}$ по направлению векторного поля $\mathbf{v}$ была определена в упражнении 9.11 как

$$\mathscr{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} \equiv [\mathbf{u}, \mathbf{v}].$$

Если определить действие $\mathscr{L}_{\mathbf{n}}$ в 1-формном представлении, то просто перейти к тензорам общего типа, поскольку последние всегда можно разложить на сумму тензорных произведений векторов и 1-форм. Если $\sigma$ есть 1-форма и $\mathbf{v}$-вектор, то тогда $\mathscr{L}_{\mathbf{n}}\sigma$ определяется как 1-форма, удовлетворяющая равенству

$$\langle \mathscr{L}_{\mathbf{n}}\sigma, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{n}[\langle \sigma, \mathbf{v}\rangle] - \langle \sigma, [\mathbf{n}, \mathbf{v}]\rangle$$

для произвольного $\mathbf{v}$.

---

[1]) Упражнения 21.8 и 21.9 составил Йорк (*York J. W., Jr.*, частное сообщение, 1972 г.).

**2**

**УПРАЖНЕНИЯ**

а. Покажите, что в координатном базисе

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}}\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{\alpha,\ \beta}n^{\beta} + \sigma_{\beta}n^{\beta}{}_{,\alpha})\,\mathbf{d}x^{\alpha}.$$

б. Покажите, что в координатном базисе

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}}\mathbf{T} = (T_{\alpha\beta,\ \mu}n^{\mu} + T_{\mu\beta}n^{\mu}{}_{,\alpha} + T_{\alpha\mu}n^{\mu}{}_{,\beta})\,\mathbf{d}x^{\alpha}\otimes\mathbf{d}x^{\beta},$$

где $\mathbf{T}$ — тензорное поле типа $\binom{0}{2}$.

в. Покажите, что в «а» и «б» все частные производные можно заменить на ковариантные производные. (Заметьте, что дифференцирование Ли определяется независимо от существования аффинной связности. Дополнительную информацию по этому вопросу см., например, в [27, 143].)

### 21.9. Выражение для динамических компонент тензора кривизны

Уравнения Гаусса — Кодацци можно рассматривать как уравнения, дающие 14 из 20 алгебраически независимых компонент тензора кривизны пространства-времени, выраженных через внутреннюю и внешнюю геометрии трехмерных (ненулевых) гиперповерхностей. Чтобы завершить расщепление лагранжиана Гильберта $\sqrt{-g}\,{}^{(4)}R$ на пространство и время, необходимо еще выразить аналогичным способом оставшиеся 6 компонент тензора кривизны. С этой целью удобно представить все тензоры в виде пространственно-временных тензоров и в качестве обобщенного понятия дифференцирования по времени использовать производную Ли по направлению временноподобного единичного поля, нормального к пространственноподобным гиперповерхностям. Необходимо доказать ряд предварительных результатов

а. $$\mathcal{L}_{\mathbf{u}}g_{\mu\nu} = u_{\mu;\ \nu} + u_{\nu;\ \mu},$$

б. $$\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(g_{\mu\nu} + u_{\mu}u_{\nu}) \equiv \mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\gamma_{\mu\nu}) = u_{\mu;\ \nu} + u_{\nu;\ \mu} + u_{\mu}a_{\nu} + a_{\mu}u_{\nu},$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ — метрика пространственноподобной гиперповерхности, выраженная в пространственно-временном координатном базисе, и $a^{\mu} \equiv u^{\lambda}\nabla_{\lambda}u^{\mu}$ — вектор кривизны (4-ускорение) временноподобных нормальных кривых с касательным векторным полем $u^{\mu}$. (Напомним, что $u_{\mu}a^{\mu} = 0$.)

в. Докажите, что тензор внешней кривизны равен

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\gamma_{\mu\nu}.$$

г. Проекция единичного тензора на гиперповерхность определяется выражением

$$\perp^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + u^{\mu}u_{\nu}.$$

На основе определения проекции $\perp$ покажите, что можно записать

$$u_{\alpha;\beta} \equiv -K_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta} - a_{\alpha}u_{\beta},$$

где

$$K_{\alpha\beta} = -\perp^{\mu}_{\alpha}\perp^{\nu}_{\beta} u_{(\mu;\,\nu)}$$

и

$$\omega_{\alpha\beta} = -\perp^{\mu}_{\alpha}\perp^{\nu}_{\beta} u_{[\mu;\,\nu]}.$$

д. Покажите, что если $u^{\mu}$ — единичное нормальное векторное поле семейства пространственноподобных гиперповерхностей, то $\omega_{\alpha\beta} = 0$.

е. Теперь необходимые средства у нас в руках. Для получения результата поступите следующим образом:

1. Выпишите $\mathfrak{L}_u K_{\mu\nu}$ (см. упражнение 21.8).

2. Вставьте это выражение в тождество Риччи, записанное в виде

$$u^{\sigma}\nabla_{\sigma}\nabla_{\mu}u_{\nu} = u^{\sigma}\nabla_{\mu}\nabla_{\sigma}u_{\nu} + {}^{(4)}R_{\rho\nu\mu\sigma}u^{\sigma}u^{\rho}.$$

3. Используя проекцию $\perp$, спроектируйте два оставшихся свободных индекса на гиперповерхность и получите

$$\perp^{\mu}_{\alpha}\perp^{\rho}_{\beta}{}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma}u^{\nu}u^{\sigma} = \mathfrak{L}_u K_{\alpha\beta} + K_{\alpha\gamma}K^{\gamma}_{\beta} + {}^{(3)}\nabla_{(\alpha}a_{\beta)} + a_{\alpha}a_{\beta},$$

где, как можно показать, ${}^{(3)}\nabla_{\alpha}a_{\beta} \equiv \perp^{\mu}_{\alpha}\perp^{\nu}_{\beta}\nabla_{\mu}a_{\nu}$ — трехмерная ковариантная производная от $a_{\beta}$. Покажите, что в гауссовых нормальных координатах отсюда следует

$$R_{0i\,0j} = \frac{\partial}{\partial t}K_{ij} + K_{ik}K^{k}_{j}.$$

ж. Наконец, для построения ${}^{(4)}R$ необходимо показать, что

$$\gamma^{\mu\nu}\left[{}^{(3)}\nabla_{(\mu}a_{\nu)} + a_{\mu}a_{\nu}\right] = g^{\mu\nu}\left[{}^{(3)}\nabla_{(\mu}a_{\nu;} + a_{\mu}a_{\nu}\right] = a^{\lambda}{}_{;\lambda}.$$

## 21.10. Тензор ${}^{(4)}R^{i}_{nin}$ как функция внешней кривизны плюс ковариантная дивергенция[1)]

Пусть $\alpha'$ — произвольный гладкий набор четырех координат, не обязательно каким-либо образом согласованный с выбором 1-параметрического семейства гиперповерхностей.

а. Покажите, что

$${}^{(4)}R^{i}_{nin} = g^{\alpha'\nu'}n^{\beta'}\left(n_{\alpha';\,\beta'\nu'} - n_{\alpha';\,\nu'\beta'}\right).$$

б. Покажите, что ковариантные дивергенции

$$\left(n^{\beta'}n^{\nu'}{}_{;\beta'}\right)_{;\nu'}$$

и

$$-\left(n^{\beta'}n^{\nu'}{}_{;\nu'}\right)_{;\beta'}$$

---

[1)] Упражнение составлено К. Кухаржом.

можно устранить из этого выражения таким образом, что оставшееся выражение будет содержать только первые производные вектора единичной нормали $\mathbf{n}$.

в. Замечая, что базисные векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{n}$ образуют полный набор, обоснуйте формулу

$$g^{\beta'\mu'} = e_i^{\beta'}\omega^{i\mu'} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1} n^{\beta'} n^{\mu'},$$

где $\omega^i$ — 1-форма, дуальная $\mathbf{e}_i$.

г. Замечая, что

$$n_{\alpha';\beta'} n^{\alpha'} = 0$$

и

$$K_{ij} = -e_{i\alpha';\beta'} e_j^{\beta'},$$

покажите, что

$${}^{(4)}R^i_{nin} = (\mathrm{Sp}\,\mathbf{K})^2 - \mathrm{Sp}\,\mathbf{K}^2 + \text{ковариантная дивергенция}.$$

---

## § 21.6. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ ГИЛЬБЕРТА И ЕГО МОДИФИКАЦИЯ АРНОВИТТОМ — ДЕЗЕРОМ — МИЗНЕРОМ, КОТОРЫЕ ИСПОЛЬЗОВАЛИ РАСЩЕПЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ НА ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ

К счастью, для анализа динамики не надо стремиться получить недостающую формулу для ${}^{(4)}R^n_{ink}$. Существенно, однако, знать лагранжеву плотность в принципе действия Гильберта

$$16\pi \mathfrak{L}_{\text{геом}} = (-{}^{(4)}g)^{1/2}\,{}^{(4)}R, \tag{21.83}$$

являющуюся сердцем всего динамического анализа. В современных обозначениях АДМ [139] эта плотность имеет вид

$$(-{}^{(4)}g)^{1/2}\,{}^{(4)}R = (-{}^{(4)}g)^{1/2}[{}^{(4)}R^{ij}{}_{ij} + 2\,{}^{(4)}R^{in}{}_{in}] =$$

$$= (-{}^{(4)}g)^{1/2}[R + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})(\mathrm{Sp}\,\mathbf{K}^2 - (\mathrm{Sp}\,\mathbf{K})^2) + 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\,{}^{(4)}R^i_{nin}]. \tag{21.84}$$

Кухарж [144] [1]) (см. также упражнение 21.10) показывает, как вычислить достаточную часть этой величины, не вычисляя ее полностью. Разность между «достаточной частью» и «целым» равна производной по времени плюс дивергенция; последняя имеет вид

$$[(-{}^{(4)}g)^{1/2}A^\alpha]_{;\alpha} = (-{}^{(4)}g)^{1/2}\,A^\alpha{}_{;\alpha}. \tag{21.85}$$

Принцип АДМ можно получить из принципа действия Гильберта, опустив в последнем полную производную

[1]) Лекция [144] входила в курс теории относительности, читавшийся в Принстонском университете.

Если умножить (21.83) на $dtdx^1dx^2dx^3$ и проинтегрировать, чтобы получить интеграл действия, то член (21.85) сводится к поверхностному интегралу. На величину этого интеграла не влияют вариации геометрии, внутренней по отношению к данной поверхности. Следовательно, если опустить член (21.85), то это не повлияет на уравнения движения. Результат вычисления (упражнение 21.10) прост: после отбрасывания дивергенции изменяется знак членов в $\mathrm{Sp}\mathbf{K}^2$ и $(\mathrm{Sp}\mathbf{K})^2$ в (21.84). Таким образом, вариационный принцип принимает вид

$$\begin{aligned}(\text{экстремум}) &= I_{\text{модифицирован}} = \int \mathscr{L}_{\text{модифицирован}} d^4x = \\ &= (1/16\pi) \int [R + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})((\mathrm{Sp}\,\mathbf{K})^2 - \mathrm{Sp}\,\mathbf{K}^2)]\, N g^{1/2}\, dt\, d^3x + \\ &\quad + \int \mathscr{L}_{\text{полей}}\, d^4x. \end{aligned} \tag{21.86}$$

Выражение (21.86) в перефразированной форме представляет отправную точку для анализа динамики геометрии по Арновитту, Дезеру и Мизнеру.

Следующие два добавления из статьи Йорка [145] (см. также упражнение 21.9) усиливают геометрическое понимание вышеприведенного анализа. *Первое*: Наиболее естественно определить тензор внешней кривизны в виде (см. также [142])

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathbf{n}}\mathbf{g}, \tag{21.87}$$

где $\mathbf{g}$ — метрический тензор 3-геометрии, $\mathbf{n}$ — времениподобное единичное нормальное поле, $\mathscr{L}$ — производная Ли, определенная в упражнении 21.8. *Второе*: Дивергенция (21.85), которую следует добавить в лагранжиан (21.86), чтобы получить лагранжиан Гильберта, равна

$$-2\left[(-{}^{(4)}g)^{1/2}(n^{\alpha'}\,\mathrm{Sp}\,\mathbf{K} + a^{\alpha'})\right]_{,\alpha'}, \tag{21.88}$$

где $\alpha'$ означает общие координаты (см. упражнение 21.10) и

$$a^{\alpha'} = n^{\alpha'}{}_{;\beta'}n^{\beta'} \tag{21.89}$$

—4-ускорение наблюдателя, движущегося по времениподобной нормали $\mathbf{n}$ к последовательным сечениям.

## § 21.7. ФОРМУЛИРОВКА ДИНАМИКИ ГЕОМЕТРИИ ПО АРНОВИТТУ, ДЕЗЕРУ И МИЗНЕРУ

Дирак (см. [146, 147] и цитируемые там более ранние работы) сформулировал динамику геометрии в $(3+1)$-мерной форме, обобщая скобки Пуассона и гамильтоновы уравнения. Взамен Арновитт, Дезер и Мизнер сделали основой динамики геометрии

вариационный принцип Гильберта — Палатини. Мы будем следовать здесь подходу АДМ [139] ввиду его простоты. Перепишем гравитационную часть подынтегрального выражения в принципе действия Гильберта — Палатини в сжатой, но стандартной форме (учитывая множитель $16\pi$, который АДМ опускали, так как использовали другие единицы):

$$16\pi\mathscr{L}_{\text{истин. геом}} = \mathscr{L}_{\text{геом. АДМ}} = -g_{ij}\partial\pi^{ij}/\partial t - \\ - N\mathscr{H} - N_i\mathscr{H}^i - 2\left[\pi^{ij}N_j - \frac{1}{2}N^i \operatorname{Sp}\pi + N^{|i}(g)^{1/2}\right]_{,i}. \quad (21.90)$$

Здесь каждое обозначение имеет особый смысл и будет играть свою особую роль:

$$\pi^{ij}_{\text{истин}} = \frac{\delta_{\text{действие}}}{\delta g_{ij}}\left(\begin{array}{l}\text{«геометродинамический импульс поля»,}\\ \text{динамически сопряженный}\\ \text{«геометродинамической}\\ \text{координате поля»}\ g_{ij}\end{array}\right) = \quad \begin{array}{l}\text{Импульсы,}\\ \text{сопряженные}\\ \text{динамическим}\\ \text{переменным}\ g_{ij}\end{array}$$

$$= \frac{\pi^{ij}}{8\pi}; \qquad \pi^{ij} = g^{1/2}(g^{ij}\operatorname{Sp}\mathbf{K} - K^{ij}) \quad (21.91)$$

(здесь импульс $\pi^{ij}$, используемый АДМ, обычно более удобен, чем $\pi^{ij}_{\text{истин}}$);

$$\mathscr{H}_{\text{истин}} = \mathscr{H}(\pi^{ij}_{\text{истин}}, g_{ij}) = (\text{«супергамильтониан»}) = \mathscr{H}/16\pi;$$

$$\mathscr{H}(\pi^{ij}, g_{ij}) = (-g)^{1/2}\left(\operatorname{Sp}\pi^2 - \frac{1}{2}(\operatorname{Sp}\pi)^2\right) - g^{1/2}R; \quad (21.92)$$

$$16\pi\mathscr{H}^i_{\text{истин}} = \mathscr{H}^i = \mathscr{H}^i(\pi^{ij}, g_{ij}) = (\text{«суперимпульс»}) = -2\pi^{ik}{}_{|k}. \quad (21.93)$$

Здесь при образовании ковариантной производной величина $\pi^{ik}$ трактуется как тензорная плотность, что следует из определения этой величины (21.91) (см. также § 21.2). Величинами, которые следует варьировать для экстремизации действия, являются следующие коэффициенты в метрике 4-геометрии: шесть $g_{ij}$, функция хода $N$ и функция сдвига $N_i$, а также шесть «геометродинамических импульсов» $\pi^{ij}$. Чтобы проварьировать эти импульсы, а также метрику, необходимо 1) следовать картине элементарной гамильтоновой динамики (дополнение 21.1), где, считая импульс $p$ и координату $x$ независимыми переменными, приходят вместо одного уравнения Лагранжа второго порядка к двум уравнениям Гамильтона первого порядка, и 2) следовать в некоторой мере вариационному принципу Палатини из § 21.2. Там, однако, надо было варьировать 40 коэффициентов связности, а здесь — только 6 $\pi^{ij}$. Знать эти импульсы и 3-метрику — значит знать внешнюю кривизну. Прежде чем выполнять варьирование, опустим в (21.90) дивергенцию $-2[\ ]_{,i}$, поскольку она приводит только к поверхностным интегралам, а потому никоим образом не влияет на уравнения движения, которые следуют из вариационного принципа.

Перепишем также первый член в (21.90) в виде

$$-(\partial/\partial t)(g_{ij}\pi^{ij})+\pi^{ij}\,\partial g_{ij}/\partial t \tag{21.94}$$

и опустим в вариационном принципе полную производную по времени, поскольку она не имеет отношения к получающимся уравнениям движения. Принцип действия примет теперь вид

$$\begin{aligned}\text{экстремум} &= I_{\text{истин}} = I_{\text{АДМ}}/16\pi = \\ &= (1/16\pi)\int [\pi^{ij}\partial g_{ij}/\partial t - N\mathscr{H}(\pi^{ij}, g_{ij}) - \\ &\quad - N_i\mathscr{H}^i(\pi^{ij}, g_{ij})]\,d^4x + \int \mathscr{L}_{\text{поля}}\,d^4x.\end{aligned} \tag{21.95}$$

**Принцип действия гласит: задай 3-геометрию на каждой поверхности сандвича**

Здесь, как всегда, принцип действия сам говорит нам, что следует фиксировать, чтобы действие было полностью определено (если действие обладает экстремумом). Помимо соответствующих потенциалов, связанных с полями, а не с геометрией, с первого взгляда кажется, что единственными величинами, которые следует фиксировать на начальной и конечной гиперповерхностях, являются значения шести $g_{ij}$. Однако принцип действия АДМ инвариантен относительно любого изменения координат $x^1, x^2, x^3 \to \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$ на последовательных пространственноподобных сечениях. Поэтому величинами, которые действительно должны быть заданы на двух поверхностях сандвича, являются 3-геометрии ${}^{(3)}\mathscr{G}'$ (на начальной гиперповерхности) и ${}^{(3)}\mathscr{G}$ (на конечной гиперповерхности) и ничего больше.

**Описание 3-геометрии**

Согласно математической терминологии, 3-геометрия ${}^{(3)}\mathscr{G}$ представляет собой «класс эквивалентности» набора дифференцируемых многообразий, которые изометрически эквивалентны друг другу при дифеоморфизмах. Согласно терминологии обычного физика, 3-геометрия есть класс эквивалентности 3-метрик $g_{ij}(x, y, z)$, которые эквивалентны друг другу при преобразованиях координат. Используя более повседневные термины, можно сказать, что два автомобильных крыла имеют одну и ту же 2-геометрию, если они имеют одинаковую форму, независимо от того, сколько координатных штрихов, нарисованных на одном крыле, отличается от координатных штрихов, нарисованных на другом крыле.

**Импульс, сопряженный «координате поля», — пример из электромагнетизма**

В качестве примера лагранжиана поля в уравнении (21.95), который физически уместен и в то же время не содержит ненужных усложнений, рассмотрим лагранжиан свободного от источников электромагнитного поля. Можно выбрать лагранжиан поля, который имеет классическое максвелловское значение

$$(1/8\pi)(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2) \to -(1/16\pi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{21.96}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial A_\nu/\partial x^\mu - \partial A_\mu/\partial x^\nu. \tag{21.97}$$

Вариация лагранжиана относительно независимых динамических переменных поля — четырех потенциалов $A_\alpha$ — приводит тогда

непосредственно к четырем волновым уравнениям второго порядка в частных производных для этих четырех потенциалов. Однако как для электродинамики, так и для геометродинамики удобно вместо этого иметь большее число уравнений первого порядка. Ищем аналог гамильтоновых уравнений динамики частицы

$$\begin{aligned} dx/dt &= \partial H\,(x,\ p)/\partial p, \\ dp/dt &= -\,\partial H\,(x,\ p)/\partial x. \end{aligned} \tag{21.98}$$

Эти уравнения получаются в результате замены интеграла Лагранжа $\int L\,(x,\ \dot{x})\,dt$ интегралом Гамильтона $\int [p\dot{x} - H\,(x,\ p)]dt$. Таким же образом здесь подынтегральное выражение действия (21.96) заменяется величиной для плоского пространства-времени:

$$(1/4\pi)\left[A_{\mu,\,\nu}F^{\mu\nu} + \tfrac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]. \tag{21.99}$$

В действительности пространство-время следует считать не только искривленным, но также и разрезанным на пространственноподобные гиперповерхности. Это (3 + 1)-расщепление геометрии делает желательным расщепление 10 геометродинамических потенциалов на 6 $g_{ij}$ и 4 функции хода и сдвига. Аналогично и здесь 4 потенциала $A_\mu$ расщепляются на 3 компоненты векторного потенциала $A_i$ и скалярный потенциал $A_0 = -\phi$ (знак выбирается таким образом, чтобы в плоском пространстве-времени в системе координат Минковского $\phi = A^0$). В этих обозначениях, учитывая стандартный множитель плотности $(-{}^{(4)}g)^{1/2}$ и опуская полную производную по времени $(\partial/\partial t)\,(A_i\mathscr{E}^i)$, которая не влияет на уравнения движения, лагранжеву плотность можно записать в виде формулы

Лагранжева плотность электромагнитного поля

$$\begin{aligned} 4\pi\mathscr{L}_{\text{поле}} = &-\mathscr{E}^i\,\partial A_i/\partial t + \phi\mathscr{E}^i{}_{,i} - \\ &-\frac{1}{2}\,N g^{-1/2} g_{ij}\,(\mathscr{E}^i\mathscr{E}^j + \mathscr{B}^i\mathscr{B}^j) + N^i\,[ijk]\,\mathscr{E}^j\mathscr{B}^k. \end{aligned} \tag{21.100}$$

Здесь использован символ альтернирования $[ijk]$, который определяет изменение знака при перестановке двух любых индексов и нормирован так, что $[123] = 1$. Отметим, что 3-тензор $\varepsilon^{ijk}$ и символ альтернирования $[ijk]$ связаны почти так же, как связаны соответствующие четырехмерные объекты в уравнении (8.10), поэтому можно записать

$$\mathscr{B}^i = \frac{1}{2}\,[ijk]\,(A_{k,\,j} - A_{j,\,k}). \tag{21.101}$$

Величины $\mathscr{B}^i$ — компоненты магнитного поля на пространственно-временном сечении. Они не считаются независимой переменной, а полностью заданы выбором трех потенциалов $A_i$. Обратный случай выполняется для компонент электрического поля $\mathscr{E}^i$: они, подобно импульсам, трактуются как независимые переменные.

Экстремизация действия относительно $\mathscr{E}^i$ (упражнение 21.11) дает аналог уравнения $dx/dt = p/m$ механики частицы и аналог

уравнения

$$E_i = -\partial A_i/\partial t - \partial\phi/\partial x^i \tag{21.102}$$

электродинамики в плоском пространстве-времени, а именно

Уравнение для начальных значений в электромагнетизме

$$-\partial A_i/\partial t - \phi_{,i} - Ng^{-1/2}g_{ij}\mathscr{E}^j - [ijk]N^j\mathscr{B}^k = 0. \tag{21.103}$$

Здесь последний член, содержащий функции сдвига $N^j$, возникает из-за косоугольности системы координат. Арновитт, Дезер и Мизнер дают следующие дополнительные, но эквивалентные способы получения результата (21.103):

$$\mathscr{E}^i = \frac{1}{2}[ijk]^* F_{jk} =$$

$$= \frac{1}{2}[ijk]\left\{\frac{1}{2}[jk\mu\nu]\,(-{}^{(4)}g)^{1/2}\,{}^{(4)}g^{\mu\alpha({}^{4})}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\right\}. \tag{21.104}$$

Они отмечают, что $\mathscr{E}^j$ и $\mathscr{B}^j$ не являются непосредственно контравариантными компонентами полей на гиперповерхности одновременности $\Sigma$

$$E = E^j e_j, \qquad B = B^j e_j, \tag{21.105}$$

а представляют собой контравариантные плотности

$$\mathscr{E}^j = g^{1/2}E^j, \qquad \mathscr{B}^j = g^{1/2}B^j. \tag{21.106}$$

Экстремизация действия относительно трех $A_i$ (упражнение 21.12) дает в искривленном пространстве-времени аналог уравнений Максвелла

$$\partial E/\partial t = \nabla \times B. \tag{21.107}$$

Экстремизация относительно $\phi$ приводит к дивергентному выражению

Оставшийся потенциал $\phi$ входит в принцип действия только в одной точке. Экстремизация относительно него немедленно приводит к дивергентному выражению для свободного электромагнитного поля

$$\mathscr{E}^i{}_{,i} = 0. \tag{21.108}$$

Принцип действия указывает, что следует фиксировать на пределах

Если принцип действия сам указывает, какие величины следует фиксировать на пределах, то какие указания на этот счет дает (21.100)? Можно вернуться назад к примеру механики частиц в гамильтоновой форме (см. дополнение 21.1) и отметить, что здесь на пределах должна фиксироваться только координата $x$, а импульс $p$ мог бы «развеваться на ветру». Поэтому вариация действия была равна

$$\delta I = \delta\int [p\dot{x} - H(x, p)]\,dt =$$

$$= \int \{[\dot{x} - \partial H/\partial p]\,\delta p + (d/dt)\,(p\delta x) + [-\dot{p} - \partial H/\partial x]\,\delta x\}\,dt. \tag{21.109}$$

Чтобы прийти к полностью определенному экстремуму интеграла действия $I$, недостаточно было приравнять нулю коэффициенты в квадратных скобках при $\delta p$ и $\delta x$, т. е. потребовать выполнения

гамильтоновых уравнений движения. Необходимо было вдобавок приравнять нулю величины на пределах ($p\delta x$), т. е. задать $x$ в начале и в конце движения. Аналогично и здесь. Величины $\phi$ и $\mathscr{E}^i$ могут «развеваться на ветру», однако магнитное поле должно быть задано на двух поверхностях сандвича, чтобы можно было говорить о полностью определенном экстремуме действия. Почему следует задавать магнитное поле, т. е. 3 величины

На пределах заданы не потенциалы, а само магнитное поле

$$\partial A_j/\partial x^i - \partial A_i/\partial x^j, \tag{21.110}$$

а не 3 компоненты $A_i$ самого потенциала? Когда лагранжева плотность (21.100) варьируется по отношению к $A_i$ и вариация первого члена интегрируется по частям, как это необходимо для получения динамических уравнений, то на пределах получается член

$$\int_{\Sigma_{\text{начальн}}} \mathscr{E}^i \delta A_i \, d^3x - \int_{\Sigma_{\text{конечн}}} \mathscr{E}^i \delta A_i \, d^3x, \tag{21.111}$$

Чтобы вариационная задача была полностью определена, требуется чтобы оба эти члена на пределах исчезали. Перейдем с помощью калибровочного преобразования от данного векторного потенциала к другому векторному потенциалу $A_{i_{\text{нов}}}$

$$A_{i_{\text{нов}}} = A_i + \delta A_i = A_i + \partial\lambda/\partial x^i. \tag{21.112}$$

Компоненты магнитного поля, определяемые тремя $A_{i_{\text{нов}}}$, никак не отличаются от компонент (21.110). Более того, «вариация на пределах»

$$\int \mathscr{E}^i \delta A_i \, d^3x = \int \mathscr{E}^i \, \partial\lambda/\partial x^i \, d^3x = -\int \lambda \mathscr{E}^i{}_{,i} \, d^3x \tag{21.113}$$

для любого произвольного выбора $\lambda$ автоматически обращается в нуль благодаря дивергентному условию (21.108). Поэтому на пределах фиксируются не 3 величины $A_i$ (простые потенциалы), а физически значимые величины (21.110) — компоненты магнитного поля. Кроме того, дивергентное условие $\mathscr{E}_{,i} = 0$ становится теперь *уравнением для начальных значений, необходимым для определения потенциала* $\phi$.

Чтобы перейти от электродинамики к геометродинамике, необходимо только заменить в предшествующем абзаце «три $A_i$» на «шесть $g_{ij}$», «компоненты магнитного поля» на «3-геометрию ${}^{(3)}\mathscr{G}$ » и «потенциал $\phi$» на «функции хода и сдвига $N$ и $N^i$».

Вернемся назад, имея в виду этот параллелизм, к вариационному принципу (21.95) общей теории относительности в формулировке ADM. Задавшись 3-геометрией на двух поверхностях сандвича, проварьируем для экстремизации действия условия между ними, т. е. проварьируем по очереди $\pi^{ij}$, $g_{ij}$ и функции хода и сдвига. Геометродинамические импульсы появляются только в алгебраическом виде всюду в принципе действия, кроме члена $-2N_i\pi^{ij}{}_{|j}$. Варьирование и интегрирование по частям дает

Принцип АДМ воспроизводит формулу для геометродинамического импульса

$2N_{i\,|\,j}\delta\pi^{ij}$. Собирая коэффициенты при $\delta\pi^{ij}$ и приравнивая их сумму нулю, приходим к некоторым условиям, необходимым для экстремума:

$$\partial g_{ij}/\partial t = 2Ng^{-1/2}\left(\pi_{ij} - \frac{1}{2}\,g_{ij}\,\mathrm{Sp}\,\pi\right) + N_{i\,|\,j} + N_{j\,|\,i}. \quad (21.114)$$

Этот результат согласуется с результатом, следующим из уравнений (21.91), определяющих геометродинамический импульс через внешнюю кривизну, являющуюся, согласно выражению (21.67), функцией хода и сдвига. Результат (21.114) здесь не менее полезен, чем результат

$$dx/dt = \partial H\,(x,\ p)/\partial p = p/m$$

в самой элементарной проблеме механики: он представляет собой первый шаг в расщеплении уравнения или уравнений второго порядка на вдвое большее число уравнений первого порядка.

**Вывод динамических уравнений и уравнений для начальных значений из формализма АДМ**

Проварьируем теперь действие относительно $g_{ij}$ и снова после соответствующего интегрирования по частям и перегруппировки найдем оставшиеся динамические уравнения первого порядка общей теории относительности [упрощенные с помощью уравнений (21.116) и (21.117)]:

$$\begin{aligned}\partial\pi^{ij}/\partial t = {} & -Ng^{1/2}\left(R^{ij} - \frac{1}{2}\,g^{ij}R\right) + \frac{1}{2}\,Ng^{-1/2}g^{ij}\left(\mathrm{Sp}\,\pi^2 - \frac{1}{2}\,(\mathrm{Sp}\,\pi)^2\right) - \\ & - 2Ng^{-1/2}\left(\pi^{im}\pi_m{}^j - \frac{1}{2}\,\pi^{ij}\,\mathrm{Sp}\,\pi\right) + g^{1/2}\left(N^{|\,ij} - g^{ij}N^{|\,m}{}_{|\,m}\right) + \\ & + \left(\pi^{ij}N^m\right)_{|\,m} - N^i{}_{|\,m}\pi^{mj} - N^j{}_{|\,m}\pi^{mi} + \\ & + \left[\begin{array}{l}\text{члены, связанные с полями, а не с}\\ \text{геометрией, обсуждавшиеся АДМ}\\ \text{[139], но опущенные здесь для}\\ \text{простоты}\end{array}\right]^{ij}. \end{aligned} \quad (21.115)$$

В заключение, экстремизуя действие (21.95) относительно функции хода $N$ и функций сдвига $N_i$, находим 4 так называемые уравнения для начальных значений общей теории относительности, эквивалентные (21.77) и (21.81), или $G^\alpha_n = 8\pi T^\alpha_n$:

$$-(1/16\pi)\,\mathscr{H}\,(\pi^{ij},\ g_{ij}) = (1/8\pi)\,Ng^{-1/2}g_{ij}\left(\mathscr{E}^i\mathscr{E}^j + \mathscr{B}^i\mathscr{B}^j\right), \quad (21.116)$$

$$-(1/16\pi)\,\mathscr{H}^i\,(\pi^{ij},\ g_{ij}) = -(1/4\pi)\,[ijk]\,\mathscr{E}^j\mathscr{B}^k. \quad (21.117)$$

---

**УПРАЖНЕНИЯ**

**21.11. Первое применение вариационного принципа АДМ для электромагнитного поля**

Экстремизуйте действие с лагранжевой плотностью (21.100) относительно $\mathscr{E}^i$ и выведите результат (21.103).

**21.12. Второе применение вариационного принципа АДМ для электромагнитного поля**

Экстремизуйте действие с лагранжевой плотностью (21.100) относительно $A_l$ и проверьте, что получающиеся уравнения в любой плоской области Минковского эквивалентны уравнениям (21.107).

**21.13. Источник Фарадея — Максвелла в динамических уравнениях общей теории относительности**

Вычислите члены с источниками, указанные в конце уравнений (21.115), из лагранжиана (21.100) максвелловской электродинамики, рассматриваемого как функция $A_i$ и $g_{ij}$.

**21.14. Выбор $\phi$ не имеет значения**

Докажите сделанное в тексте утверждение, что динамическая эволюция электрического и магнитного полей не зависит от выбора скалярного потенциала $\phi\,(t, x, y, z)$ а) в плоском пространстве-времени в координатах Минковского и б) в общей теории относительности; при этом следуйте уравнениям (21.103) и (21.107), обобщенным в упражнении 21.12.

**21.15. Выбор сечения пространства-времени не имеет значения**

Задавшись метрикой ${}^{(3)}g_{ij}\,(x, y, z)$ и внешней кривизной $K^{ij}\,(x, y, z)$ на пространственноподобной гиперповерхности $\Sigma$, предположив, что эти величины удовлетворяют уравнениям для начальных значений (21.116) и (21.117), и задавшись также двумя альтернативными выборами функций хода и сдвига $(N, N_i)$ и $(N + \delta N, N_i + \delta N_i)$, покажите, что сама кривизна в точке $\mathcal{P}$ (определяемая своими компонентами в этих двух отдельных системах координат), вычисленная с помощью динамических уравнений (21.114) и (21.115) «малым отходом» от гиперповерхности (в первом порядке по малым величинам), не зависит от этого выбора функций хода и сдвига.

## § 21.8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВПЕРЕД ПО ВРЕМЕНИ

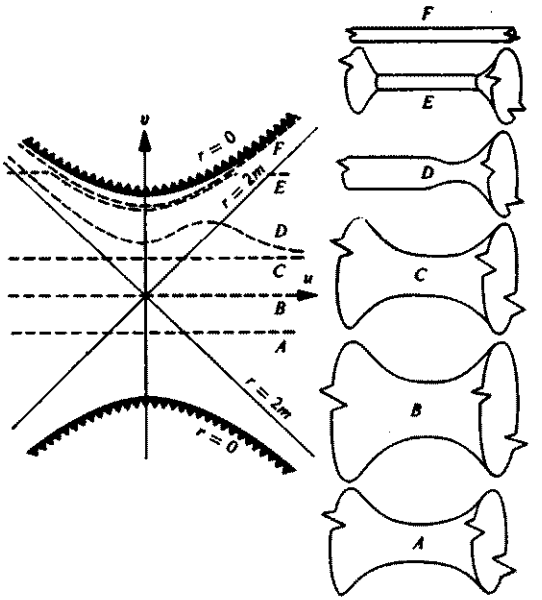
В гамильтоновом формализме Арновитта, Дезера и Мизнера (Уилер [110, 148] цитирует много статей других авторов по квантованию общей теории относительности, в основном приводящих теорию Эйнштейна к гамильтоновой форме) динамика геометрии принимает форму, совершенно аналогичную гамильтоновой динамике геометрии. Там задаются в начальный момент времени координатой $x$ и импульсом $p$ и, чтобы найти эти динамически

сопряженные переменные во все будущие времена, интегрируют два дифференциальных уравнения первого порядка для $dx/dt$ и $dp/dt$ вперед по времени. Здесь на начальной пространственноподобной гиперповерхности задаются соответствующими значениями $g_{ij}$ и $\pi^{ij}$ и, чтобы найти геометрию во все будущие времена, интегрируют вперед по времени два уравнения первого порядка (21.114) и (21.115). Например, в соответствии с хорошо известной теперь в современной гидродинамике практикой можно переписать дифференциальные уравнения в виде разностных уравнений и затем выполнить интегрирование на электронной вычислительной машине со значительной емкостью памяти.

Время в общей теории относительности имеет многострелочный характер и сильно отличается от времени в нерелятивистской механике частиц, которое имеет однопараметрическую природу (о многовременном формализме в релятивистской динамике системы многих взаимодействующих частиц см., однако, [149]). Изучающий геометрию может свободно толкать пространственноподобную гиперповерхность в одном месте вперед быстрее, чем в другом, пока гиперповерхность остается пространственноподобной. Эта свобода отражена на каждой стадии интегрирования $t$ в функции хода $N(t, x, y, z)$. Уравнения (21.114) и (21.115) — не канал для снабжения аналитика информацией о функции $N$. Они — канал, по которому аналитик выдает информацию об $N$. Выбор $N$ — дело не Природы, а человека. До тех пор пока такой выбор не сделан, динамические уравнения не могут приступить к исполнению своей роли. «Временно́й параметр» $t$ лишь обозначение, позволяющее отличить одну пространственноподобную гиперповерхность от другой в однопараметрическом семействе гиперповерхностей, а функция $N$ выдает информацию о промежутке собственного времени, когда она меняется от одного места к другому между последовательными сечениями, на которых регистрируется эволюция геометрии во времени. Кинокамера может снять происходящее в данный момент времени только на один кадр, однако оператор, выбирая угол съемки сцены, может сильно увеличить возможности камеры. Так же и здесь с выбором сечения.

**Функции хода и сдвига выбираются таким образом, чтобы проводить интегрирование по времени наиболее удобным способом**

Для аналитика, особенно проводящего свой анализ на вычислительной машине, представляет интерес другой выбор. Пусть аналитик определяет с помощью уравнений (21.114), (21.115), записанных в виде разностных уравнений, происходящее на сетке точек, характеризуемых значениями $x = \ldots, 73, 74, 75, 76, 77, \ldots$ и т. д. Он находит, что наиболее сильно кривизны проявляются в локализованной области в интервале приблизительно от $x = 83$ до $x = 89$. Желая увеличить плотность индикаторных точек в этой области, аналитик заставляет точки с меньшими и большими значениями $x$ с течением времени $t = \ldots, 122, 123, 124, \ldots$ последовательно сдвигаться в эту область, причем индикаторные точки с меньшими значениями $x$ он заставляет двигаться вправо (число $N_1$ положительное), а точки с большими




ФИГ. 21.4.
**Некоторые примеры из множества способов проведения отдельных пространственноподобных сечений через одну и ту же полную шварцшильдовскую 4-геометрию $^{(4)}\mathcal{G}$.**

значениями $x$ — влево (число $N_1$ отрицательное). Другими словами, аналитик в той же мере ответствен за выбор трех функций сдвига $N_l\,(t, x, y, z)$, как и за выбор функции хода $N$. Уравнения не скажут ему, что выбрать. Он должен сказать об этом уравнениям.

Такая свобода выбора, отнюдь не усложняя динамических уравнений (21.114), (21.115), делает их в последующем рассмотрении податливыми и чувствительными к желаниям аналитика, какой бы геометродинамический процесс не изучался.

Свободу в выборе четырех функций $N$, $N_l$ в общей теории относительности можно пояснить с другой стороны, сравнивая ее со свободой выбора в электродинамике одной функции $\phi\,(t, x, y, z)$, скалярного потенциала. Динамические уравнения Максвелла (21.103) и (21.107), обобщенные в упражнении 21.12, никоим образом не определяют $\phi$. Вместо этого они требуют, чтобы потенциал $\phi$ был определен (аналитиком) как цена за предсказание эволюции во времени векторного потенциала $A_l$. При изменении выбора зависимости $\phi\,(t, x, y, z)$ от координат и времени изменяются получаемые из динамических уравнений результаты для эволюции во времени и пространстве трех функций $A_l$. Однако значения физических величин — электрических и магнитных полей на последовательных гиперповерхностях — не зависят от

выбора $\phi$ (упражнение 21.14). Аналогично и в геометродинамике, изменение выбора четырех функций $N$, $N_i$ означает а) изменение формулировки координат в пространстве-времени и поэтому б) изменение результатов для внутренней метрики ${}^{(3)}g_{ij}$ и внешней кривизны $K^{ij}$ на последовательных пространственноподобных гиперповерхностях, но приводит к той же самой 4-геометрии ${}^{(4)}\mathcal{G}$ (фиг. 21.4) независимо от выбора координат (упражнение 21.15).

4-геометрия не зависит от выбора функций хода и сдвига

## § 21.9. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ТОНКОМ САНДВИЧЕ

Начальные данные: чем можно свободно распоряжаться и что фиксировано?

Задавшись подходящими начальными данными, можно определить эволюцию геометрии, интегрируя вперед по времени. Но что представляют собой «подходящие начальные данные»? Это 6 функций ${}^{(3)}g_{ij}(x, y, z)$ и 6 функций $\pi^{ij}(x, y, z)$ или $K^{ij}(x, y, z)$, которые совместно удовлетворяют четырем уравнениям для начальных значений (21.116) и (21.117). Требование задать координаты и импульсы соответствует хорошо известной схеме гамильтоновой механики, однако наложение на такие данные условий совместности или «связей» менее известно. Частица, движущаяся в двумерном пространстве, описывается координатами $x$, $y$ и координатами $p_x$, $p_y$, однако частица, удерживающаяся на окружности $x^2 + y^2 = a^2$, удовлетворяет связи $xp_x + yp_y = 0$. Поэтому наличие «связи» есть сигнал того, что система обладает меньшим количеством степеней свободы, чем система без связей. Полностью проанализировать 4 «начальных» условия или «связи» (21.116) и (21.117) означает, таким образом, определить 1) сколькими степенями свободы обладает геометрия и 2) каковы эти степени свободы, т. е. сказать точно, какие «ручки» следует приспособить, чтобы полностью управлять геометрией и ее эволюцией во времени. Подсчет, который можно провести сегодня, приводит к заключению, что геометрия обладает тем же количеством степеней свободы, что и электромагнитное поле. Отождествление «ручек», или свободно выбираемых характеристик динамики, менее продвинуто для геометрии по сравнению с электромагнетизмом (дополнение 21.2), но более поучительно.

По правилам для отождествления степеней свободы поля Эйнштейна или поля Фарадея и Максвелла требуется лишь знать, что следует фиксировать на начальной и конечной пространственноподобных гиперповерхностях, чтобы сделать соответствующий вариационный принцип полностью определенным. В таком случае есть выбор либо 1) задать определенную величину на обеих гиперповерхностях или 2) задать эту величину и динамически сопряженную ей величину на одной гиперповерхности, либо 3) задать величину на обеих гиперповерхностях, как при первом выборе, но перейти к пределу бесконечно тонкого сандвича, т. е. к заданию величины и скорости ее изменения со временем на одной

гиперповерхности. Для быстрого анализа проблемы начальных значений как в электродинамике, так и в геометродинамике третья процедура «тонкого сандвича» является простейшей. В качестве иллюстрации рассмотрим вначале электродинамику.

В общем случае на произвольной гладкой пространственноподобной гиперповерхности в искривленном пространстве-времени или в настоящем иллюстративном изложении на гиперповерхности $t = 0$ в пространстве-времени Минковского зададимся магнитным полем, дивергенция которого равна нулю, и скоростью его изменения со временем:

В электромагнитике задайте в качестве начальных данных магнитное поле и скорость его изменения

$$\mathscr{B}^i\,(0,\ x,\ y,\ z) \text{ задано,} \tag{21.118}$$

$$\dot{\mathscr{B}}^i\,(0,\ x,\ y,\ z) = \left(\frac{\partial \mathscr{B}^i}{\partial t}\right) \text{ также задано.} \tag{21.119}$$

Совместно эти величины представляют собой 4 и только 4 независимых данных на одну точку пространства. Как теперь получить импульсы $\pi^i \sim -\mathscr{E}^i$, чтобы начать интегрирование динамических уравнений (21.103) и (21.107) вперед по времени?

1. Найдем набор трех функций $A_i\,(0,\ x,\ y,\ z)$, таких, что, взяв от каждой из них ротор, получим 3 указанные величины $\mathscr{B}^i$. Это всегда можно сделать, так как дивергенция $\mathscr{B}^i{}_{,i}$ равна нулю. Однако выбор $A_i$ неоднозначен. Новый набор потенциалов $A_{i\,\text{нов}} = A_i + \partial\lambda/\partial x^i$ с произвольным гладким $\lambda$ дает столь же хорошее решение, что и начальный набор $A_i$. Независимо от этого выберем одно решение и будем его придерживаться.

2. Аналогично найдем набор трех функций $\dot{A}_i\,(0,\ x,\ y,\ z)$, таких, что, взяв от каждой из них ротор, получим указанные величины $\dot{\mathscr{B}}_i\,(0,\ x,\ y,\ z)$ и разрешим весь произвол в законном выборе.

3. Вспомним, что электрическое поле (импульс поля со знаком минус) дается выражением

$$\mathscr{E}_i = -\dot{A}_i - \partial\phi/\partial x^i \tag{21.120}$$

(формула справедлива без поправок только в плоском пространстве-времени). Уравнение для начальных значений или уравнение связи $\mathscr{E}^i{}_{,i} = 0$ приводится к виду

$$\nabla^2 \phi = -\eta^{ij}\dot{A}_{i,j}. \tag{21.121}$$

Найдем $\phi$.

4. Тогда уравнение (21.120) дает начальное электрическое поле, или электродинамический импульс поля $\pi^i \sim -\mathscr{E}^i$, необходимый (вместе с координатой поля $A_i$) для начала интегрирования динамических уравнений (21.103) и (21.107). (Мизнер и Уилер [102] рассматривают дополнительные свойства, которые появляются, если пространство многосвязанно. Каждое винтовое отверстие или «ручка» геометрии способны захватывать электрические силовые линии. Поток, захваченный каждым винтовым отверстием,

определяет классический электрический заряд $q_w$, связанный с этим винтовым отверстием. Чтобы полностью определить динамическую эволюцию электромагнитного поля, следует в дополнение к данным (21.118) и (21.219) указать раз и навсегда все эти заряды. Согласно [150], не существует геометродинамического аналога электрического заряда.)

Скалярный потенциал: вначале фиксирован; позже им можно свободно распоряжаться

5. При интегрировании не следует вычислять на каждом последовательном шаге по времени скалярный потенциал $\phi$, его надо выбрать. Лишь после того как сделан определенный выбор, из динамических уравнений получаются определенные результаты для $\pi^i$ и $A^i$ или $\mathscr{E}^i$ на каждом последовательном шаге.

Резюмируем проблему начальных значений электродинамики, сформулированную для тонкого сандвича. Задаются $\mathscr{B}^i$ и $\dot{\mathscr{B}}^i$ (или эквивалентно $\mathfrak{B}$ на двух соседних гиперповерхностях) и выбираются функции $A_i$ и $\dot{A}_i$, которые с большим произволом представляют эти начальные данные. Произвольно можно задать начальные функции $A_i$ и $\dot{A}_i$, при этом начальный потенциал $\phi$ не может быть произвольным. Однако во все последующие времена ситуация как раз противоположна: произволен потенциал $\phi$, а три функции $A_i$ не могут быть произвольными (как показывает интегрирование динамических уравнений).

В трактовке АДМ: задайте 3-геометрию и скорость ее изменения со временем

В геометродинамике ситуация совершенно аналогична. Задаются источниками 1-параметрического семейства пространственноподобных гиперповерхностей, а именно:

$$^{(3)}\mathscr{G}(0) \qquad \text{задано,} \tag{21.122}$$

$$^{(3)}\dot{\mathscr{G}}(0) = \frac{\partial\, ^{(3)}\mathscr{G}}{\partial t} \text{ задано.} \tag{21.123}$$

Далее поступают следующим образом:

1. Выбирают определенный набор координат $x^i = (x, y, z)$ и в функции этих координат находят однозначные метрические коэффициенты $g_{ij}(x, y, z)$, которые описывают 3-геометрию. Существование решения гарантируется тем обстоятельством, что $^{(3)}\mathscr{G}$ является римановой геометрией. Однако можно начать с различных координат и прийти к различным метрическим коэффициентам для описания той же самой 3-геометрии. Независимо от этого выбирают один набор координат, берут получающиеся метрические коэффициенты и придерживаются их как дающих половину требуемых начальных данных.

2. Аналогично, для описания 3-геометрии $^{(3)}\mathscr{G} + {}^{(3)}\dot{\mathscr{G}}\,dt$ при значении параметра $t + dt$ используют координаты $x^i + \dot{x}^i dt$ и приходят к метрическим коэффициентам $g_{ij} + \dot{g}_{ij}dt$. Произвол в $x^i$ разрешается поэтому законным образом, $^{(3)}\mathscr{G}$ дается как определенное начальное физическое данное и коэффициент $g_{ij}$ вследствие этого оказывается полностью заданным.

3. Напомним, что компоненты внешней кривизны $K_{ij}$ или импульсов $\pi^{ij}$ выражаются через $g_{ij}$ и $\dot{g}_{ij}$ и функции хода и сдвига $N$ и $N_i$ с помощью (21.67) или (21.67) плюс (21.91) или с помощью (21.114). Таким образом четыре уравнения для начальных значений или уравнения «связей» (21.116) и (21.117) становятся четырьмя условиями для нахождения четырех величин $N$ и $N_i$. Эти условия можно записать короче, вводя сокращения

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}[N_{i\,|\,j} + N_{j\,|\,i} - \partial g_{ij}/\partial t] \tag{21.124}$$

и

$$\gamma_2 = (\text{«сдвиг аномалии»}) = (\mathrm{Sp}\ \gamma)^2 - \mathrm{Sp}\ \gamma^2 \tag{21.125}$$

(для функций $x$, $y$, $z$ на начальной гиперповерхности одновременности). В таком случае имеем

$$^{(3)}R + \gamma_2/N^2 = 16\pi T_{nn} = 16\pi T^{nn} \tag{21.126}$$

для одного уравнения для начальных значений и

$$\left[\frac{\gamma_i^k - \delta_i^k\ \mathrm{Sp}\ \gamma}{N}\right]_{|k} = -8\pi T_i{}^n. \tag{21.127}$$

для трех других уравнений.

Вкратце подытожим сказанное. Выбираются $g_{ij}$ и $\dot{g}_{ij}$, которые с большим произволом (из-за произвольности координат, а не по причине какого-либо произвола в физике) представляют заданные начальные данные $^{(3)}\mathcal{G}$ и $^{(3)}\dot{\mathcal{G}}$. Весь произвол в начальное время, таким образом, исчерпывается и ожидается, что начальные функции $N$ и $N_i$, определяемые путем решения (21.126) и (21.127), уже не могут быть произвольными. Однако на всех более поздних пространственноподобных сечениях ситуация как раз противоположна: функциями хода и сдвига можно распоряжаться свободно, но если они однажды выбраны, шесть $g_{ij}$ (и шесть $K^{ij}$ или $\pi^{ij}$), получаемые при интегрировании динамических уравнений (21.114) и (21.115), уже не могут быть произвольными. Аналогия с электродинамикой ясна. Там одна «калибровочно-контролируемая» функция $\phi$ была фиксирована вначале эллиптическим уравнением (21.121), но начиная с этого времени была свободной. Здесь 4 функции хода и сдвига фиксируются вначале четырьмя уравнениями (21.126) и (21.127), но начиная с этого времени являются свободными.

**Функции хода и сдвига: вначале определяются; позже ими можно свободно распоряжаться**

В упражнении 21.16 уравнение для начальных значений (21.126) применяется для анализа полной эволюции во времени любой фридмановской Вселенной с уравнением состояния $p = p(\rho)$, связывающим давление и плотность. В упражнении 21.17 ищется вариационный принцип на пространственноподобной гиперповерхности $\Sigma$, эквивалентный по содержанию эллиптическому уравнению для начальных значений (21.121) скалярного потенциала $\phi$. В упражнениях 21.18 и 21.19 ищутся аналогичные вариационные принципы для определения функций хода и сдвига.

Подсчет начальных данных

Сколькими степенями свободы или сколькими «ручками» характеризуется 4-геометрия, которая должна быть получена? Метрические коэффициенты начальной 3-геометрии дали 6 чисел на одну точку пространства. Однако они были произвольными в пределах координатного преобразования, определяемого тремя функциями положения

$$x = x(x', y', z'), \quad y = y(x', y', z'), \quad z = z(x', y', z').$$

Поэтому истинное число величин с любой физической информацией, приходящихся на точку пространства, было 6—3=3. Можно наглядно представить себе эти 3 функции как 3 диагональные компоненты метрики в системе координат, в которой коэффициенты $g_{ij}$ приведены к диагональной форме. Обычно не представляется полезным идти дальше и развивать анализ в любой такой «стесненной обстоятельствами» системе координат.

Представим теперь, что рассматриваемая 3-геометрия ${}^{(3)}\mathcal{G}$ погружена в 4-геометрию ${}^{(4)}\mathcal{G}$, которая получается после интегрирований. Кроме того, будем полагать, что 4-геометрия ${}^{(4)}\mathcal{G}$ наделена выпуклостями, вогнутостями, колебаниями и волнами, отличающими ее от 4-геометрий другого рода и делающими столь нетипичными геометрию Минковского и специальные космологические модели. ${}^{(3)}\mathcal{G}$ представляет собой сечение в ${}^{(4)}\mathcal{G}$. Оно «чувствует» выпуклости, вогнутости, колебания и волны, присутствующие во всех областях ${}^{(4)}\mathcal{G}$, которые оно пересекает. В той степени, в которой ${}^{(4)}\mathcal{G}$ является типичным представителем своего класса, продвижение 3-геометрии ${}^{(3)}\mathcal{G}$ в другое место без превращения ее в другую 3-геометрию ${}^{(3)}\mathcal{G}$ не допускается. Если попытаться толкнуть немного ${}^{(3)}\mathcal{G}$ «вперед по времени» в определенном месте, то это с необходимостью приведет к изменению ${}^{(3)}\mathcal{G}$. В силу этого обстоятельства считается, что ${}^{(3)}\mathcal{G}$ «несет информацию о времени» [151, 152]. Более того, «движение вперед по времени» требует для своего описания одного числа на точку пространства. Можно представить себе это число в конкретных терминах, вообразив «произвольную систему координат $\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, установленную в ${}^{(4)}\mathcal{G}$. Затем можно принять, что гиперповерхность определяется тем значением $\bar{t} = \bar{t}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, при котором она разрезает типичную линию $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Движение вперед переносит ее в $\bar{t}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \delta\bar{t}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ и соответственно изменяет форму и метрические коэффициенты на ${}^{(3)}\mathcal{G}$. Обычно лучше не связываться с такой конкретной моделью, а скорее признать в качестве основного принципиального пункта, что 1) для характеристики положения ${}^{(3)}\mathcal{G}$ в пространстве-времени требуется одно данное на точку пространства и 2) волей-неволей это данное уже представлено в трех данных, приходящихся на точку пространства и характеризующих любую ${}^{(3)}\mathcal{G}$.

В заключение можно сказать, что количество данных, приходящихся на точку пространства в 3-геометрии ${}^{(3)}\mathcal{G}$ и реально говорящих что-либо о ${}^{(4)}\mathcal{G}$, в которую погружена или должна быть

погружена ${}^{(3)}\mathcal{G}$ (в зависимости от того, где проводится сечение ${}^{(3)}\mathcal{G}$ через эту ${}^{(4)}\mathcal{G}$), равно 2. Аналогично обстоит дело и для других ${}^{(3)}\mathcal{G}$, которые определяют другую «поверхность» тонкого или толстого сандвича. Поэтому заключают, что спецификация ${}^{(3)}\mathcal{G}$ и ${}^{(3)}\dot{\mathcal{G}}$ в действительности дает четыре чистых блока динамической информации о ${}^{(4)}\mathcal{G}$ на точку пространства (причем всю остальную информацию несет «многострелочное время», указывающее, где в ${}^{(4)}\mathcal{G}$ локализованы 3-геометрии). Согласно этой линии рассуждения, геометродинамика имеет то же число степеней свободы, что и электродинамика. К такому же заключению приходят совершенно иным путем, анализируя в приближении слабого поля (§ 35.3) гравитационные волны на плоском пространственно-временном фоне: для гравитационных и максвелловских волн имеются одинаковые интервалы возможных волновых чисел, для каждого волнового числа — два состояния поляризации, а для каждой поляризации — одна амплитуда и одна фаза (эквивалент одной координате и одному импульсу).

**Четыре блока геометродинамической информации на одну пространственную точку начальной гиперповерхности одновременности**

В электродинамике в заданном пространственно-временном многообразии можно явно отделить одну временную переменную на точку пространства (если электромагнетизм рассматривается в контексте многострелочного времени) от двух динамических переменных на точку пространства. Не так обстоит дело при формулировке геометродинамики в суперпространстве. Там в одном понятии 3-геометрии неразрешимым образом смешаны два рода величин.

Обратимся от начальных и конечных данных к интегралу действия, определяемому этими данными, и к принципу, согласно которому действие должно быть экстремальным:

$$I = I_{\text{экстремум}} = S.$$

В электродинамике действие зависит от переменных на конечной гиперповерхности согласно формуле

$$S = S(\Sigma, B), \tag{21.128}$$

а в геометродинамике — согласно формуле

$$S = S({}^{(3)}\mathcal{G}). \tag{21.129}$$

В каждом случае в аргументе функционала имеется три числа на точку пространства (одно в $\Sigma$, два в магнитном поле, дивергенция которого равна нулю, три в ${}^{(3)}\mathcal{G}$).

Это смешивание в 3-геометрии одного многострелочного времени и двух динамических переменных делает нахождение подходящих начальных данных в общей теории относительности более трудным, чем в теории Максвелла. Для электродинамики было достаточно задать $\Sigma$ и $\mathscr{B}$ и $\dot{\mathscr{B}}$ на $\Sigma$. В геометродинамике задание шести $g_{ij}(x, y, z)$ и шести $\dot{g}_{ij}(x, y, z)$ не является с необходимостью достаточным. Например, пусть временной параметр $t$ — подделка,

**Проблема обеспечения полноты и совместности начальных данных**

такая, что $dt$, вместо того чтобы продвигать данную гиперповерхность $\Sigma$ вперед по времени к новой гиперповерхности $\Sigma + d\Sigma$, просто меняет координаты на рассматриваемой гиперповерхности

$$\begin{aligned} x^i &\to x^i - \xi^i\, dt, \\ g_{ij} &\to g_{ij} + (\xi_{i|j} + \xi_{j|i})\, dt. \end{aligned} \tag{21.130}$$

После первой проверки может показаться, что имеются адекватные данные в шести $g_{ij}$ и шести

$$\dot{g}_{ij} = \xi_{i|j} + \xi_{j|i}. \tag{21.131}$$

Однако в конце обнаруживается, что имеется не две поверхности тонкого сандвича, как требуется, а только одна. Поэтому любой набор шести $\dot{g}_{ij}$, которые выражаются в виде (21.131), следует отвергнуть в общей проблеме динамики как некорректные данные [153].

Аналогичные трудности возникают, если две поверхности тонкого сандвича вместо полного совпадения совпадают в ограниченной трехмерной, двумерной или даже одномерной области («пересечение одной более ранней поверхности с другой более поздней поверхностью»). В таком случае, чтобы отвергнуть шесть $g_{ij}$ как неподходящие начальные данные, достаточно получить (21.131) даже на кривой в $\Sigma$.

«Догадка тонкого сандвича»

Возможность наложения условий на $g_{ij}$ и $\dot{g}_{ij}$, гарантирующих существование и единственность решения $N(x, y, z)$, $N_i(x, y, z)$, у уравнений для начальных значений (21.126) и (21.127), известна как «догадка тонкого сандвича». Много исследователей вложило большой труд в эту тему, однако решающая теорема до сих пор отсутствует. Предположить существование и однозначность — значит сделать первый шаг к приданию математического содержания принципу Маха, который гласит, что инерция определяется распределением массы-энергии по пространству (§ 21.12).

## Дополнение 21.2. ПОДСЧЕТ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

### А. Первый подход: количество «координат поля» на точку пространства

Поверхностный подсчет степеней свободы электромагнитного поля без источников дает 3 координаты поля $A_i(x, y, z)$ на точку пространства, расположенную на начальной гиперповерхности одновременности $\Sigma$, и 3 импульса поля $\pi^i_{\text{истин}} = \pi^i/4\pi$ [где $\pi^i = -\mathscr{E}^i(x, y, z)$] на точку пространства.

Более глубокое рассмотрение показывает, что число координатных степеней свободы на точку пространства равно не 3, а 2. Так, изменение векторного потенциала $A_i \to A_i + \partial\lambda/\partial x^i$ не меняет имеющих действительный физический смысл

компонент магнитного поля

$$B^i = \frac{1}{2}[ijk]\,(\partial A_k/\partial x^j - \partial A_j/\partial x^k).$$

Кроме того, хотя число этих компонент равно 3, они удовлетворяют в каждой точке пространства условию $\mathscr{B}^i{}_{,i} = 0$. Поэтому эффективное число координатных степеней свободы на точку пространства равно 2.

В силу условия $\mathscr{E}^i{}_{,i} = 0$ число импульсных степеней свободы на точку пространства также сводится от 3 к 2.

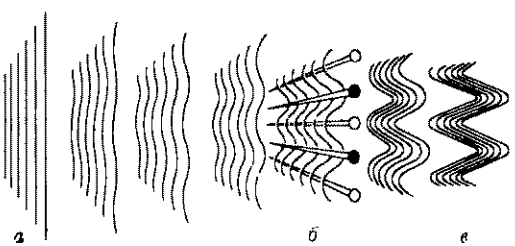
### Б. Альтернативной подход: подсчет коэффициентов Фурье

В учебниках по теории поля (см., например, [134]) сосредоточивают внимание на плоском пространстве-времени. Электромагнитное поле с помощью анализа Фурье разбивается на отдельные бегущие волны. Вместо подсчета степеней свободы на точку координатного пространства проводят эквивалентный подсчет степеней свободы на точку пространства волновых чисел. Так, для каждого волнового числа $k_x$, $k_y$, $k_z$ имеется 2 независимых состояния поляризации. Для описания каждого состояния поляризации требуется амплитуда («координата») и скорость изменения амплитуды со временем («импульс») в начальный момент времени $t_0'$. Поэтому имеются 2 координатные и 2 импульсные степени свободы на точку пространства волновых векторов в согласии с подсчетом, выполненным в координатном пространстве.

В искривленном пространстве-времени анализ Фурье является менее удобным способом отождествления степеней свободы электромагнитного поля, чем непосредственный анализ в пространстве (такой анализ Фурье см. в [102], особенно табл. X и последующий текст).

### В. Другой альтернативный подход: анализ «деформации структуры»

Третий способ подсчета степеней свободы электрического $\mathscr{E}$ или магнитного $\mathscr{B}$ полей, дивергенции которых равны нулю, основан на идее деформации структуры




(диаграмма из работы Уилера [154]). Представление магнитного поля в виде фарадеевой картины силовых линий (*а*), непрерывно заполняющих пространство и нигде не оканчивающихся, автоматически гарантирует, что $\mathscr{B}^i{}_{,i}$ везде равно нулю. Вставим в макароноподобную структуру силовых линий «вязальные спицы» (*б*) и будем

двигать их по своему желанию. Скольжение «вязальных спиц» вдоль силовой линии не вызовет движения силовой линии. С помощью двух вязальных спиц, перпендикулярных друг другу и силовой линии, можно придать любой данной силовой линии любое малое смещение, перпендикулярное ее длине ($в$), т. е. вновь получаем 2 степени свободы на точку пространства. Начав с любого сколь угодно слабого ненулевого поля, можно с помощью последовательности таких малых деформаций построить любую произвольную картину поля, дивергенция которого равна нулю, независимо от величины поля и угла дуального поворота.

## § 21.10. ПРОБЛЕМЫ СИММЕТРИЧНЫХ И АНТИСИММЕТРИЧНЫХ ПО ВРЕМЕНИ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Перейдем от общей проблемы начальных значений к двум специальным случаям, допускающим детальное рассмотрение, к проблемам симметричных и антисимметричных по времени начальных значений.

Говорят, что 4-геометрия симметрична по времени, если существует пространственноподобная гиперповерхность $\Sigma$, во всех точках которой внешняя кривизна равна нулю. В этом случае три уравнения для начальных значений (21.127) удовлетворяются автоматически, а четвертое сводится к простому условию, наложенному на скалярный инвариант трехмерной кривизны:

$$R = 16\pi\rho. \tag{21.132}$$

Дальнейшие упрощения возникают при переходе к случаю пустого пространства. Простейшим является сферически симметричный случай, в котором (21.132) немедленно дает всю геометрию Шварцшильда в момент симметрии по времени (2 асимптотически плоских пространства, связанных горловиной), как это выведено в упражнении 21.20.

Рассмотрим 3-геометрию с метрикой

$$ds_1^2 = g_{(1)\,ik}dx^i dx^k. \tag{21.133}$$

Назовем ее «базисной метрикой». Рассмотрим другую 3-геометрию с метрикой

$$ds_2^2 = \psi^4(x^i)\,ds_1^2. \tag{21.134}$$

Углы в двух геометриях идентичны. На этом основании говорят, что они конформно эквивалентны. Скалярные инварианты кривизны двух 3-геометрий связаны формулой [11]

$$R_2 = -8\psi^{-5}\nabla_1^2\psi + \psi^{-4}R_1, \tag{21.135}$$

где

$$\nabla_1^2\psi = \psi_{|\,i}{}^{|\,i} = g_1^{-1/2}(\partial/\partial x^i)\,[g_1^{1/2}g^{ik}(\partial\psi/\partial x^k)]. \tag{21.136}$$

Требуя, чтобы скалярный инвариант кривизны $R_2$ был равен нулю, приходим, следуя Бриллю [155], к «волновому уравнению»

для поправочного конформного множителя $\psi$

$$\nabla_1^2 \psi - (R_1/8)\,\psi = 0. \tag{21.137}$$

Брилль выбирает базисную метрику в виде, предложенном Бонди:

$$ds_1^2 = e^{2Aq_1(\rho,z)}\,(dz^2 + d\rho^2) + \rho^2 d\phi^2, \tag{21.138}$$

и считает, что поправочный конформный множитель $\psi$ обладает аксиальной симметрией. В приложении к гравитационным волнам имеет

$q_1(\rho, z)$ измеряет «распределение амплитуды гравитационной волны», предполагаемой для простоты равной нулю вне $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2} = a$;

$A$ измеряет «амплитуду распределения амплитуды гравитационной волны»;

$\psi(\rho, z)$ есть поправочный конформный множитель, который на больших расстояниях изменяется как $1 + (m/2r)$. Величина $m$ (см) измеряет массу-энергию распределения гравитационного излучения и однозначно определяется условием, согласно которому геометрия должна быть асимптотически плоской.

Амплитуда волны определяет массу-энергию: $m = m(A)$

Масса $m$ гравитационного излучения пропорциональна $A^2$ для малых значений амплитуды $A$. Она обратно пропорциональна приведенной длине волны $\lambda =$ (эффективная длина волны/$2\pi$), которая измеряет масштаб быстрых вариаций амплитуды гравитационной волны $q_1(\rho, z)$ в «активной зоне». Поэтому в активной зоне в метрике доминируют колебания, пропорциональные по амплитуде $A$, на больших расстояниях в метрике преобладает нечто близкое к шварцшильдовскому множителю $(1 + 2m/r)$. При увеличении амплитуды $A$ достигается критическое значение $A = A_{\text{крит}}$, при котором $m$ стремится к бесконечности, а геометрия становится замкнутой («Вселенная, замкнутая собственным содержанием гравитационно-волновой энергии»). Дальнейший анализ и примеры можно найти в работе [36], стр. 399—451, а также в [154].

«Антисимметричные по времени» начальные данные

Брилль провел аналогичный анализ [157] антисимметричных по времени начальных условий для вакуумного случая, изложенный ниже в улучшенном Йорком виде [1]).

1. Начальное сечение максимально

$$\mathrm{Sp}\ \mathbf{K} = 0.$$

2. Это сечение конформно плоско

$$g_{ij} = \psi^4 \delta_{ij}. \tag{21.139}$$

3. Работа проводится в «базисном пространстве» с метрикой $\delta_{ij}$, и после этого совершается переход к геометрии (21.139). Три уравнения для начальных значений принимают вид

$$K^{ij}_{\text{базисн},j} = 0. \tag{21.140}$$

[1]) *York J. W., Jr.*, частное сообщение, 1973 г.

Чтобы решить эти уравнения, 1) возьмем любой локализованный симметричный тензор $B_{km}$, след которого равен нулю; 2) решим в плоском пространстве уравнение Лапласа для $A$

$$\nabla^2 A = (3/2)\, \partial^2 B_{km}/\partial x^k \partial x^m;$$

3) определим 6 потенциалов

$$A_{km} = B_{km} + \left(\frac{1}{3}\right) A\delta_{km};$$

4) вычислим величину

$$K^{ij}_{\text{базисн}} = [ik\ell]\,[jmn]\,\partial^2 A_{km}/\partial x^\ell\, \partial x^n, \tag{21.141}$$

автоматически удовлетворяющую уравнению (21.140) и дающую $\mathrm{Sp}\, \mathbf{K}_{\text{базисн}} = 0$. В таком случае $K^{ij} = \psi^{-10} K^{ij}_{\text{базисн}}$ *также* автоматически удовлетворяет этим условиям, но в *искривленной* геометрии (21.139). Окончательное уравнение для начальных значений становится квазилинейным эллиптическим уравнением для конформного множителя $\psi$ в плоском пространстве

$$8\nabla^2_{\text{базисн}}\psi + \psi^{-7} \sum_{i,j} (K_{\text{базисн}, ij})^2 = 0. \tag{21.142}$$

Асимптотический вид $\psi$ показывает, что масса волны положительна.

Кроме симметричного и антисимметричного по времени случаев имеется по крайней мере еще два случая, когда проблема начальных значений обладает особой простотой.

**Конечномерная динамика для геометрии с высокой симметрией**

В одном из них геометрия имеет симметрию, например фридмановской Вселенной (гл. 27), или перемешанного мира (гл. 30), или цилиндрических гравитационных волн в трактовке Кухаржа [111]. Старт берется на пространственноподобном сечении, на котором $g_{ij}$ и $\pi^{ij}$ обладают специальной симметрией, а последующие пространственноподобные сечения выбираются так, чтобы сохранить эту симметрию. Хотя геометрия на любой из этих гиперповерхностей одновременности почти полностью определяется из соображений симметрии, обычно для полного определения требуется некоторое количество параметров, таких, например, как радиус фридмановской Вселенной или три главных радиуса кривизны в перемешанном мире. Эти параметры и сопряженные им импульсы определяют минифазовое пространство, в котором протекает динамика так же, как и в классическом случае (см., например, дополнение 30.1 и работы [158] о перемешанном мире, [111, 112] о волнах, обладающих цилиндрической симметрией, [159] о волнах со сферической симметрией). Даже доказательство существования многострелочного времени, наиболее характерного свойства общей теории относительности, опущено как плата за полное невнимание к любому пространственноподобному сечению, которое отклоняется от заданной симметрии.

УПРАЖНЕНИЯ

**21.16. Незатейливый человеческий способ создания космологии**

Рассмотрите пространство-время с метрикой

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)],$$

соответствующей 3-геометрии в форме сферы радиуса $a(t)$, изменяющегося со временем. Покажите, что тензор внешней кривизны, будучи выраженным в локально евклидовой системе отсчета, равен

$$\mathbf{K} = -a^{-1}(da/dt)\,\mathbf{1},$$

где $\mathbf{1}$ — единичный тензор. Покажите, что уравнение для начальных значений (21.77) сводится к виду

$$(6/a^2)(da/dt)^2 + (6/a^2) = 16\pi\rho(a)$$

[о значении второго члена в левой части см. упражнение 14.3 и дополнения 14.2 и 14.5], и объясните, почему для «пылевидной модели Вселенной» член в правой части можно записать как $6a_0/a^3$. В более общей форме, задавшись любым уравнением состояния $p = p(\rho)$, объясните, как можно найти $\rho = \rho(a)$ из

$$d(\rho a^3) = -p\,d(a^3)$$

и как в таком случае можно предсказать историю расширения и повторного сжатия, $a = a(t)$.

**21.17. Вариационный принцип тонкого сандвича для скалярного электродинамического потенциала**

а. Выберите неизвестную функцию $U^m$ в выражении

$$\frac{1}{8\pi}g^{mn}\frac{\partial\phi}{\partial x^m}\frac{\partial\phi}{\partial x^n} + U^m\frac{\partial\phi}{\partial x^m}$$

таким образом, чтобы это выражение, умноженное на элемент объема $g^{1/2}d^3x$ и проинтегрированное по гиперповерхности одновременности $\Sigma$, экстремизовалось бы $\phi$ и только таким $\phi$, которое удовлетворяет уравнению для начальных значений электродинамики (21.108).

б. Покажите, что получающийся вариационный принцип не «взят с потолка», а следует непосредственно из принципа действия, сформулированного с помощью лагранжевой плотности электродинамики (21.100) (независимое варьирование $\phi$ и трех $A_i$ повсюду между двумя поверхностями сандвича, необходимое для экстремизации $I$, подчинено лишь априорной спецификации $A_i$ на двух поверхностях сандвича в пределе, когда толщина сандвича стремится к нулю).

УПРАЖНЕНИЯ

### 21.18. Вариационный принцип тонкого сандвича для функций хода и сдвига в геометродинамике

а. Экстремизуйте интеграл действия

$$I_3 = \int \{[R - (\mathrm{Sp}\,\mathbf{K})^2 + \mathrm{Sp}\,\mathbf{K}^2 - 2T^*_{nn}][N - 2T^{*k}_{n} N_k\}\, g^{1/2} d^3x$$

относительно функций хода и сдвига и покажите, что таким путем приходят к уравнениям для начальных значений геометродинамики. Подразумевается, что на гиперповерхности одновременности, на которой проводится анализ, заданы шесть $g_{ij}$ и шесть $\partial g_{ij}/\partial t$. Внешняя кривизна считается, как в (21.67), выраженной через эти величины и функции хода и сдвига. Как и раньше, в этой главе плотность энергии и поток энергии отнесены к единичному нормальному вектору $\mathbf{n}$ и трем произвольным координатным базисным векторам $\mathbf{e}_i$ на гиперповерхности одновременности, а звездочка означает, что опущен множитель $8\pi$.

б. Выведите вариационный принцип из вариационного принципа АДМ, переходя к пределу бесконечно тонкого сандвича (см. вывод в [36]).

### 21.19. Укороченный вариационный принцип тонкого сандвича

а. Экстремизуйте действие $I_3$ из предыдущего упражнения относительно функции хода $N$.

б. Какова связь между результатом и принципом, что «3-геометрия — носитель информации о времени»?

в. Исключив $N$, получите «укороченный вариационный принцип тонкого сандвича», в котором единственными варьируемыми величинами являются 3 функции сдвига $N_i$.

### 21.20. Незатейливый человеческий путь к геометрии Шварцшильда

На детерминистически эволюционирующее со временем искривленное пустое пространство наложите условия: 1) оно обладает моментом симметрии по времени, пространственноподобной гиперповерхностью, внешняя кривизна которой относительно окружающего пространства-времени везде равна нулю, и 2) эта пространственноподобная гиперповерхность обладает сферической симметрией. Запишите метрику 3-геометрии в виде

$$ds^2 = \psi^4(\bar{r})\,(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2\, d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2\theta\, d\phi^2).$$

Покажите из уравнения для начальных значений (21.127), что конформный множитель $\psi$ вплоть до мультипликативного множителя имеет вид $\psi = (1 + m/2\bar{r})$. Покажите, что собственная длина окружности $2\pi\bar{r}\psi^2(\bar{r})$ при определенном значении $\bar{r}$ принимает минимальное значение, определяя таким образом *горло* 3-геомет-

**2**

**УПРАЖНЕНИЯ**

рии. Покажите, что 3-геометрия зеркально симметрична относительно отражения в этом горле в том смысле, что метрика не изменяет свой вид при подстановке $\bar{r}' = m^2/4\bar{r}$. Найдите закон перехода от конформной координаты $\bar{r}$ к шварцшильдовской координате $r$.

## § 21.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4-ГЕОМЕТРИИ ПО МЕТОДУ ЙОРКА

**Вкратце о степенях свободы геометрии**

Чтобы 1) иметь не конкретизованный, но полный набор начальных данных и, таким образом, 2) определить типичное для данного класса полное четырехмерное пространственно-временное многообразие, задайте на какой-либо или на определенной гиперповерхности одновременности экстремального собственного объема конформную часть 3-геометрии и две независимые компоненты динамически сопряженного импульса. Таково вкратце обобщение Йорка [145, 160] результатов Брилля, полученных для специальных случаев (см. предыдущий параграф). Йорк и Брилль подтверждают более ранние рассмотрения Лихнеровича [161] и Брухата (см. [162] и цитируемые там более ранние работы по конформной геометрии и проблеме начальных данных). Но почему рассматривается именно конформная геометрия и выбирается такая особая пространственноподобная гиперповерхность, на которой надо задать четыре динамических данных на точку пространства?

Мало решений уравнений Максвелла выглядит проще, чем бесконечная плоская монохроматическая волна в плоском пространстве-времени Минковского, и почти нет решений сложнее тех, которые анализируются на пространственноподобном сечении, проведенном произвольным образом в пространстве-времени и имеющем локальные колебания и волны, крупномасштабные выступы и выгибы и общие крупномасштабные кривизны. Каждый, кто хочет исследовать эволюцию электродинамики с многострелочным временем, не избежит этих усложнений, и никто не станет принимать усложнений, связанных с многострелочным временем, если он хочет видеть степени свободы электромагнитного поля в наиболее отчетливой форме. Он выберет простейшее из возможных времениподобных сечений. На этой гиперповерхности одновременности имеется 2 и только 2 координаты поля, 2 и только 2 импульса на точку пространства. Аналогично обстоит дело и в геометродинамике.

Если (в отличие от подхода, при котором анализируется динамика геометрии) хотят «распутать» степени свободы геометрии, то отказываются от задания трех информационных позиций на точку пространства, содержащихся в 3-геометрии (или в любом другом способе анализа геометродинамики, как это особенно видно в формулировке «внешнего времени» [112, 144]), и, следуя

Выбор гиперповерхности максимального собственного объема

Йорку, 1) выбирают гиперповерхность одновременности максимального собственного объема и 2) на этой гиперповерхности одновременности задают 2 «координатные степени свободы на точку пространства», содержащиеся в конформной части 3-геометрии.

В следующий единичный интервал собственного времени, измеренного нормально к гиперповерхности, элемент собственного объема $g^{1/2}d^3x$ на пространственноподобной гиперповерхности $\Sigma$ испытывает относительное увеличение [см. фиг. 21.3 и уравнения (21.59) и (21.66)]

$$-\operatorname{Sp} \mathbf{K} = -\frac{1}{2} g^{-1/2} \operatorname{Sp} \pi. \tag{21.143}$$

Чтобы объем был экстремальным, данная величина должна равняться нулю в каждой точке гиперповерхности $\Sigma$. Это условие выполнено во фридмановской Вселенной (гл. 27) и во Вселенной Тауба (гл. 30) при том значении естественной координаты времени $t$, при котором во Вселенной происходит переход от расширения к сжатию. Замечательно, что то же самое условие относительно выбора гиперповерхности одновременности $\Sigma$ можно естественно сформулировать для замкнутой Вселенной, лишенной в целом какой бы то ни было симметрии:

$$\operatorname{Sp} \mathbf{K} = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{Sp} \pi = 0. \tag{21.144}$$

Случай открытой 3-геометрии

Альтернативно можно рассмотреть пространство-время, которое топологически представляет собой произведение открытого 3-пространства на действительную линию (время). Естественно предположить, что в нем локализована ограниченная пространственноподобная 2-геометрия $S$ с топологией 2-сферы. Имеется тогда много способов заполнения внутренней по отношению к $S$ области пространственноподобной 3-геометрии $\Sigma$, но из всех этих 3-геометрий $\Sigma$ только одна является экстремальной или только та, которая экстремальна, удовлетворяет условию (21.144).

Выбор этой 2-геометрии с топологией 2-сферы — немаловажное дело. Определенный выбор ограниченной 2-геометрии в данной 4-геометрии обычно дает определенные результаты для экстремизации 3-геометрии, а потому определеный выбор «начальной гиперповерхности одновременности» $\Sigma$. Сразу не возникает никакого соображения, в силу которого следовало бы отдать предпочтение какому-нибудь одному выбору 2-геометрии. Однако если ограничиться рассмотрением замкнутой 3-геометрии, то такой безграничной свободы выбора не будет. Следовательно, анализ, проводимый по отношению к закрытой Вселенной, конкретизуется, т. е. его с уверенностью можно сделать полностью определенным в открытой области путем подходящего задания граничных значений на замкнутой 2-геометрии, ограниченной открытой областью. Вкратце ограничение замкнутой 3-геометрией означает, что вместо неочевидных граничных условий задается очевидное условие замкнутости.

Анализ Йорка остается простым, если его внешнее время

$$\tau = \frac{2}{3}\, g^{-1/2}\, \mathrm{Sp}\, \pi = \frac{4}{3}\, \mathrm{Sp}\, \mathbf{K}$$

имеет любое постоянное значение на гиперповерхности, а не только значение $\tau = 0$, соответствующее гиперповерхности максимального собственного объема.

Значение конформной 3-геометрии

Начнем с задания конформной 3-геометрии на гиперповерхности одновременности $\Sigma$, определяемой условием постоянства внешнего времени $\tau = \mathrm{const}$:

$$<=^{(3)}<= \left| \begin{array}{l} \text{класс эквивалентности всех положительно определенных римановых трехмерных метрик, которые эквивалентны друг другу 1) при диффеоморфизме (гладкий сдвиг точек к новым положениям в многообразии) или 2) при изменениях масштаба, которые происходят плавно от точки к точке, оставляя неизменными все локальные углы (отношения локальных расстояний), но меняя сами локальные расстояния, или 3) при одновременном выполнении преобразований 1) и 2)} \end{array} \right| . \quad (21.145)$$

Конформная 3-геометрия является геометрическим объектом, который можно определить и интерпретировать без конкретного выбора системы координат и даже вообще без использования каких-либо координат. Конформная 3-геометрия (*на гиперповерхности* $\Sigma$, *где* $\tau = \mathrm{const}$) может рассматриваться почти так же, как рассматривается магнитное поле в электромагнетизме. Случай конформно плоской 3-геометрии

$$ds^2 = \psi^4\,(x,\ y,\ z)\, ds^2_{\text{базисн}} \quad (21.146)$$

(с $g_{ij\,\text{базисн}} = \delta_{ij}$) аналогичен в электромагнетизме таким ситуациям с начальными значениями, когда магнитное поле везде равно нулю (антисимметричная по времени проблема начальных значений Брилля); сейчас же мы рассматриваем общий случай $ds^2_{\text{базисн}}$.

Шесть метрических коэффициентов $g_{ij}$ конформной 3-геометрии, определенные с точностью до преобразований трех координат $x^i$ и зависящего от положения общего множителя, несут $6-3-1 = 2$ блока информации на точку пространства. В этом отношении они подобны компонентам магнитного поля $\mathscr{B}$, дивергенция которого равна нулю. Соответствующий импульс поля $\pi^i_{EM} \sim \mathscr{E}^i$ (дополнение 21.1, стр. 142) имеет дивергенцию, определяемую плотностью заряда, и, таким образом, также несет

два блока информации (вдобавок к заданной информации о плотности заряда) на точку пространства. (21.147)

В сравнении компонент $\mathscr{R}$ и метрических коэффициентов есть некоторый недостаток. Последние больше похожи на потенциалы, чем на компоненты физически уместного поля.

Подходящей мерой «поля» в геометродинамике является тензор кривизны, но как можно определить тензор кривизны для такой рудиментарной геометрии, как конформная 3-геометрия? Йорк [160] поднял этот вопрос и дал на него ответ. Тензор конформной кривизны Вейля [уравнение (13.50) и упражнение 13.13] тождественно равен нулю в трехмерном пространстве (упражнение 21.21), а в пространствах более высокой размерности не зависит ( в собственном $\binom{2}{2}$-представлении ) от множителя $\psi^4$, который является функцией положения и на который умножаются метрические коэффициенты.

Тензор кривизны Йорка

Ненулевую конформно инвариантную меру кривизны можно получить только в том случае, если взять производные высшего порядка (упражнение 21.22). Таким путем приходят к *кривизне Йорка* $\tilde{\beta}^{ab}$, обозначенной здесь $Y^{ab}$, т. е. к тензорной плотности со следующими свойствами:

$$
\begin{aligned}
Y^{ab} &= Y^{ba} \quad \text{(симметрична);} \\
Y^{a}_{a} &= 0 \quad \text{(след равен нулю);} \\
Y^{ab}{}_{|b} &= 0 \quad \text{(поперечна);} \\
Y^{ab} &\quad \text{инвариантна относительно зависящих от положения изменений конформного масштабного множителя;} \\
Y^{ab} &= 0 \text{ тогда и только тогда, когда 3-геометрия является конформно плоской.}
\end{aligned}
\tag{21.148}
$$

По выражению Йорка тензорная плотность $Y^{ab}$ дает чистое представление спина-два 3-геометрии, внутренней по отношению к гиперповерхности $\Sigma$. Тензорная плотность представляет собой аналог поля $\mathscr{R}$ электродинамики на пространственноподобной начальной гиперповерхности одновременности и непосредственно несет физическую информацию о конформной 3-геометрии.

Кроме конформной геометрии ${}^{(3)}<$, определяемой «потенциалами» $g_{ij}/g^{1/3}$ и измеряемой «компонентами поля» $Y^{ij}$, необходимо также задать на гиперповерхности $\Sigma$ соответствующие сопряженные импульсы:

Соответствующие импульсы

$$
\begin{aligned}
\tilde{\pi}^{ab} &= \tilde{\pi}^{ba} \quad \text{(симметричны);} \\
\tilde{\pi}^{a}_{a} &= 0 \quad \text{(след равен нулю);} \\
\tilde{\pi}^{ab}_{\ |b} &= 0 \quad \text{(поперечны) в случае, если в пространстве отсутствует поток энергии; иначе} \\
\tilde{\pi}^{ab}_{\ |b} &= 8\pi \quad \text{(плотность потока энергии)}^{a};
\end{aligned}
\tag{21.149}
$$

два блока информации (в добавок к заданной информации о потоке энергии) на точку пространства.

Может показаться, что важно указать, по отношению к какой из 3-геометрий, отличающихся друг от друга величиной конформного множителя, вычисляются в (21.148) и (21.149) ковариантные производные тензорных плотностей веса 5/3 (см. § 21.2). Однако Йорк показал, что условия (21.149) никак не зависят от величины конформного множителя $\psi^4$.

Выражения (21.149), для которых Йорк определяет «плотность импульса веса 5/3»,

$$\tilde{\pi}^{ab} = g^{1/3}\left(\pi^{ab} - \frac{1}{3} g^{ab} \operatorname{Sp} \pi\right), \tag{21.150}$$

линейны, а потому их можно проанализировать стандартными методами. Большую помощь в этом деле также оказал Йорк [163]: он дал «конформно ортогональное разложение симметричных тензоров на римановых многообразиях», которое позволяет получить решения, удовлетворяющие предъявленным требованиям (импульсы «поперечны», «след равен нулю», «конформно киллинговские», «след не равен нулю», измеряют соответственно деформацию конформной части геометрии, простое изменение системы координат и изменение масштаба). Дальнейшая помощь, как отмечает Йорк [1]), проистекает от того факта, что импульсы $\tilde{\pi}^{ab}$ одинаковы для всего конформного класса эквивалентности метрик, т. е. для данного

$$\tilde{g}_{ab} = g^{-1/3} g_{ab}, \tag{21.151}$$

независимо от того, каковы сами $g_{ab}$ и $\psi$.

После того как конформная 3-геометрия и «плотность импульса веса 5/3» выбраны, оставшееся уравнение для начальных значений (21.116) принимает вид «масштабного» уравнения

$$8\nabla^2\psi - {}^{(3)}R\psi + M\psi^{-7} + Q\psi^{-3} - \frac{3}{8}\tau^2\psi^5 = 0 \tag{21.152}$$

и позволяет определить конформный множитель $\psi$. Здесь $\nabla^2$ обозначает лапласиан

**Однозначное решение для конформного множителя**

$$\nabla^2\psi \equiv g^{-1/2}\,(\partial/\partial x^a)\, g^{1/2} g^{ab}\, (\partial\psi/\partial x^b). \tag{21.153}$$

Подобно ${}^{(3)}R$, $M$ и $Q$, он относится к базисному пространству. Интересно, что

$$\nabla^2 - \frac{1}{8}\,{}^{(3)}R$$

является конформно инвариантным волновым оператором, тогда как сам $\nabla^2$ не конформно инвариантен. В анализе Йорка $M$ и $Q$ — сокращенные обозначения:

$$M \equiv g^{-5/3} g_{ac} g_{bd} \tilde{\pi}^{ab} \tilde{\pi}^{cd}, \tag{21.154а}$$

$$Q \equiv 16\pi\rho_{\text{базисн}}\,(= 16\pi\psi^8\rho = 16\pi\psi^8\rho_{\substack{\text{в конечной}\\ \text{3-геометрии}}}). \tag{21.154б}$$

---

[1]) *York J. W., Jr.*, частное сообщение, 1973 г.

Далее ищется решение $\psi$, непрерывное на замкнутом многообразии, везде действительное и положительное. Когда существует такое решение $\psi$ эллиптического уравнения (21.152)? И когда оно единственно? *Всегда* (если $M > 0$ и $\tau \neq 0$) — результат О'Мурчадха и Йорка [1]); см., кроме того, более ранние исследования [165]. Некоторые физические соображения, связанные с проблемой такого же рода, обсуждались Уилером [36], стр. 370—381.

## § 21.12. ПРИНЦИП МАХА И ПРОИСХОЖДЕНИЕ ИНЕРЦИИ [2]

*По моему мнению, общая теория относительности может решить эту проблему (инерции) удовлетворительно, только если мир в ней считается пространственно самозамкнутым.*

АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН, 1934 г.[3])

Эйнштейн 25 июня 1913 г., за два года до открытия геометродинамического закона, носящего его имя, написал Эрнсту Маху письмо (оно воспроизведено ниже, фиг. 21.5), выразив свою признательность за вдохновение, которое он почерпнул для своих попыток из идей Маха. В своей замечательной книге «Механика» Мах [166] (гл. 2, раздел 6) убеждал, что бессмысленно говорить об ускорении массы относительно абсолютного пространства. Для устранения из физики мистических идей было бы лучше, рассуждал он, говорить об ускорении относительно удаленных звезд. Однако как может звезда, находящаяся на расстоянии $10^9$ световых лет, вносить вклад в инерцию здесь и сейчас? Не останавливаясь на долгой истории, можно сразу сказать, что теория Эйнштейна

1) отождествляет тяготение с механизмом, посредством которого материя там влияет на инерцию здесь,

2) утверждает, что эта связь имеет место на пространственноподобной гиперповерхности (на которой, как можно было бы ошибочно подумать без глубокого рассмотрения, нарушается принцип причинности; см. работу Ферми [167], где обсуждается и объясняется аналогичный кажущийся парадокс в электродинамике, см. также работу Эйнштейна [44], стр. 84: «Более того, я полагал, что я смогу с помощью общих рассуждений показать, что закон тяготения, инвариантный относительно любых преобразований координат, несовместим с принципом причинности. Эти ошибки мышления стоили мне двух лет исключительно тяжелой работы, пока я окончательно не признал их в конце 1915 г.»);

Лишь видимость нарушения причинности

3) обеспечивает в уравнениях для начальных значений геометродинамики математическое средство для описания этой связи;

[1]) *O'Murchadha N., York J. W., Jr.*, частное сообщение, 1973 г. См. также работу [164].

[2]) См. примечание в конце этого параграфа.— *Прим. ред.*

[3]) Из работы [44].

4) требует замкнутости геометрии в пространстве (замкнутость предугадывается, см. работы [154, 168] и [169]) в качестве граничного условия для уравнений на начальные значения, если они должны давать полностью определенную (и, как мы знаем, однозначную) 4-геометрию;

5) отождествляет собрание локально лоренцевых систем отсчета вблизи любой точки получающегося пространства-времени с тем, что подразумевают количественно, когда говорят об инерции в данной точке. Так, инерция здесь определяется плотностью и потоком массы-энергии там.

Огромное количество работ

Имеется большое количество работ, посвященных принципу Маха. В некоторых работах концепции Маха подвергаются критике, например в работе, написанной В. И. Лениным [170] (английский перевод, 1927 г.) [1]; многие из них ставят интересные вопросы (см. особенно очаровательный диалог Вейля [171] об «инерции и космосе», статью [172] и книгу Шамы [173]). Однако большинство работ написано до того, как была понята проблема начальных значений, которой мы владеем сегодня. Поэтому мы не пытались просуммировать или проанализировать литературу — для этого требуется отдельная книга. Кроме того, представленный здесь принцип Маха сформулирован более отчетливо, чем в статьях Эйнштейна (исключая его соображения, доказывающие необходимость замкнутости Вселенной, см. книгу Эйнштейна [10], стр. 107, 108), и, конечно, Мах не признал бы его, поскольку он не смог подняться до принятия общей (или даже специальной) теории относительности. Тем не менее принцип Маха (материя там определяет инерцию здесь) и идея Римана (геометрия пространства реагирует на физику и участвует в физике) — две великие мысли, которые Эйнштейн посредством своего мощного принципа эквивалентности объединил в современном геометрическом описании тяготения и движения.

Расшифровка и модернизация принципа Маха

«Задайте повсюду распределение и поток массы-энергии и тем самым определите повсюду и во все времена инертные свойства каждой пробной частицы». Расшифруем это предписание:

1. Чтобы говорить о «повсюду», необходима пространственноподобная гиперповерхность $\Sigma$.

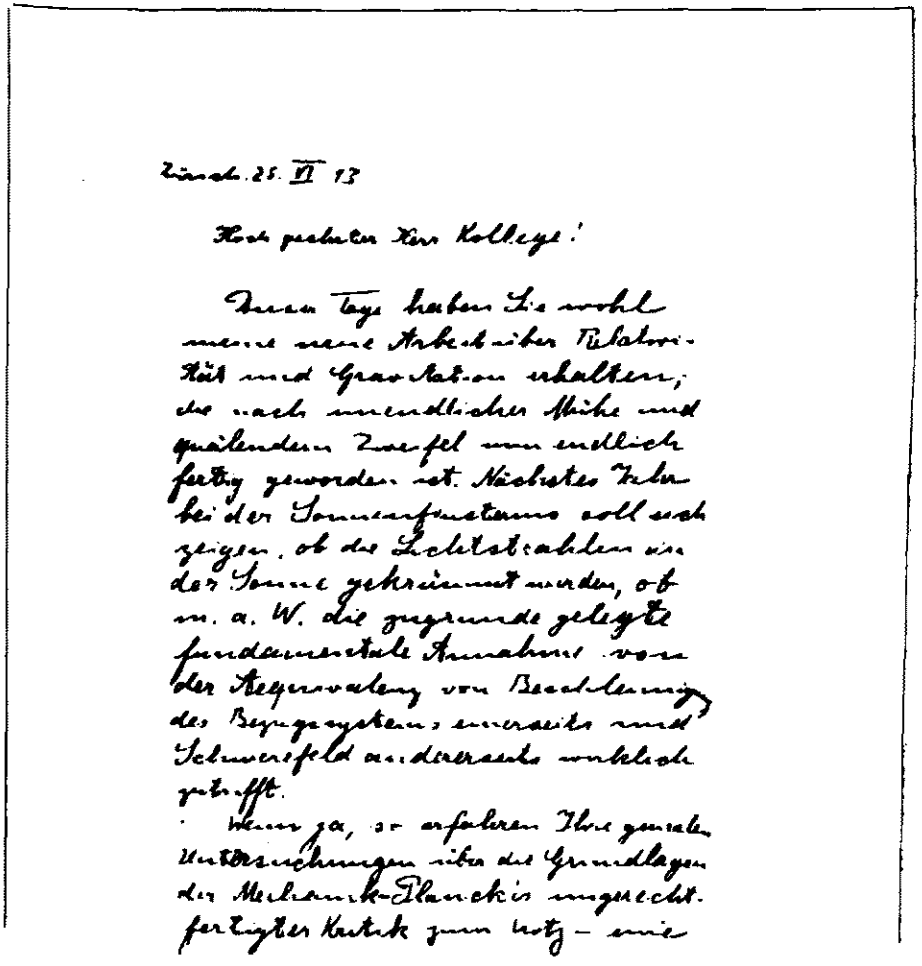
2. В соответствии с Эйнштейном будем настаивать на том, что эта поверхность должна быть замкнутой 3-геометрией.

3. Для удобства, а не из необходимости, будем считать, что $\tau$ не зависит от положения на $\Sigma$.

4. Задайте эту 3-геометрию вплоть до задания конформной метрики; без задания по крайней мере этой почти 3-геометрии нет очевидного способа сказать, «где» должна быть локализована масса-энергия.

[1] В. И. Ленин в своем знаменитом произведении «Материализм и эмпириокритицизм» (1909 г.) подверг глубокой критике идеалистическую философию эмпириокритицизма (махизма) и материалистически обобщил новые достижения науки.— *Прим. ред.*

ФИГ. 21.5.
Письмо, в котором Эйнштейн дал высокую оценку Эрнсту Маху, было написано 25 июня 1913 г., в период, когда Эйнштейн усиленно работал, подходя к окончательной формулировке (ноябрь 1915 г.) классической общей теории относительности. О подтверждении теории в связи с приближавшимся затмением он писал: «Если это так, тогда Ваши счастливые исследования по основам Механики, вопреки неоправданной критике Планка, получат блестящее подтверждение. Тогда с необходимостью окажется, что инерция возникает в результате взаимодействия между телами, т. е. совсем в духе Вашего рассмотрения ньютоновского эксперимента с ведром. Первое следствие изложено на стр. 6 моей статьи. Выявляются также следующие дополнительные моменты:
1) если ускоряется тяжелая оболочка вещества $S$, то на массу, заключенную в этой оболочке, действует ускоряющая сила;
2) если оболочка вращается относительно неподвижных звезд вокруг оси, проходящей через центр оболочки, то внутри оболочки появляется кориолисова сила, т. е. плоскость качаний маятника Фуко будет поворачиваться (с практически неизмеримо малой угловой скоростью)». После смерти Маха Эйнштейн [174] отдал дань уважения этому человеку и его работе. Помещенное ниже письмо воспроизводится с разрешения душеприказчиков имущества Альберта Эйнштейна Хелен Дукас и Отто Натана.



Zürich. 25. VI 13

Hochgeehrter Herr Kollege!

Dieser Tage haben Sie wohl meine neue Arbeit über Relativität und Gravitation erhalten, die nach unendlicher Mühe und quälendem Zweifel nun endlich fertig geworden ist. Nächstes Jahr bei der Sonnenfinsternis soll sich zeigen, ob die Lichtstrahlen von der Sonne gekrümmt werden, ob m. a. W. die zugrunde gelegte fundamentale Annahme von der Aequivalenz von Beschleunigung des Bezugsystems einerseits und Schwerefeld andererseits zutreffend ist.

Wenn ja, so erfahren Ihre genialen Untersuchungen über die Grundlagen der Mechanik-Planck'is ungerechtfertigter Kritik zum Trotz – eine

**2**

glänzende Bestätigung. Denn es ergibt sich mit Notwendigkeit, dass die Trägheit in einer Art Wechselwirkung der Körper ihren Ursprung habe, ganz im Sinne Ihrer Überlegungen zum Newton'schen Eimer-Versuch.

Eine erste Konsequenz in diesem Sinne finden Sie oben auf Seite 6 der Arbeit. Es hat sich ferner folgendes ergeben.

1) Beschleunigt man eine träge Kugelschale S, so erfährt nach der Theorie ein von ihr eingeschlossener Körper eine beschleunigende Kraft.

2) Rotiert die Schale S um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse (relativ zum System der Fixsterne („Restsystem"), so entsteht im Innern der Schale ein Coriolis-Feld, d. h. die Ebene des Foucault-Pendels wird (mit freilich allerdings unmessbar kleiner Geschwindigkeit) mitgenommen.

Es ist mir eine grosse Freude, Ihnen dies mitteilen zu können, zumal jene Kritik Plancks mir schon immer höchst ungerechtfertigt erschienen war.

Mit grösster Hochachtung grüsst Sie herzlich

Ihr ergebener A. Einstein

Ich danke Ihnen herzlich für die Übersendung Ihres Buches

5. Задайте плотность $\rho_{\text{базиса}}$ как функцию положения в этой конформной 3-геометрии.

6. Признайте, что задание массы-энергии только негравитационных полей недостаточно для определения распределения массы-энергии по пространству. Формально несомненно, что гравитационные поля не вносят и не могут вносить какой-либо вклад в источник, стоящий в правой части уравнения поля Эйнштейна. Однако анализ гравитационных волн (гл. 18 и 35) показывает, что возмущения геометрии с масштабом, малым по сравнению с масштабом наблюдений, можно рассматривать как носители эффективного содержания массы-энергии. Кроме того, известен ([175, 176]; дополнительно о гравитационно-волновой энергии см. § 35.14) объект — геон, построенный из гравитационных волн (или электромагнитных волн, или нейтрино, или любой комбинации гравитационных волн, электромагнитных волн и нейтрино), которые удерживаются вместе в течение времени, превышающего характерный период колебаний волн. Издали он выглядит подобно любой другой массе, хотя внутри него нет такого места, куда можно было бы приложить палец и сказать «здесь есть масса». Следовательно, геон, как и любая другая масса, должен «влиять на инерцию». Но, чтобы определить эту массу, необходимо задать достаточно информации для полной характеристики гравитационных волн на гиперповерхности одновременности $\Sigma$. По этой причине недостаточно просто задать две «волновые координаты» на точку пространства, которыми она обладает в конформной геометрии ${}^{(3)}\!<$.

7. Необходимо задать еще два «волновых импульса» на точку пространства, которые появляются у Йорка в выражении для $\tilde{\pi}^{ab}$ — «плотности импульса веса 5/3».

8. В то же время как неотделимую часть операции 7 необходимо определить плотность потока энергии поля.

9. Найти конформный множитель $\psi$.

10. В результате имеется полный набор начальных данных, которые удовлетворяют уравнениям для начальных данных общей теории относительности.

11. Поскольку эти данные теперь известны, оставшиеся динамические компоненты уравнения поля определяют 4-геометрию в прошлом и будущем.

12. Таким образом, инерциальные свойства каждой пробной частицы определены повсюду и во все времена, т. е. дана конкретная реализация принципа Маха.

Многое еще следует сделать, чтобы расшифровать физику, стоящую за этими уравнениями, и увидеть эту физику в действии. Значительный прогресс в этом направлении уже был достигнут до современной стадии понимания уравнений для начальных значений. Особый интерес представляют результаты Тирринга [177, 178] и Тирринга и Лензе [179], обсуждаемые Эйнштейном в третьем издании его книги «*Сущность теории относительности*» [10].

**Маятник Фуко**

Рассмотрим кусочек твердого грунта вблизи географического полюса и установленную на нем подставку, на которой подвешен маятник. Даже если небо покрыто облаками, наблюдатель видит, как след мятника Фуко медленно поворачивается на 360°. Затем небо проясняется и, о чудо из чудес, обнаруживается, что маятник все время колеблется по дуге, фиксированной относительно удаленных звезд. Как это может быть, если, согласно рассмотрению Маха, «масса там определяет инерцию здесь»?

**Увлечение инерциальной системы отсчета**

Усилим вопрос. Согласно демократическому принципу (равные массы созданы равными), в расчеты мятника Фуко должна входить масса Земли. Плоскость вращения должна увлекаться с незначительной угловой скоростью $\omega_{\text{увлеч}}$ относительно так называемых «неподвижных звезд». Чему равна угловая скорость $\omega_{\text{увлеч}}$? И какова будет $\omega_{\text{увлеч}}$, если маятник окружить быстро вращающейся (с угловой скоростью $\omega_{\text{об}}$) сферической оболочкой, имеющей массу $m_{\text{об}}$ и радиус $R_{\text{об}}$?

Теория Эйнштейна утверждает, что инерция есть проявление геометрии пространства-времени, а присутствие материи воздействует на геометрию в степени, пропорциональной множителю $G/c^2 = 0{,}742 \cdot 10^{-28}$ см/г. На основании простых размерностных соображений можно лишь сказать, что угловая скорость увлечения определяется выражением

$$\omega_{\text{увлеч}} = k \frac{G}{c^2} \frac{m_{\text{об. обычн}}}{R_{\text{об}}} \omega_{\text{об}} = k \frac{m_{\text{об}}}{R_{\text{об}}} \omega_{\text{об}}. \qquad (21.155)$$

Здесь $k$ — числовой коэффициент, который можно найти лишь с помощью детального расчета. Тирринг и Лензе (см. [178, 179]), отправляясь от плоского фонового пространственно-временного многообразия, вычислили в приближении слабого поля (гл. 18) влияние движущегося тока массы на метрику. Будучи выраженной в полярных координатах, метрика приобретает ненулевой недиагональный коэффициент $g_{\phi t}$. При подстановке в уравнение геодезических этот коэффициент приводит к росту прецессии. Прецессия (определенная здесь не относительно локальной вертикали, а вокруг оси, параллельной оси вращения) описывается выражением вида (21.155) с коэффициентом прецессии $k$, равным

$$k = 4/3. \qquad (21.156)$$

Имеется тесный параллелизм между магнитной компонентой максвелловского поля и компонентой прецессии поля Эйнштейна. Ни в том, ни в другом поле покоящийся источник не создает нового эффекта, когда действует на покоящийся пробный заряд. Чтобы создать магнитное поле, необходим круговой ток, а чтобы пробный заряд реагировал на магнитное поле, он должен двигаться. Аналогично и здесь отсутствие колебаний маятника означает и отсутствие прецессии маятника. Кроме того, направление прецессии зависит от положения маятника относительно вращающейся массивной оболочки. Коэффициент прецессии $k$ принимает следующие значения:

$k = 4/3$ для маятника, расположенного внутри вращающейся массивной оболочки;
$k = 4/3$ для маятника на Северном или Южном полюсе; (21.157)
$k = -2/3$ для маятника, расположенного непосредственно вне вращающейся оболочки на экваторе.

Эта зависимость угловой скорости увлечения $\omega_{\text{увлеч}}$ от положения маятника делает еще более прозрачной аналогию с магнетизмом, где поле вращающейся заряженной сферы направлено к северу в центре сферы и на обеих полюсах и направлено к югу на экваторе.

В каком бы месте ни был локализован воображаемый маятник Фуко — в центре земли или на Северном полюсе, порядок величины ожидаемой угловой скорости увлечения

$$\omega_{\text{увлеч}} \sim \frac{m_{\text{Земли}}}{R_{\text{Земли}}}\omega_{\text{Земли}} \sim \frac{0{,}44\text{ см}}{6\cdot 10^{8}\text{ см}}\,\frac{1\text{ радиан}}{13700\text{ с}} \sim 5\cdot 10^{-14}\text{ рад/с} \quad (21.158)$$

слишком мал, чтобы можно было говорить о детектировании, не говоря уже о фактическом измерении любым из уже существующих приборов. Однако, возможно, эффект будет измерен с помощью конструируемых сегодня гироскопов (§ 40.7). В противоположность этому вблизи быстро вращающейся нейтронной звезды или черной дыры с заметным моментом импульса вычисленный эффект увлечения не просто обнаружим — он даже существен (см. гл. 33, посвященную физике вращающейся черной дыры).

Как удаленные звезды, так и близлежащая вращающаяся оболочка вещества должны влиять на естественную плоскость колебаний маятника Фуко при условии, если звезды расположены не настолько далеко ($r \sim$ радиус Вселенной), чтобы кривизна пространства начала вносить существенные поправки в расчеты Лензе и Тирринга. Другими словами, не видно причины, почему не следует на том же основании рассматривать все массы. Поэтому более подходяще, а также отчасти символичнее записать (21.158) в виде

«Суммарный вклад в инерцию»

$$\omega_{\substack{\text{плоскости}\\ \text{колебаний}\\ \text{маятника}\\ \text{Фуко}}} \sim \frac{m_{\text{об}}}{R_{\text{об}}}\omega_{\text{об}} + \sum_{\substack{\text{по удаленным}\\ \text{«звездам»}}} \frac{m_{\text{«звезды»}}}{r_{\text{«звезды»}}}\omega_{\text{«звезды»}}. \quad (21.159)$$

Кроме того, когда близлежащая оболочка вещества отсутствует или ее влиянием можно пренебречь, плоскость колебаний маятника, если опыт является в какой-то мере советчиком, не может поворачиваться относительно системы отсчета, связанной с удаленными «звездами». В этом случае угловая скорость $\omega_{\text{Фуко}}$ должна быть тождественна угловой скорости $\omega_{\text{звезды}}$, или «суммарный

вклад в инерцию»

$$\sum_{\substack{\text{по удаленным}\\ \text{«звездам»}}} \frac{m_{\text{«звезды»}}}{r_{\text{«звезды»}}} \sim \frac{m_{\text{Вселенной}}}{r_{\text{Вселенной}}}. \qquad (21.160)$$

должен быть порядка единицы. Точно такое же приблизительное тождество между массой Вселенной и ее радиусом в фазе максимального расширения является характерным свойством модели Фридмана и других простых моделей закрытой Вселенной (гл. 27 и 30). В этом отношении эйнштейновская теория принципа Маха обнаруживает удовлетворительную степень самосогласованности.

В фазах динамики Вселенной, отличных от стадии максимального расширения, $r_{\text{Вселенной}}$ может стать произвольно малым по сравнению с $m_{\text{Вселенной}}$. Тогда отношение (21.160) может отклониться от единицы в десятки раз. Независимо от этого обстоятельства нет никакого другого выбора, кроме предположения, что после всех поправок на динамику сжатия или расширения, запаздывание и т. д. *эффективное* значение «суммарного вклада в инерцию» будет порядка единицы. Только так можно сохранить неизбежную тождественность $\omega_{\text{Фуко}}$ с $\omega_{\text{удаленных звезд}}$. К счастью, мы не обязаны прослеживать теологию «суммарного вклада в инерцию» вплоть до абсолютнейшей из тех софистик, которые дают надлежащее объяснение инерции. Как уже было разъяснено, идея Маха о том, что масса там определяет инерцию здесь, имеет полное математическое объяснение в геометродинамическом законе Эйнштейна. Анализ увлечения инерциальной системы отсчета в сильном поле в релятивистской космологии был впервые проведен в работах Брилля и Коэна [180], см. также § 33.4 об увлечении инерциальной системы отсчета в поле вращающейся черной дыры.

Геометрия Минковского как предел замкнутой геометрии

Требуются еще и другие объяснения смысла принципа Маха и его использования. Инерциальные свойства пробной частицы полностью определены, если частица движется в идеальном пространстве Минковского. «Укажите, пожалуйста, массы, ответственные за эту инерцию»,— скажет критик-антимахист. Для ответа напомним, что теория Эйнштейна включает в себя не только геометродинамический закон, но также (в эйнштейновском представлении) граничное условие замкнутости Вселенной. Поэтому плоскую часть пространства-времени следует рассматривать не как бесконечную, а как часть замкнутой Вселенной. (В качестве двумерной аналогии поместите на стеклянную крышку стола резиновый шар с водой и рассматривайте его снизу.) Искривленная часть Вселенной приобретает кривизну по причине действительного содержания массы-энергии или (если она заполнена только гравитационными волнами) по причине наличия эффективной массы-энергии. Масса-энергия, действительная или эффективная, и ответственна за инерциальные свойства пробной частицы, которая с первого взгляда кажется единственной во Вселенной.

Это никоим образом не изменяет качественный характер результата при переходе к модели Вселенной, в которой плоская область Минковского и все другие размеры Вселенной десятикратно увеличены («в 10 раз больше шар, в 10 раз больше поверхность»). Кривизна и плотность искривленной части модели Вселенной уменьшаются в 100 раз, объем возрастает в 1000 раз, масса возрастает в 10 раз, однако отношение массы к радиусу или «суммарный вклад в инерцию» (незатейливая замена полного расчета начальных данных) не изменяется.

Эйнштейн признавал вклад принципа Маха в происхождение своей теории, см. его письмо. Следовательно, справедливости ради принцип Маха должен сегодня теории Эйнштейна воздать должное за свое объяснение [1]).

---

УПРАЖНЕНИЯ

### 21.21. Почему равен нулю тензор конформной кривизны Вейля

Сколько независимых компонент имеет тензор кривизны Римана в трехмерном пространстве? Сколько таких компонент у тензора кривизны Риччи? Покажите, что два этих тензора связаны формулой

$$R^d_{abc} = \delta^d_b R_{ac} - \delta^d_c R_{ab} + g_{ac} R^d{}_b - g_{ab} R^d{}_c + \frac{1}{2} R\,(\delta^d_c g_{ab} - \delta^d_b g_{ac}),$$

а потому нет необходимости (как в пространствах более высоких размерностей) задавать тензор конформной кривизны Вейля для

---

[1]) Редакторы перевода не могут согласиться с некоторыми аспектами анализа, проведенного в этом параграфе и носящего местами довольно абстрактный характер. Подробный анализ принципа Маха дан в книгах [238, 535], к которым мы отсылаем читателя. Здесь мы подчеркнем только два момента. Авторы сосредоточили свое внимание главным образом на одной стороне дела — на влиянии распределения и движения масс на геометрические свойства пространства-времени, т. е. на определении инерциальной системы отсчета. Общая теория относительности действительно установила такое влияние. Тот факт, что вблизи тяготеющего тела инерциальной является свободно падающая система, есть наиболее прямое и ясное выражение этого влияния. Уже во вторую очередь следует говорить об эффектах более высокого порядка малости — об эффектах Лензе — Тирринга и др. Однако, когда говорят, следуя Маху, что инерция определяется взаимодействием с другими телами Вселенной, имеют в виду нечто большее, а именно: инертная масса тела — мера его сопротивляемости действию негравитационной силы — определяется взаимодействием с другими телами Вселенной. «Инерция тела должна возрастать по мере скопления весомых масс вблизи него»,— писал Эйнштейн («Сущность теории относительности»), прямолинейно следуя главной идее Маха об инерции. Эйнштейн считал, что этот эффект имеется в созданной им общей теории относительности. Однако, как показали Бранс [533] и Дике [534], такого эффекта в общей теории относительности нет и мнение Эйнштейна было связано с ошибочной интерпретацией вычислений. Одна и та же сила (скажем, сила сжатой пружины) придает телу одинаковое ускорение и вблизи масс, и вдали от них.

По нашему мнению, принцип Маха в том виде, как его понимали Мах и Эйнштейн, не содержится в общей теории относительности.— *Прим. ред.*

определения дополнительных деталей тензора Римана. Покажите, что тензор Вейля, являющийся $n$-мерной модификацией равенства (13.50) и тензора из упражнения 13.13, равен нулю для $n = 2$.

### 21.22. Кривизна Йорка [160]

а. Определите тензор [11]

$$R_{abc} = R_{ab|c} - R_{ac|b} + \frac{1}{4}(g_{ac}R_{|b} - g_{ab}R_{|c}).$$

б. Покажите, что 3-геометрия является конформно плоской тогда и только тогда, когда $R_{abc} = 0$.

в. Покажите, что справедливы следующие тождества, которые сводят $R_{abc}$ к пяти независимым компонентам:

$$\begin{aligned} R^a{}_{ac} = g^{ab}\,R_{bac} &= 0; \\ R_{abc} + R_{acb} &= 0; \\ R_{abc} + R_{cab} + R_{bca} &= 0. \end{aligned}$$

г. Покажите, что кривизна Йорка

$$Y^{ab} = g^{1/3}[aef]\left(R^b_f - \frac{1}{4}\delta^b_f R\right)_{|e} = -\frac{1}{2}g^{1/3}[aef]\,g^{bm}R_{mef}$$

конформно инвариантна и обладает свойствами (21.148).

### 21.23. «Вытягивание вектора Пойнтинга из воздуха»

Из условия, что функционал Гамильтона — Якоби $S(g_{ij}, A_m)$ (экстремаль интеграла действия) для комбинированных полей Эйнштейна и Максвелла, явно зависящий от 6 метрических коэффициентов $g_{ij}(x, y, z)$ и 3 потенциалов $A_m(x, y, z)$, должен в действительности зависеть только от 3-геометрии на пространственноподобной гиперповерхности и распределения магнитного поля на этой гиперповерхности, покажите, что геометродинамический импульс поля $\pi^{ij} = \delta S/\delta g_{ij}$ удовлетворяет условию вида

$$\pi^{ij}{}_{|j} = c\,[imn]\,\mathscr{E}_m\mathscr{B}_n,$$

и вычислите коэффициент $c$ в этом равенстве [148]. *Указание*: Заметьте, что преобразование

$$x^i \to x^i - \xi^i, \qquad g_{ij} \to g_{ij} + \xi_{i|j} + \xi_{j|i}$$

никак не изменяет саму 3-геометрию, а потому соответствующее индуцированное изменение $S$,

$$\delta S = \int \left[\frac{\delta S}{\delta g_{ij}}\,\delta g_{ij} + \frac{\delta S}{\delta A_m}\,\delta A_m\right] d^3x,$$

УПРАЖНЕНИЯ

должно тождественно обращаться в нуль для произвольно выбранного вектора $\xi^i(x, y, z)$.

### 21.24. Экстремальное действие, связанное с принципом действия Гильберта, зависящее от конформной 3-геометрии и внешнего времени [112]

Покажите, что, согласно принципу действия Гильберта $\delta \int {}^{(4)}R\,(-{}^{(4)}g)^{1/2} d^4x = 0$, на каждой из двух граничных пространственноподобных поверхностях требуется знать 1) конформную 3-геометрию ${}^{(3)}<$ гиперповерхности и 2) переменную внешнего времени, определяемую как

$$\tau = \frac{2}{3} g^{-1/2} \operatorname{Sp} \pi = \frac{4}{3} \operatorname{Sp} \mathbf{K},$$

условно представляемую в виде пиктограммы $\succ\!\!<$, характеризуемую в каждой точке пространства одним числом и не зависящую от конформного множителя 3-геометрии. Показав это, объясните в нескольких словах, почему в такой формулировке геометродинамики функция Гамильтона — Якоби (фаза волновой функции в полуклассическом или ВКБ приближении, умноженная на $\hbar$) выражается в виде

$$S = S({}^{(3)}<, \succ\!\!<).$$

---

## § 21.13. УСЛОВИЯ СШИВАНИЯ

Внутренняя и внешняя кривизны гиперповерхности, играющие фундаментальную роль в формализме начальных данных, являются также мощным средством анализа «условий сшивания».

**Условия сшивания в электродинамике**

Напомним условия сшивания в электродинамике: при переходе через любую поверхность (например, пластину конденсатора) тангенциальная часть электрического поля $E_{\parallel}$ и нормальная часть магнитного поля $B_{\perp}$ должны быть непрерывными, таким образом,

$$[E_{\parallel}] \equiv (\text{разрыв } E_{\parallel}) \equiv$$
$$\equiv (E_{\parallel} \text{ на поверхности, заряженной положительно}) -$$
$$- (E_{\parallel} \text{ на поверхности, заряженной отрицательно}) \equiv$$
$$\equiv E_{\parallel}^{\uparrow} - E_{\parallel}^{\downarrow} = 0, \qquad (21.161a)$$

$$[B_\perp] \equiv B_\perp^+ - B_\perp^- = 0, \tag{21.161б}$$

в то время как «скачки» $E_\perp$ и $B_\parallel$ должны быть связаны с плотностью заряда $\sigma$ (заряд на единицу площади), плотностью тока $j$ (ток на единицу площади) и единичной нормалью к поверхности $n$ формулами

$$[E_\perp] = E_\perp^+ - E_\perp^- = 4\pi\sigma n, \tag{21.161в}$$

$$[B_\parallel] = B_\parallel^+ - B_\parallel^- = 4\pi j \times n. \tag{21.161г}$$

Напомним, что эти условия сшивания выводятся путем интегрирования уравнений Максвелла по «биллиардной коробке», охватывающей поверхность.

Аналогичные условия сшивания, которые можно вывести таким же способом, имеют место и для гравитационного поля (кривизны пространства-времени) и для напряжений, генерирующих гравитационное поле [1]). Сосредоточим внимание на конкретном трехмерном сечении пространства-времени — 3-поверхности $\Sigma$, изображенной на фиг. 21.6. Поверхность может быть пространственноподобна [единичная нормаль $\mathbf{n}$ времениподобна; $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) = -1$] или времениподобна [единичная нормаль $\mathbf{n}$ пространственноподобна; $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) = +1$]. Нулевой случай будет обсуждаться позже. Для облегчения вывода условий сшивания введем в окрестности $\Sigma$ гауссовы нормальные координаты [см. абзац, предшествующий уравнению (21.82)].

**Уравнение Эйнштейна в форме «3 + 1»**

Тензор Эйнштейна и уравнение поля Эйнштейна, выраженные в функции внутренней и внешней кривизны 3-поверхности $\Sigma$ и близких 3-поверхностей $n = \text{const}$, имеют компоненты

$$G^n{}_n = -\frac{1}{2}{}^{(3)}R + \frac{1}{2}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}\{(\mathrm{Sp}\,\mathbf{K})^2 - \mathrm{Sp}(\mathbf{K}^2)\} = 8\pi T^n{}_n, \tag{21.162а}$$

$$G^n{}_i = -(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}\{K_i{}^m{}_{|m} - (\mathrm{Sp}\,\mathbf{K})_{|i}\} = 8\pi T^n{}_i, \tag{21.162б}$$

$$G^i{}_j = {}^{(3)}G^i{}_j + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}\left\{(K^i{}_j - \delta^i{}_j\,\mathrm{Sp}\,\mathbf{K})_{,n} - \right.$$

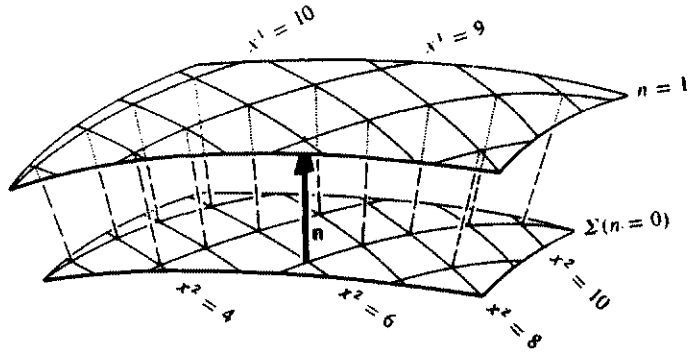
$$\left. - (\mathrm{Sp}\,\mathbf{K})\,K^i{}_j + \frac{1}{2}\delta^i{}_j(\mathrm{Sp}\,\mathbf{K})^2 + \frac{1}{2}\delta^i{}_j\,\mathrm{Sp}(\mathbf{K}^2)\right\} = 8\pi T^i{}_j. \tag{21.162в}$$

[См. уравнения (21.77) и (21.81), (21.76) и (21.82).]

Предположим, что тензор энергии-импульса $T^\alpha{}_\beta$ имеет на 3-поверхности $\Sigma$ «дельта-функциональную сингулярность», т. е. предположим, что $\Sigma$ является «мировой трубкой» двумерной поверх-

---

[1]) Первоначальная формулировка гравитационных условий сшивания восходит к Ланцошу [181, 182]. Приведенная здесь их формулировка в функции внутренней и внешней кривизн развита Дармуа [183], Мизнером и Шарпом [184] и Израилем [140]. Дополнительные ссылки на обширную литературу можно найти в работе Израиля [140].




ФИГ. 21.6.
Гауссовы нормальные координаты в окрестности 3-поверхности $\Sigma$. Метрика в гауссовых нормальных координатах имеет вид

$$ds^2 = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}\,dn^2 + g_{ij}dx^i dx^j,$$

где $\mathbf{n} = \partial/\partial n$, $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) = -1$, если поверхность пространственноподобна, и $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) = 1$, если поверхность времениподобна. (См. упражнения 27.2.) Внешняя кривизна поверхностей $n = \text{const}$ равна $K_{ij} = -\frac{1}{2}\,\partial g_{ij}/\partial n$. Уравнения (21.162) представляют собой уравнения поля Эйнштейна, записанные в «3 + 1»-мерной форме.

ности с конечным 4-импульсом на единицу площади (аналог поверхностного заряда и поверхностного тока в электродинамике). Определим тогда *поверхностный тензор энергии-импульса на* $\Sigma$ как интеграл от $T^\alpha{}_\beta$, взятый по собственному расстоянию $(n)$, измеренному перпендикулярно $\Sigma$:

**Поверхностный тензор энергии-импульса**

$$S^\alpha{}_\beta = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} T^\alpha{}_\beta\, dn\right]. \tag{21.163}$$

**Вывод условий сшивания**

Чтобы найти влияние этого поверхностного слоя на геометрию пространства-времени, проинтегрируем по «биллиардной коробке» уравнение поля Эйнштейна (21.162)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} G^\alpha{}_\beta\, dn\right] = 8\pi S^\alpha{}_\beta. \tag{21.164}$$

Рассмотрим интеграл от $G^\alpha{}_\beta$. Если бы 3-метрика $g_{ij}$ содержала дельта-функции или разрыв 3-поверхности $\Sigma$, то 3-поверхность $\Sigma$ не имела бы какой-либо полностью определенной 3-геометрии, что даже в присутствии поверхностных слоев представляется физически неприемлемой ситуацией. Отсутствие дельта-функций $\delta(n)$ в $g_{ij}$ означает отсутствие дельта-функций в ${}^{(3)}R$; отсутствие разры-

вов в $g_{ij}$ означает отсутствие дельта-функций в $K_{ij} = -\frac{1}{2} g_{ij,n}$. Поэтому после интегрирования уравнения (21.162) гласят

$$\int G^n{}_n \, dn = 0 = 8\pi S^n{}_n, \tag{21.165а}$$

$$\int G^n{}_i \, dn = 0 = 8\pi S^n{}_i, \tag{21.165б}$$

$$\int G^i{}_j \, dn = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\,(\gamma^i{}_j - \delta^i{}_j \operatorname{Sp}\boldsymbol{\gamma}) = 8\pi S^i{}_j, \tag{21.165в}$$

где $\gamma^i{}_j$ — «скачок» компонент внешней кривизны

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv [\mathbf{K}] \equiv (\mathbf{K} \text{ на } «n = +\varepsilon \text{ стороне}» \Sigma) - (\mathbf{K} \text{ на } «n = -\varepsilon \text{ стороне}» \Sigma) \equiv \mathbf{K}^+ - \mathbf{K}^-. \tag{21.166}$$

Условия сшивания в отсутствие поверхностных слоев

В отсутствие дельта-функционального поверхностного слоя вышеприведенные условия сшивания означают просто, что $\boldsymbol{\gamma} \equiv [\mathbf{K}] = 0$, т. е. при исследовании погружений 3-поверхности $\Sigma$ в пространство-время, расположенное выше ее «верхней» поверхности, и в пространство-время, расположенное ниже ее «нижней» поверхности, необходимо получить тождественные погружения, т. е. тождественные внешние кривизны $\mathbf{K}$. Конечно, и внутренняя кривизна гиперповерхности $\Sigma$ должна быть одинаковой независимо от того, рассматривается ли $\Sigma$ сверху или снизу. Более кратко это можно сформулировать так:

$$\text{(отсутствие поверхностных слоев)} \rightleftharpoons \text{(«непрерывность» } g_{ij} \text{ и } K_{ij}). \tag{21.167}$$

Условия сшивания при наличии поверхностного слоя

Если присутствует поверхностный слой, то 3-поверхность $\Sigma$ должна быть мировой трубкой двумерного слоя материи, а нормаль к $\Sigma$ должна быть пространственноподобной $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) = +1$. Условия сшивания (21.165а) и (21.165б) имеют в таком случае простой физический смысл

$$\mathbf{S}(\mathbf{n}, \ldots) = 0 \rightleftarrows \left( \begin{array}{l} \text{поток импульса полностью} \\ \text{заключен в } \Sigma, \text{ т. е. импульс,} \\ \text{связанный с поверхностным слоем} \\ \text{не вытекает из } \Sigma, \text{ иначе говоря,} \\ \Sigma \text{ является мировой трубкой} \\ \text{поверхностного слоя} \end{array} \right), \tag{21.168а}$$

но отсюда ничего нового не следует. Условие сшивания (21.165в) гласит, что поверхностный тензор энергии-импульса генерирует разрыв внешней кривизны (различное погружение в пространство-время «выше» и «ниже» $\Sigma$), описываемый выражением

$$\gamma^i{}_j - \delta^i_j \operatorname{Sp}\boldsymbol{\gamma} = 8\pi S^i{}_j. \tag{21.168б}$$

Конечно, внутренняя геометрия $\Sigma$ должна быть одинаковой сверху и снизу:

3-метрика $g_{ij}$ непрерывна при переходе через $\Sigma$. (21.169)

При анализе поверхностных слоев используются не только условия сшивания (21.168а) — (21.169), но также и четырехмерное уравнение поля Эйнштейна, применяемое на каждой стороне поверхности $\Sigma$ в отдельности, и уравнение движения для поверхностного тензора энергии-импульса. Уравнение движения выводится путем рассмотрения скачка уравнения поля $G^n{}_i = 8\pi T^n{}_i$ [уравнение (21.162б)]. Так $[G^n{}_i] = 8\pi [T^n{}_i]$ означает:

$$(\gamma_i{}^m - \delta_i{}^m \operatorname{Sp} \gamma)_{|m} = -8\pi [T^n{}_i];$$

выражая далее это равенство через $S_i{}^m$ с помощью условия сшивания (21.168б), получаем

**Уравнение движения для поверхностного слоя**

$$S^{im}{}_{|m} + [T^{in}] = 0. \tag{21.170}$$

(Для более глубокого понимания уравнения движения см. упражнения 21.25 и 21.26. Приложения «формализма поверхностного слоя» см. в упражнении 21.27, а также в работах [140, 185, 186].)

Рассмотрение условий сшивания через *нулевую* поверхность $\Sigma$ приводит к результатам, отличным от результатов для случаев пространственноподобной и времениподобной поверхностей. Интегрирование уравнений поля по «биллиардной коробке» показывает, что даже в вакууме внешняя кривизна может быть разрывной. Разрыв $K_{ij}$ при переходе через нулевую поверхность, не созданный какими-либо напряжениями, представляет собой геометрическое проявление *фронта ударных гравитационных волн* (аналог фронта ударных волн в гидродинамике). Количественные детали см., например, в [187—190] и особенно в [191].

**Фронт ударных гравитационных волн**

Распространение разрыва тензора кривизны со скоростью света — это напоминание о том, что все гравитационные эффекты, подобно всем электромагнитным эффектам, подчиняются закону причинности. Начальные данные на пространственноподобной начальной гиперповерхности однозначно определяют результирующую геометрию пространства-времени (см. работы Картана, Стельмахера, Лихнеровича и Брюа (известной также под именами Фуре-Брюа и Шоке-Брюа) и другие, приведенные в статье Брюа [162], но это определение лишь до некоторой степени совместимо с причинностью. Так, изменение этих данных в ограниченной области начальной 3-геометрии чувствуется на более поздней гиперповерхности только в области, которая тоже ограничена и лишь немного превышает исходную область.

Если перейти от классической динамики к квантовой, то появится новая причина сосредоточить внимание на пространственноподобной начальной гиперповерхности: наблюдаемые в различных точках такой гиперповерхности коммутируют друг с другом, т. е. в принципе одновременно измеримы.

Не каждое четырехмерное многообразие допускает глобальную несингулярную пространственноподобную гиперповерхность. Можно полагать, что те многообразия, которые допускают такую гиперповерхность, имеют большее отношение к физике, чем те, в которых не может существовать такая гиперповерхность.

Даже в многообразии, допускающем пространственноподобную гиперповерхность, следует иногда уделять внимание (в классической теории) начальным данным на гиперповерхности, являющейся не пространственноподобной, а «характеристической» в том смысле, что она вмещает нулевые геодезические (см., например, [25] и приведенную там литературу). Для таких ситуаций типично то, что можно предсказать будущее, но не прошлое, или предсказать прошлое, но не будущее.

Дети света и дети тьмы — предвидение физики, которое появляется из этой главы и других разделов физики. Дети света — это дифференциальные уравнения, которые предсказывают будущее на основе прошлого. Дети тьмы — это факторы, которые задают начальные условия.

---

## 21.25. Уравнение движения для поверхностного слоя

УПРАЖНЕНИЯ

а. Пусть $\mathbf{u}$ — «средняя 4-скорость» вещества в поверхностном слое, определенная таким образом, что наблюдатель, движущийся с 4-скоростью $\mathbf{u}$, фиксирует нулевой поток энергии. Пусть $\sigma$ — полная масса-энергия на единицу собственной площади поверхности, измеренная таким «сопутствующим наблюдателем». Покажите, что поверхностный тензор энергии-импульса можно выразить в виде

$$\mathbf{S} = \sigma \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{t}, \quad \text{причем } (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}) = 0, \tag{21.171}$$

где $\mathbf{t}$ — симметричный тензор напряжений.

б. Покажите, что проекция уравнения движения (21.170) на $\mathbf{u}$ равна

$$d\sigma/d\tau = -\sigma u^j{}_{|j} + u_j t^{jk}{}_{|k} + u_j [T^{jn}], \tag{21.172}$$

где $d/d\tau = \mathbf{u}$. Дайте физическую интерпретацию каждому члену.

в. Пусть $a_j$ — та часть 4-ускорения наблюдателя, которая лежит в поверхностном слое $\Sigma$. Проектируя уравнение движения (21.170) на направление, перпендикулярное $\mathbf{u}$, покажите, что

$$\sigma a_j = -P_{ja}\{t^{ab}{}_{|b} + [T^{an}]\}, \tag{21.173}$$

где $P_{ja}$ — проекционный оператор

$$P_{ja} = g_{ja} + u_j u_a. \tag{21.174}$$

Дайте физическую интерпретацию каждому члену уравнения (21.173).

УПРАЖНЕНИЯ

### 21.26. Тонкие оболочки пыли

Для тонкой оболочки пыли, окруженной вакуумом ($[T^{jn}] = 0$, $\mathbf{t} = 0$), выведите следующие уравнения:

$$d\sigma/d\tau = -\sigma u^b{}_{;b}, \tag{21.175а}$$

$$\mathbf{a}^+ + \mathbf{a}^- = 0, \tag{21.175б}$$

$$\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^- = (4\pi\sigma)\,\mathbf{n}, \tag{21.175в}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = 8\pi\sigma\left(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + \frac{1}{2}\,\mathbf{g}\right). \tag{21.175г}$$

Здесь $\mathbf{a}^+$ и $\mathbf{a}^-$ — 4-ускорения, измеренные акселерометрами, которые прикреплены к внутренней и внешней сторонам оболочки, а $\mathbf{g}$ — 3-метрика оболочки. Покажите, что первое из этих уравнений представляет собой закон «сохранения массы покоя».

### 21.27. Сферическая оболочка пыли

Примените формализм упражнения 21.25 к коллапсирующей сферической пылевой оболочке [192]. Для метрики внутри и вне оболочки используйте метрику плоского пространства-времени и вакуумное решение Шварцшильда (гл. 23):

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) \text{ внутри,} \tag{21.176а}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-2M/r} + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2) \text{ снаружи.} \tag{21.176б}$$

Пусть «радиус» оболочки как функция собственного времени, измеренного в оболочке, равен

$$R \equiv \frac{1}{2\pi} \times (\text{собственная длина окружности оболочки}) = R(\tau). \tag{21.176в}$$

Покажите, что масса оболочки изменяется со временем как

$$\sigma(\tau) = \mu/4\pi R^2(\tau), \qquad \mu = \text{const} = \text{«полная масса покоя»}. \tag{21.176г}$$

Выведите и решите уравнение движения

$$M = \mu\left\{1 + \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2\right\}^{1/2} - \frac{\mu}{2R}. \tag{21.176д}$$

# 22. ТЕРМОДИНАМИКА, ГИДРОДИНАМИКА, ЭЛЕКТРОДИНАМИКА, ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА И КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

**Эта глава полностью относится к курсу 2. Перед чтением ее не нужно изучать какой-либо изложенный ранее материал из курса 2, но знакомство с гл. 5 (тензор энергии-импульса) будет полезным.**

**§ 22.5 (геометрическая оптика) необходим как подготовительный материал к гл. 34 (сингулярности и глобальные методы). Остальная часть главы не является необходимым подготовительным материалом к какой-либо из последующих глав, но знакомство с ней будет чрезвычайно полезным во многих приложениях теории тяготения (гл. 23—40).**

## § 22.1. ОСНОВАНИЕ ДЛЯ НАПИСАНИЯ ЭТОЙ ГЛАВЫ

В оставшейся части данной книги (за исключением гл. 41—44) мы сосредоточим внимание на астрофизических приложениях теории тяготения. Каждое приложение — звезды, звездные скопления, космология, коллапс, черные дыры, гравитационные волны, эксперименты в Солнечной системе — может на элементарном уровне рассматриваться само по себе без ссылок на материал этой главы. Однако для глубокого понимания приложений требуется предварительно изучить термодинамику, гидродинамику, электродинамику, геометрическую оптику и кинетическую теорию в искривленном пространстве-времени. Следовательно, большинство читателей курса 2 захотят разобрать с этой точки зрения вышеперечисленные предметы.

## § 22.2. ТЕРМОДИНАМИКА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ [1])

Рассмотрим для конкретности и простоты равновесную термодинамику идеальной жидкости с заданным химическим составом («простая идеальная жидкость»), например газообразной внутренней области коллапсирующей сверхмассивной звезды. Термодинамическое состояние жидкого элемента, проходящего через событие

[1]) Более детальные рассмотрения этой темы см., например в работах [193—195] и в работах, цитируемых там. (Классические основы даны в книге Толмана [31].— *Прим. ред.*) См. также работы по гидродинамике и по кинетической теории, указанные соответственно в начале § 22.3 и в начале § 22.6.

**Термодинамические потенциалы определяются в системе отсчета, покоящейся относительно жидкости**

$\mathcal{P}_0$, можно охарактеризовать различными термодинамическими потенциалами, такими, как $n$, $\rho$, $p$, $T$, $s$, $\mu$. Величину каждого потенциала в $\mathcal{P}_0$ можно получить в собственной системе отсчета (§ 13.6) наблюдателя, движущегося с жидким элементом, т. е. в «системе, покоящейся относительно жидкого элемента». Несмотря на то что для измерения потенциалов используется покоящаяся система отсчета, потенциалы являются функциями, не зависящими от системы отсчета, (скалярные поля). В выбранном событии $\mathcal{P}_0$ данный потенциал (например, $n$) имеет единственное значение $n(\mathcal{P}_0)$; таким образом, $n$ — функция, полностью не зависящая от системы отсчета.

**Определения термодинамических потенциалов**

Под $n$, $\rho$, $p$, $T$, $s$ и $\mu$ понимают следующие величины, измеряемые в системе отсчета, покоящейся относительно жидкого элемента:

$n$ — плотность барионов, т. е. число барионов на единицу трехмерного объема в покоящейся системе отсчета, причем для антибарионов (если они вообще присутствуют) берется отрицательный знак;

$\rho$ — плотность полной массы-энергии, т. е. массы-энергии (включая массу покоя, тепловую энергию, энергию сжатия и т. д.), содержащейся в единице трехмерного объема в покоящейся системе отсчета;

$p$ — изотропное давление;

$T$ — температура;

$s$ — энтропия на барион (энтропия на единицу объема равна $ns$);

$\mu$ — химический потенциал барионов [см. ниже уравнение (22.8)].

**Определение «простой жидкости»**

Предполагается, что химический состав жидкости (плотность молекул и атомов водорода, свободных протонов и электронов, фотонов, ядер $^{238}$U, $\Lambda$-гиперонов...) однозначно задается двумя термодинамическими переменными, например полной плотностью барионов $n$ и энтропией на барион $s$. В этом смысле жидкость представляет собой «простую жидкость». Простые жидкости встречаются всякий раз, когда химический состав «заморожен» (скорости реакций слишком низки, чтобы быть существенными в интересующих нас масштабах времени, например в сверхмассивной звезде, если в ней не происходит взрывного горения и не достигаются температуры, достаточно высокие для образования пар $e^- - e^+$). Простые жидкости могут также иметь место в противоположном крайнем случае полного химического равновесия (скорости реакций достаточно велики для поддержания равновесия, несмотря на изменение плотности и энтропии, например в нейтронных звездах, где высокие давления ускоряют все реакции). При исследовании ядерного горения в неконвективной звезде, или взрывного ядерного горения, или рождения пар и уноса энергии нейтрино при высоких температурах жидкость обычно рассматривают как «многокомпонентную». В этом случае

вводят плотность $n_J$ и химический потенциал $\mu_J$ для каждого химического компонента, причем его распространенность не фиксируется заданием $n$ и $s$. Подробнее см., например, [196].

Закон сохранения барионов

Самый фундаментальный закон термодинамики, более фундаментальный, чем «первый» и «второй» законы,— это *закон сохранения барионов*. Рассмотрим движущийся в жидкости жидкий элемент, через границы которого не втекают и не вытекают барионы. При движении жидкого элемента в пространстве-времени он деформируется, объем его $V$ изменяется. Однако число барионов, содержащихся в жидком элементе, должно оставаться неизменным, поэтому

$$\frac{d}{d\tau}(nV) = 0. \tag{22.1}$$

Изменения объема вызываются движением участков жидкости относительно друг друга, что можно описать точно (упражнение 22.1):

$$dV/d\tau = (\nabla \cdot \mathbf{u})\, V, \tag{22.2}$$

где $\mathbf{u} = d/d\tau$ — 4-скорость жидкости. Поэтому закон сохранения барионов [уравнение (22.1)] можно переписать в виде

$$0 = \frac{dn}{d\tau} + \frac{n}{V}\frac{dV}{d\tau} = \nabla_{\mathbf{u}} n + n(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla n + n(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \cdot (n\mathbf{u}),$$

т. е.

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \tag{22.3}$$

$$\mathbf{S} = n\mathbf{u} = \text{вектор барионного тока} \tag{22.4}$$

(см. § 5.4 и упражнение 5.3). Более того, этот абстрактный вариант геометрического закона должен быть равным образом справедлив как в искривленном пространстве-времени, так и в плоском (принцип эквивалентности).

Отметим аналогию с законом сохранения заряда $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ в электродинамике (упражнение 3.16) и локальным законом сохранения энергии-импульса $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ (§ 5.9 и 16.2). В очень глубоком смысле формы этих трех законов диктуются теоремой Гаусса (§ 5.9 и дополнения 5.3, 5.4).

Второй закон термодинамики

*Второй закон термодинамики* утверждает, что в плоском или искривленном пространстве-времени энтропия может порождаться, но не исчезать. Применим этот закон к жидкому элементу объема $V$, содержащему фиксированное число барионов $N$. В нем имеется энтропия

$$S = Ns = nsV.$$

Энтропия может втекать и вытекать через поверхность, ограничивающую жидкий элемент («тепловой поток» между соседними жидкими элементами), однако для простоты мы предположим, что этот поток равен нулю или достаточно мал и не оказывает сколько-нибудь существенного влияния на рассматриваемую проблему.

Тогда энтропия жидкого элемента может только возрастать:

$$d(nsV)/d\tau \geqslant 0, \quad \text{если обмен энтропией между соседними жидкими элементами пренебрежимо мал,}$$

т. е. [комбинируем это с уравнением (22.1)]

$$ds/d\tau \geqslant 0 \quad \text{(в отсутствие обмена энтропией).} \tag{22.5}$$

**Ударные волны и поток тепла**

До тех пор пока жидкий элемент остается в термодинамическом равновесии, его энтропия будет действительно сохраняться [«=» в уравнении (22.5)], но в ударной волне, где равновесие кратковременно нарушается, энтропия будет увеличиваться (превращение «относительной кинетической энергии» соседних жидких элементов в тепло). (Обсуждения, касающиеся потока тепла в специальной и общей теории относительности, см. в упражнении 22.7. Обсуждение ударных волн см. в работах [197—204].)

**Первый закон термодинамики**

*Первый закон термодинамики* в собственной системе отсчета жидкого элемента тождествен первому закону в плоском пространстве-времени («принцип эквивалентности»), а в плоском пространстве-времени первый закон есть просто закон сохранения энергии:

$$d\begin{pmatrix}\text{энергия в элементе}\\ \text{объема, содержащем данное}\\ \text{число } A \text{ барионов}\end{pmatrix} = -p\,d\,(\text{объем}) + T\,d\,(\text{энтропия}),$$

т. е.

$$d(\rho A/n) = -p\,d(A/n) + T\,d(As),$$

или

$$d\rho = \frac{\rho + p}{n}\,dn + nT\,ds.$$

*Вопрос*: Какого рода «$d$» появилось здесь? Для простой жидкости значения двух потенциалов, например $n$ и $s$, однозначно определяют все другие величины, поэтому *любое* изменение $\rho$ должно однозначно определяться изменениями $n$ и $s$. Причем не имеет значения, измерены ли эти изменения вдоль мировой линии данного жидкого элемента или в некотором другом направлении. Поэтому «$d$» в первом законе можно интерпретировать как внешнюю производную

$$\mathbf{d}\rho = \frac{\rho + p}{n}\,\mathbf{d}n + nT\,\mathbf{d}s, \tag{22.6}$$

а изменения вдоль заданного направления в жидкости (вдоль заданного касательного вектора $\mathbf{v}$) можно записать в виде

$$\nabla_{\mathbf{v}}\rho \equiv \langle \mathbf{d}\rho, \mathbf{v}\rangle = \frac{\rho + p}{n}\langle \mathbf{d}n, \mathbf{v}\rangle + nT\langle \mathbf{d}s, \mathbf{v}\rangle = \frac{\rho + p}{n}\nabla_{\mathbf{v}}n + nT\nabla_{\mathbf{v}}s.$$

Уравнение (22.6) можно интерпретировать двояко: как способ вывести плотность массы-энергии среды, зная давление (как функцию $n$ и $s$) и температуру (как функцию $n$ и $s$), и как способ

вывести две функции $p\,(n, s)$ и $T\,(n, s)$ из одной функции $\rho\,(n, s)$. Естественно рассмотреть вначале второй способ, ибо кто не любит стратегию, дающую интеллектуальную выгоду? Рассматривая $\rho$ как известную (или вычисляемую) функцию $n$ и $s$, из (22.6) получаем

Расчет давления и температуры по заданной функции $\rho(n, s)$

$$\frac{\rho + p}{n} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_s,$$

$$nT = \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_n$$

и, следовательно, давление и температуру в отдельности

$$p\,(n, s) = n\left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_s - \rho, \tag{22.7а}$$

$$T\,(n, s) = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_n \tag{22.7б}$$

(«два уравнения состояния из одного»). Анализ дополнительно упрощается, если жидкость, уже имеющая по предположению повсюду одинаковый состав, обладает также повсюду одинаковой энтропией на барион $s$ и совершает адиабатическое течение (т. е. ударные волны или теплопроводность отсутствуют). В таком случае плотность $\rho = \rho\,(n, s)$ сводится к функции от одной переменной, из которой выводится все необходимое $(\rho, p, \mu)$ для гидродинамики и гравитационной физики системы (см. следующую главу). При иных обстоятельствах подходящим оказывается другой выбор «первичного термодинамического потенциала» (см. дополнение 22.1).

Хотя дифференцирование ведет от $\rho\,(n, s)$ к $p\,(n, s)$ и $T\,(n, s)$, отсюда не следует, что можно взять две любые функции $p\,(n, s)$ и $T\,(n, s)$ и «обратным ходом» (путем интегрирования) прийти к «первичной функции» $\rho\,(n, s)$. Чтобы быть совместимыми с первым законом термодинамики (22.6), две функции должны удовлетворять требованию совместности [«соотношение Максвелла», равенство вторых частных производных от $\rho$]

Соотношение Максвелла

$$(\partial p/\partial s)_n = n^2\,(\partial T/\partial n)_s. \tag{22.7в}$$

Химический потенциал $\mu$ — также однозначная функция $n$ и $s$. Он определяется следующим образом.

Химический потенциал равен «энергии инжекции» при фиксированном полном объеме и фиксированной энтропии на барион

1. Возьмите порцию простой жидкости в заданном термодинамическом состоянии (заданы $n$ и $s$).

2. Отдельно возьмите намного меньшую порцию той же жидкости, содержащую $\delta A$ барионов и находящуюся в том же термодинамическом состоянии, что и большая порция (те же $n$ и $s$).

3. Инжектируйте меньшую порцию в большую, удерживая в процессе инжекции фиксированным объем большой порции.

4. Полная инжектируемая масса-энергия,

$$\delta M_{\text{инжектируемая}} = \rho \times (\text{объем инжектируемой жидкости}) = \rho\,(\delta A/n),$$

плюс работа, необходимая для осуществления инжекции,

$$\delta W_{\text{инжекции}} = \left(\begin{array}{l}\text{работа, выполненная против сил давления}\\ \text{большой порции, для обеспечения в ней}\\ \text{места инжектируемой жидкости}\end{array}\right) =$$

$$= p\,(\text{объем инжектируемой жидкости}) = p\,(\delta A/n),$$

равны $\mu\delta A$:

$$\mu\delta A = \delta M_{\text{инжектируемая}} + \delta W_{\text{инжекции}} = \frac{\rho+p}{n}\,\delta A.$$

Сформулируем более кратко:

$$\mu = \left(\begin{array}{l}\text{полная масса-энергия на барион, требуемая для}\\ \text{«создания» и инжектирования дополнительного}\\ \text{малого количества жидкости в данную порцию}\\ \text{жидкости без изменения ее } s \text{ или объема}\end{array}\right) =$$

$$\frac{\rho+p}{n} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_s. \qquad (22.8)$$

↑ — согласно первому закону термодинамики (22.6)

Все вышеприведенные законы и уравнения термодинамики одинаковы в искривленном пространстве-времени и в плоском пространстве-времени, в (релятивистском) плоском пространстве-времени и в классической нерелятивистской термодинамике, за исключением того, что в $\rho$ и $\mu$ добавляется масса покоя и все другие формы массы-энергии. Причина этого проста: все законы формулируются в виде скалярных уравнений, связывающих термодинамические переменные, которые измеряются в системе отсчета, покоящейся относительно жидкости.

### Дополнение 22.1. ГЛАВНЫЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ВЫБОРА «ПЕРВИЧНОГО ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА» ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЖИДКОСТИ

| Первичный термодинамический потенциал и величины, которые наиболее целесообразно рассматривать в качестве его аргументов | «Вторичные» термодинамические величины, полученные путем дифференцирования первичных величин с использованием или без использования формулы $d\left(\frac{\rho}{n}\right)+pd\left(\frac{1}{n}\right)-Tds=0$ | Наиболее удобные, целесообразные и уместные условия |
|---|---|---|
| «Плотность», полное количество массы-энергии (покоя + + тепловой + ...) на единицу объема $\rho=\rho\,(n,\ s)$ | $p\,(n,\ s)=n\left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_s-\rho$<br>$T\,(n,\ s)=\frac{1}{n}\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_n$<br>$\mu\,(n,\ s)=\frac{p+\rho}{n}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_s$ | Условия адиабатичности потока (отсутствие ударных волн или теплопроводности), т. е. постоянство $s$ вдоль линии тока |

| | | |
|---|---|---|
| «Физическая свободная энергия» $a(n, T) = \frac{\rho}{n} - Ts$ | $p(n, T) = n^2 \left(\frac{\partial a}{\partial n}\right)_T$<br>$s(n, T) = -\left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_n$<br>$\rho(n, T) = -nT^2 \left[\frac{\partial (a/T)}{\partial T}\right]_n$ | Знание или возможность вычислить $a$ (или «статистическую сумму») как функцию удельного объема на барион и температуры |
| «Химическая свободная энергия» $f(p, T) = \frac{\rho + p}{n} - Ts$ | $1/n(p, T) = (\partial f/\partial p)_T$<br>$s(p, T) = -(\partial f/\partial T)_p$<br>$\rho(p, T) = \frac{f - T(\partial f/\partial T)_p}{(\partial f/\partial p)_T} - p$ | Уместные для определения равновесия по заданным температуре и давлению |
| «Химический потенциал» («энергия инжекции» на барион) $\mu(p, s) = \frac{p + \rho}{n}$ | $1/n(p, s) = (\partial \mu/\partial p)_s$<br>$T(p, s) = (\partial \mu/\partial s)_p$<br>$\rho(p, s) = \frac{(\mu)}{(\partial \mu/\partial p)_s} - p$ | В центре внимания находится энергия инжекции (= ферми-энергия для идеального релятивистского или нерелятивистского ферми-газа, см. упражнение 22.3) |

## § 22.3. ГИДРОДИНАМИКА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ [1]

**Законы гидродинамики для простой жидкости в отсутствие потока тепла или вязкости:**

Рассмотрим течение простой идеальной жидкости в пространстве-времени. Это может быть атмосфера Земли, циркулирующая в гравитационном поле Земли, или внутренняя газовая область Солнца, покоящаяся в собственном гравитационном поле, или межзвездный газ, аккрецирующий на черную дыру. Но что бы ни представляла собой жидкость и где бы она ни находилась, ее движение будет определяться законами термодинамики в искривленном пространстве-времени (§ 22.2) и локальным законом сохранения энергии-импульса $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$. Главная цель данного параграфа — привести уравнение $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ к удобной для приложений форме. Здесь это будет выполнено в абстрактных обозначениях; читателю предлагается повторить приведение в индексных обозначениях.

**1) происхождение законов**

Тензор энергии-импульса идеальной жидкости в искривленном пространстве-времени имеет такой же вид, как и в плоском (принцип эквивалентности!):

$$\mathbf{T} = (\rho + p)\,\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbf{g} \tag{22.9}$$

[1] Более детальные рассмотрения этого предмета можно найти, например, в работах [202, 205—208] и в литературе, приведенной там; см. также работы по кинетической теории, указанные в начале § 22.6.

(см. § 5.5). Его дивергенцию легко вычислить, если воспользоваться цепным правилом, «соотношением совместности между $\mathbf{g}$ и $\nabla$», т. е. $\nabla\mathbf{g} = 0$, тождеством $(\nabla p)\cdot\mathbf{g} = \nabla p$ (которое легко проверяется в индексных обозначениях) и формулой

$$0 = \nabla\cdot\mathbf{T} = [\nabla(\rho+p)\cdot\mathbf{u}]\,\mathbf{u} + [(\rho+p)\nabla\cdot\mathbf{u}]\,\mathbf{u} + [(\rho+p)\mathbf{u}]\cdot\nabla\mathbf{u} +$$
$$\uparrow \text{— дивергенция на первом отверстии}$$
$$+(\nabla p)\cdot\mathbf{g} = [\nabla_{\mathbf{u}}\rho + \nabla_{\mathbf{u}}p + (\rho+p)\nabla\cdot\mathbf{u}]\,\mathbf{u} + (\rho+p)\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} + \nabla p. \tag{22.10}$$

Особенно просто выглядит проекция уравнения (22.10) на 4-скорость (напомним, что $\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}^2 = 0$, поскольку $\mathbf{u}^2 \equiv -1$):

$$0 = \mathbf{u}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{T}) = -[\nabla_{\mathbf{u}}\rho + \nabla_{\mathbf{u}}p + (\rho+p)\nabla\cdot\mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{u}}p =$$
$$= -\nabla_{\mathbf{u}}\rho - (\rho+p)\nabla\cdot\mathbf{u}.$$

Комбинируя это уравнение с законом сохранения барионов (22.3), получаем

2) адиабатичность потока — следствие локального закона сохранения энергии

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{(\rho+p)}{n}\frac{dn}{d\tau}. \tag{22.11a}$$

Уравнение (22.11а), как можно заметить, тождественно первому закону термодинамики (22.6) вдоль линии тока в предположении, что вдоль нее сохраняется энтропия на барион:

$$ds/d\tau = 0. \tag{22.11б}$$

Этот результат неудивителен. Требование термодинамического равновесия и постоянства энтропии есть требование отсутствия теплообмена между элементами жидкости. Но отсутствие теплообмена выявляется из тензора энергии-импульса (22.9). Любой теплообмен проявился бы в $\mathbf{T}$ в виде члена, связанного с потоком энергии (упражнение 22.7), однако такой член отсутствует. Следовательно, когда изучают локальный закон сохранения, вычисляя $\mathbf{u}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{T}) = 0$, тензор энергии-импульса указывает на отсутствие потока тепла, т. е. что $ds/d\tau = 0$.

Остаются три компоненты уравнения $\nabla\cdot\mathbf{T} = 0$, ортогональные 4-скорости жидкости. Их можно получить из $\nabla\cdot\mathbf{T} = 0$, отсекая компоненту, направленную по $\mathbf{u}$, при помощи «проекционного тензора»

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{g} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{u} \tag{22.12}$$

(см. упражнение 22.4). Свертка $\mathbf{P}$ с $\nabla\cdot\mathbf{T} = 0$ [уравнение (22.10)] дает

3) уравнение Эйлера

$$(\rho+p)\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = -\mathbf{P}\cdot(\nabla p) \equiv -[\nabla p + (\nabla_{\mathbf{u}}p)\,\mathbf{u}]. \tag{22.13}$$

Это «*уравнение Эйлера*» релятивистской гидродинамики. Оно имеет точно ту же форму, как и соответствующее уравнение Эйлера

в плоском пространстве-времени:

$$\begin{pmatrix}\text{инертная масса на}\\ \text{единицу объема}\\ \text{[упражнение 5.4]}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{4-ускорение}\\ \text{жидкости}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\text{градиент давления на}\\ \text{3-поверхности, орто-}\\ \text{гональной 4-скорости}\end{pmatrix}. \tag{22.13'}$$

За все отклонение линий тока от геодезических ответствен градиент давления, а не «тяготение».

Приведенные выше законы термодинамики и гидродинамики преобразованы и суммированы в дополнении 22.2.

---

**22.1. Изменения объема, возникающие из-за расходимости линий тока** УПРАЖНЕНИЯ

Выведите уравнение $dV/d\tau = (\nabla \cdot \mathbf{u})\, V$ [уравнение (22.2)] для скорости изменения объема жидкого элемента. [*Указание*: Выберите событие $\mathcal{P}_0$ и проведите вычисление в локально лоренцевой системе отсчета в $\mathcal{P}_0$, которая в данный момент движется с жидкостью («система отсчета, покоящаяся в $\mathcal{P}_0$»).] [*Решение*: В событиях вблизи $\mathcal{P}_0$ обычная скорость жидкости $v^j = dx^j/dt$ очень мала. Следовательно, куб жидкости в $\mathcal{P}_0$ с ребрами $\Delta x = \Delta y = \Delta z = L$ за время $\delta t$ изменит свои ребра на величину

$$\begin{aligned}\delta(\Delta x) &= [(dx/dt)\,\delta t]_{\text{на „передней поверхности"}} - \\ &\quad - [(dx/dt)\,\delta t]_{\text{на „задней поверхности"}} = \\ &= (\partial v^x/\partial x)\, L\delta t, \\ \delta(\Delta y) &= (\partial v^y/\partial y)\, L\delta t, \\ \delta(\Delta z) &= (\partial v^z/\partial z)\, L\,\delta t.\end{aligned}$$

Соответствующее изменение объема есть

$$\delta(\Delta x \Delta y \Delta z) = (\delta v^j/\delta x^j)\, L^3 \delta t,$$

поэтому скорость изменения объема равна

$$\partial V/\partial t = V\,(\partial v^j/\partial x^j).$$

Но в локально лоренцевой системе отсчета в событии $\mathcal{P}_0$ и вблизи него (где $x^\alpha = 0$) метрические коэффициенты равны $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(|x^\alpha|^2)$ и обычная скорость есть $v^j = O(|x^\alpha|)$, поэтому

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{(-g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu)^{1/2}} = 1 + O(|x^\alpha|^2),$$

$$u^j = \frac{dx^j}{d\tau} = v^j + O(|x^\alpha|^3).$$

УПРАЖНЕНИЯ

Таким образом, производные $\partial V/\partial t$ и $V\,(\partial v^j/\partial x^j)$ в $\mathcal{T}_0$ равны

$$\partial V/\partial t = u^\alpha \partial V/\partial x^\alpha = u^\alpha V_{,\alpha} = dV/d\tau =$$
$$= V\,(\partial v^j/\partial x^j) = V\,(\partial u^\alpha/\partial x^\alpha) = V u^\alpha{}_{;\alpha} = V\,(\nabla \cdot \mathbf{u}),$$

что и требовалось доказать.]

[*Замечание*: Работая в плоском пространстве-времени, можно более легко вывести, что $\partial V/\partial t = dV/d\tau$ и $\partial v^j/\partial x^j = \nabla \cdot \mathbf{u}$, и заключить затем, что $dV/d\tau = (\nabla \cdot \mathbf{u})\,V$. Чтобы перевести этот закон в искривленное пространство-время, можно использовать принцип эквивалентности.]

### 22.2. Уравнение непрерывности

Покажите, что в нерелятивистском пределе в плоском пространстве-времени уравнение сохранения барионов (22.3) переходит в «уравнение непрерывности»

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}(n v^j) = 0.$$

### 22.3. Химический потенциал идеального ферми-газа

Покажите, что химический потенциал идеального ферми-газа, релятивистского или нерелятивистского (при нулевой температуре), равен энергии Ферми (энергия самого высокого заполненного импульсного состояния) этого газа.

### 22.4. Проекционные тензоры

Покажите, что свертка касательного вектора $\mathbf{B}$ с «проекционным тензором» $\mathbf{P} = \mathbf{g} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ проектирует $\mathbf{B}$ на 3-поверхность, ортогональную вектору 4-скорости $\mathbf{u}$. [*Указание*: Выполните расчет в ортонормальной системе отсчета с $\mathbf{e}_{\hat{0}} = \mathbf{u}$ и запишите $\mathbf{B} = B^{\hat{\alpha}} \mathbf{e}_{\hat{\alpha}}$; затем покажите, что $\mathbf{P} \cdot \mathbf{B} = B^{\hat{j}} \mathbf{e}_{\hat{j}}$.] Покажите, что если $\mathbf{n}$ — единичный пространственноподобный вектор, то $\mathbf{P} = \mathbf{g} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ есть соответствующий проекционный оператор. *Замечание*: Не существует *однозначного* понятия «проекция, ортогональная нулевому вектору». Почему? [*Указание*: Нарисуйте картины в плоском пространстве-времени, опуская одно пространственное измерение.]

### 22.5. Градиент давления в стационарном гравитационном поле

Пусть идеальная жидкость покоится (линии тока имеют $x^j = \text{const}$) в стационарном гравитационном поле (метрические коэффициенты не зависят от $x^0$). Покажите, что градиент давления, необходимый для «поддержания жидкости под действием тяготения» (т. е. необ-

ходимый, чтобы линии тока были не геодезическими, а линиями $x^j = \text{const}$), есть

$$\frac{\partial p}{\partial x^0} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x^j} = -(\rho + p)\frac{\partial \ln \sqrt{-g_{00}}}{\partial x^j}. \tag{22.14}$$

Вычислите этот градиент давления в ньютоновском пределе, используя систему координат и метрические коэффициенты уравнения (18.15в).

### 22.6. Расширение, вращение и сдвиг

Пусть заданы 4-скорости $\mathbf{u}(\mathscr{P})$ жидкости.

а. Покажите, что $\nabla\mathbf{u}$ можно разложить следующим образом:

$$u_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta P_{\alpha\beta} - a_\alpha u_\beta, \tag{22.15а}$$

где $\mathbf{a}$ — *4-ускорение* жидкости

$$a_\alpha \equiv u_{\alpha;\beta}u^\beta, \tag{22.15б}$$

$\theta$ — *«расширение»* жидких мировых линий

$$\theta \equiv \nabla\cdot\mathbf{u} = u^\alpha{}_{;\alpha}, \tag{22.15в}$$

$P_{\alpha\beta}$ — *проекционный тензор*

$$P_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta, \tag{22.15г}$$

$\sigma_{\alpha\beta}$ — *тензор сдвига* жидкости

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(u_{\alpha;\mu}P^\mu{}_\beta + u_{\beta;\mu}P^\mu{}_\alpha) - \frac{1}{3}\theta P_{\alpha\beta}, \tag{22.15д}$$

$\omega_{\alpha\beta}$ — *вращательная 2-форма* жидкости

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(u_{\alpha;\mu}P^\mu{}_\beta - u_{\beta;\mu}P^\mu{}_\alpha). \tag{22.15е}$$

б. Каждый член этого разложения имеет простую физическую интерпретацию в локальных системах отсчета, покоящихся относительно жидкости. Интерпретация 4-ускорения $\mathbf{a}$ на основе показаний акселерометра, по-видимому, хорошо известна. В упражнении 22.1 показано, что расширение $\theta = \nabla\cdot\mathbf{u}$ описывает скорость увеличения объема жидкого элемента

$$\theta = (1/V)\,(dV/d\tau). \tag{22.15ж}$$

В упражнении 22.4 исследованы свойства проекционного тензора $\mathbf{P}$. Проверьте, что в локально лоренцевой системе отсчета ($g_{\hat\alpha\hat\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, $\Gamma^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta\hat\gamma} = 0$), мгновенно сопутствующей жидкости ($u^{\hat\alpha} = \delta^\alpha{}_0$), $\sigma_{\hat\alpha\hat\beta}$ и $\omega_{\hat\alpha\hat\beta}$ сводятся к классическим (нерелятивистским) тензорам сдвига и вращения жидкости. (О классическом и релятивистском описаниях сдвига и вращения см., например, в книге [207], § 2.4 и 2.5.)

### 22.7. Гидродинамика при наличии вязкости и потока тепла [1])

а. Анализ вязких напряжений в классической (нерелятивистской) жидкости можно найти в § 15 книги Ландау и Лифшица [209]. Выполняя этот анализ в локально лоренцевой системе отсчета, в которой покоится релятивистская жидкость, и обобщая его затем к форме, не зависящей от системы отсчета, покажите, что вклад вязкости в тензор энергии-импульса имеет вид

$$\mathbf{T}^{(\text{вязк})} = -2\eta\boldsymbol{\sigma} - \zeta\theta\mathbf{P}, \tag{22.16а}$$

где $\eta \geqslant 0$ — *«коэффициент динамической вязкости»*, $\zeta \geqslant 0$ — *«коэффициент объемной вязкости»*, $\boldsymbol{\sigma}$ — сдвиг, $\theta$ — расширение, $\mathbf{P}$ — проекционный тензор жидкости.

б. При идеализированном описании потока тепла в жидкости вводится *4-вектор потока тепла* $\mathbf{q}$, имеющий в локальной системе отсчета, в которой жидкость покоится, следующие компоненты:

$$q^{\hat{0}} = 0, \quad q^{\hat{j}} = \begin{pmatrix}\text{энергия, пересекающая в единицу}\\ \text{времени единичную поверхность,}\\ \text{перпендикулярную } \mathbf{e}_{\hat{j}}\end{pmatrix}. \tag{22.16б}$$

Переходя от анализа, выполненного в системе отсчета, в которой жидкость покоится, к анализу на языке, не зависящем от системы отсчета, покажите, что вклад потока тепла в тензор энергии-импульса имеет вид

$$\mathbf{T}^{(\text{тепл})} = \mathbf{u}\otimes\mathbf{q} + \mathbf{q}\otimes\mathbf{u}. \tag{22.16в}$$

Тем самым придете к заключению, что при таком идеализированном описании тензор энергии-импульса вязкой жидкости с теплопроводностью имеет вид

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + (p - \zeta\theta)\,P^{\alpha\beta} - 2\eta\sigma^{\alpha\beta} + q^\alpha u^\beta + u^\alpha q^\beta. \tag{22.16г}$$

в. Пусть 4-вектор энтропии $\mathbf{s}$ определяется выражением

$$\mathbf{s} \equiv ns\mathbf{u} + \mathbf{q}/T. \tag{22.16д}$$

Проводя вычисления в локальной системе отсчета, в которой жидкость покоится, покажите, что

$$\nabla\cdot\mathbf{s} = \begin{pmatrix}\text{скорость увеличения}\\ \text{энтропии в единице}\\ \text{объема}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{скорость, с которой тепло}\\ \text{и жидкость вносят энтро-}\\ \text{пию в единицу объема}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{скорость, с которой энтропия}\\ \text{генерируется в единице объема}\end{pmatrix}. \tag{22.16е}$$

[1]) Упражнение предложено Д. Стюартом.

Тем самым придете к следующей форме *второго закона термодинамики*:

$$\nabla \cdot \mathbf{s} \geqslant 0. \tag{22.16ж}$$

г. Рассчитайте локальный закон сохранения энергии $\mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ для вязкой жидкости с потоком тепла. Комбинируя его с первым законом термодинамики и законом сохранения барионов, получите

$$T \nabla \cdot \mathbf{s} = \zeta \theta^2 + 2\eta \sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} - q^\alpha (T_{,\alpha}/T + a_\alpha). \tag{22.16з}$$

Интерпретируйте каждый член этого уравнения как вклад в генерацию энтропии. (*Пример*: $2\eta\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}$ описывает генерацию энтропии путем вязкого нагревания.) [*Замечание*: Член $q^\alpha a_\alpha$ является релятивистским по происхождению и связан с инерцией потока тепла.]

д. Если принять во внимание инерцию потока тепла, то получится следующее обобщение классического закона теплопроводности [210]:

$$q^\alpha = -\varkappa P^{\alpha\beta} (T_{,\beta} + T a_\beta). \tag{22.16и}$$

Здесь $\varkappa$ — *коэффициент теплопроводности*. Используя это уравнение, покажите, что для жидкости, покоящейся в стационарном гравитационном поле (упражнение 22.5),

$$q_0 = 0, \qquad q_j = -\frac{\varkappa}{\sqrt{-g_{00}}} (T\sqrt{-g_{00}})_{,j}. \tag{22.16к}$$

(Следовательно, тепловое равновесие соответствует не постоянной температуре, а распределению температуры с учетом красного смещения $T\sqrt{-g_{00}} = \text{const}$; см. в [31], стр. 313.) Используйте также идеализированный закон теплопроводности (22.16и) для представления скорости генерации энтропии в виде

$$T \nabla \cdot \mathbf{s} = \zeta \theta^2 + 2\eta \sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} + (\varkappa/T) P^{\alpha\beta} (T_{,\alpha} + T a_\alpha)(T_{,\beta} + T a_\beta) \geqslant 0. \tag{22.16л}$$

(Дополнительные детали о тепловом потоке и обсуждения пределов применимости представленного выше идеализированного описания см., например, в § 4.18 книги [9], а также работы [212—214] и цитируемые в них статьи.)

## Дополнение 22.2. ТЕРМОДИНАМИКА И ГИДРОДИНАМИКА ПРОСТОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

### А. Десять величин, характеризующих жидкость

Все термодинамические потенциалы, измеренные в системе отсчета, покоящейся относительно жидкости:

$n$ — плотность числа барионов,
$\rho$ — плотность полной массы-энергии,
$p$ — давление,
$T$ — температура,
$s$ — энтропия на барион,
$\mu$ — химический потенциал на барион,

и четыре компоненты 4-скорости жидкости.

### Б. Десять уравнений, определяющих движение жидкости

Два *уравнения состояния*

$$p = p\,(n,\ s), \tag{1}$$

$$T = T\,(n,\ s), \tag{2}$$

подчиняющихся условию совместности («соотношение Максвелла», которое следует из первого закона термодинамики)

$$(\partial p/\partial s)_n = n^2\,(\partial T/\partial n)_s.$$

*Первый закон термодинамики*

$$\mathbf{d}\rho = \frac{\rho + p}{n}\,\mathbf{d}n + nT\,\mathbf{d}s; \tag{3}$$

это уравнение можно проинтегрировать и получить $\rho\,(n,\ s)$.

*Уравнение для химического потенциала*

$$\mu = (\rho + p)/n, \tag{4}$$

которое в комбинации с $\rho\,(n,\ s)$ и $p\,(n,\ s)$ дает $\mu\,(n,\ s)$.

*Закон сохранения барионов*

$$dn/d\tau \equiv \mathbf{\nabla}_{\mathbf{u}} n = -n\mathbf{\nabla}\cdot\mathbf{u}. \tag{5}$$

*Уравнение сохранения энергии вдоль линий тока*, которое (в предположении отсутствия обмена энергией между соседними жидкими элементами) означает *«адиабатичность потока»*,

$$ds/d\tau = 0 \text{ (в случае ударных волн } ds/d\tau > 0). \tag{6}$$

(Ударные волны в этой книге не рассматриваются, см. [197—204].)

*Уравнения Эйлера* (три)

$$(\rho + p)\,\mathbf{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = -(\mathbf{g} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{\nabla}p, \tag{7}$$

определяющие линии тока с касательным вектором $\mathbf{u}$.

*Нормировка 4-скорости*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1. \tag{8}$$

## § 22.4. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ [1])

Электрическое и магнитное поля

В локально лоренцевой системе отсчета при наличии тяготения наблюдатель может измерить *электрическое* поле $E$ и *магнитное* поле $B$, используя обычный закон движения заряженных частиц под действием силы Лоренца. Как и в специальной теории относительности, он может считать $E$ и $B$ компонентами тензора электромагнитного поля:

$$F^{\hat{0}\hat{j}} = -F^{\hat{j}\hat{0}} = E^{\hat{j}}, \quad F^{\hat{j}\hat{k}} = \varepsilon^{\hat{j}\hat{k}\hat{\ell}} B^{\hat{\ell}},$$

а плотности тока и заряда — компонентами 4-вектора $J^{\hat{\alpha}}$. Далее он может записать уравнения Максвелла и уравнение движения под действием силы Лоренца в том виде, в котором они фигурируют в специальной теории относительности:

$$F^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{}_{,\hat{\beta}} = 4\pi J^{\hat{\alpha}}, \quad F_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}} + F_{\hat{\beta}\hat{\gamma},\hat{\alpha}} + F_{\hat{\gamma}\hat{\alpha},\hat{\beta}} = 0,$$

$$m a^{\hat{\alpha}} = F^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} q u_{\hat{\beta}},$$

где $m$ — масса частицы, $q$ — заряд, $u^{\hat{\alpha}}$ — 4-скорость, $a^{\hat{\alpha}}$ — 4-ускорение. Чтобы записать эти уравнения в произвольной системе отсчета, достаточно заменить запятые на точки с запятой

Уравнения Максвелла и уравнение движения под действием силы Лоренца

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 4\pi J^{\alpha}, \tag{22.17а}$$

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0, \tag{22.17б}$$

$$m a^{\alpha} = F^{\alpha\beta} q u_{\beta}. \tag{22.17в}$$

*Уравнения (22.17а) — (22.17в) представляют собой основные уравнения электродинамики при наличии тяготения. Из них следует все остальное.* Например, как в специальной теории относительности, так и здесь (упражнение 22.9) из них следует закон сохранения заряда

Сохранение заряда

$$J^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0, \tag{22.18а}$$

а для электромагнитного поля, взаимодействующего с заряженным веществом (упражнение 22.10),— равенство нулю дивергенции от суммы тензоров энергии-импульса

Локальное сохранение энергии-импульса

$$(T^{(EM)\alpha\beta} + T^{(\text{вещества})\alpha\beta})_{;\beta} = 0. \tag{22.18б}$$

Так же как в специальной теории относительности, здесь можно ввести векторный потенциал $A^{\mu}$. Заменяя запятые на точки с запятой в известном из специальной теории относительности выражении для $F^{\mu\nu}$ через $A^{\mu}$, получаем

Векторный потенциал

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}. \tag{22.19а}$$

---

[1]) Предельно ясное изложение этого вопроса можно найти в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [2].— *Прим. ред.*

Если все правильно, то выражение (22.19а) должно обеспечивать (как и в специальной теории относительности) автоматическую справедливость уравнений Максвелла (22.17б). Этот факт доказан в упражнении 22.8. Чтобы получить волновое уравнение для векторного потенциала, подставим выражение (22.19а) в оставшиеся уравнения Максвелла (22.17а), тогда найдем

$$-A^{\alpha;\beta}{}_{\beta} + A^{\beta;\alpha}{}_{\beta} = 4\pi J^{\alpha}. \qquad (22.19б)$$

Затем переставим, используя тождество (16.6в), ковариантные производные в первом члене; в результате получим

$$-A^{\alpha;\,\mu}{}_{\mu} + A^{\mu}{}_{;\mu}{}^{;\alpha} + R^{\alpha}{}_{\mu}A^{\mu} = 4\pi J^{\alpha}. \qquad (22.19б')$$

Наконец, применяя стандартный подход специальной теории относительности, наложим калибровочное условие Лоренца

Калибровочное условие Лоренца

$$A^{\mu}{}_{;\mu} = 0, \qquad (22.19в)$$

приводя тем самым волновое уравнение (22.19б') к виду

Волновое уравнение для векторного потенциала

$$(\Delta_{dR}A)^{\alpha} \equiv -A^{\alpha;\beta}{}_{\beta} + R^{\alpha}_{\ \beta}A^{\beta} = 4\pi J^{\alpha}. \qquad (22.19г)$$

Появившийся здесь «векторный волновой оператор де Рама» $\Delta$ представляет собой с точностью до знака обобщенный даламбертиан для векторов в искривленном пространстве-времени. С точки зрения математики он является более мощным, чем $-A^{\alpha;\beta}{}_{;\beta}$ и чем любой другой оператор, сводящийся к (минус) даламбертиану в специальной теории относительности. (Обсуждение см. в работе [215].)

Хотя все уравнения электродинамики (22.17а)—(22.19б) получены из специальной теории относительности с помощью правила «запятая переходит в точку с запятой», при выводе волнового уравнения (22.19г) для векторного потенциала использовались члены, пропорциональные кривизне; (см. дополнение 16.1). Тем не менее в плоском пространстве-времени ($R^{\alpha}{}_{\beta} = 0$) уравнение (22.19г) должно сводиться к обычному волновому уравнению специальной теории относительности.

---

УПРАЖНЕНИЯ

### 22.8. Электродинамический векторный потенциал

Покажите, что в любой системе координат коэффициенты связности в уравнениях (22.19а) и (22.17б) сокращаются, поэтому последние можно записать в виде

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}, \qquad (22.20а)$$

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0. \qquad (22.20б)$$

(Уравнения (22.20а) и (22.20б) можно представить на языке дифференциальных форм: $\mathbf{F} = \mathbf{dA}$, $\mathbf{dF} = 0$.) Используя затем этот вид уравнений, покажите, что из уравнения (22.19а) следует уравнение (22.17б), как утверждалось в тексте.

## 2 УПРАЖНЕНИЯ

### 22.9. Закон сохранения заряда при наличии тяготения

Покажите, что из уравнений Максвелла (22.17а) и (22.17б), как и в специальной теории относительности, при наличии тяготения следует закон сохранения заряда (22.18а). [*Указания*: Используйте антисимметрию $F^{\alpha\beta}$; остерегайтесь неперестановочности ковариантных производных, с которыми приходится иметь дело при применении уравнения (16.6). Иначе говоря, покажите, что в произвольной системе координат уравнение (22.17а) можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\sqrt{|g|}\,F^{\alpha\beta}\right)=4\pi J^\alpha, \qquad (22.17а')$$

а (22.18а) — в виде

$$J^\alpha{}_{;\alpha}\equiv\frac{1}{\sqrt{|q|}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{|g|}\,J^\alpha\right)=0, \qquad (22.18а')$$

и продемонстрируйте это в какой-нибудь системе координат.]

### 22.10. Электромагнитное поле, взаимодействующее заряженным веществом

Так же как в специальной теории относительности, при наличии тяготения («принцип эквивалентности») тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет вид

$$T^{(EM)}{}_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{\alpha\mu}F_\beta{}^\mu-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\right). \qquad (22.21)$$

Используя уравнения Максвелла (22.17а) и (22.17б) при наличии тяготения, покажите, что

$$T^{(EM)\alpha\beta}{}_{;\beta}=-F^{\alpha\beta}J_\beta. \qquad (22.22)$$

Но $F^{\alpha\beta}J_\beta$ — это как раз приходящаяся на единицу объема лоренцева 4-сила, с которой электромагнитное поле действует на заряженное вещество [см. уравнение движения под действием силы Лоренца (22.17в), а также уравнение (5.43)], т. е. дивергенция тензора энергии-импульса вещества, $T^{(\text{вещества})\alpha\beta}{}_{;\beta}$. Следовательно, вышеприведенное уравнение можно переписать в виде (22.18б).

---

## § 22.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ [1])

Радиоволны от квазара 3С279 проходят вблизи Солнца и отклоняются его гравитационным полем. Световые лучи, испущенные

[1]) Этот параграф частично основан на заметках, приготовленных Вильямом Бурке в Калтехе в 1968 г. Более детальные рассмотрения геометрической оптики в искривленном пространстве см., например, в работах [216—218] и в работах, обсуждаемых и перечисленных в § 41.11.

в далеком прошлом удаленными новорожденными галактиками, распространяются в космологически искривленном пространстве-времени Вселенной, фокусируются (и испытывают красное смещение), давая увеличенные из-за наличия кривизны (но слабые) изображения галактик на земном небе.

В этих и большинстве других примеров распространение света и радиоволн подчиняется законам геометрической оптики. Последние выводятся в данном параграфе в искривленном пространстве-времени из уравнений Максвелла.

**Общие замечания по геометрической оптике**

Перечислим основные законы геометрической оптики: 1) световые лучи являются нулевыми геодезическими, 2) вектор поляризации перпендикулярен лучам и переносится параллельно вдоль лучей и 3) амплитуда определяется адиабатическим инвариантом, который, согласно квантовой терминологии, утверждает, что число фотонов сохраняется.

**Условия справедливости геометрической оптики**

Условия, при которых справедливы эти законы, определяются условиями, налагаемыми на три длины: 1) на характерную приведенную длину волн

$$\lambda\!\!\!^{-} \equiv \frac{\lambda}{2\pi} = \left(\begin{array}{l}\text{классическое расстояние ближай-}\\ \text{шего подхода для фотона с еди-}\\ \text{ничным моментом импульса}\end{array}\right), \qquad (22.23а)$$

измеренную в типичной локально лоренцевой системе отсчета (например, в системе отсчета, покоящейся относительно ближайших галактик); 2) на характерную длину $\mathscr{L}$ — масштаб изменения амплитуды, поляризации и длины волны, например, имеется в виду, радиус кривизны волнового фронта или длина волнового пакета, испущенного при внезапной вспышке в квазаре; 3) на характерный радиус кривизны $\mathscr{R}$ пространства-времени, в котором распространяются волны

$$\mathscr{R} \equiv \left|\begin{array}{l}\text{типичная компонента тензора Римана,}\\ \text{измеренная в типичной локально ло-}\\ \text{ренцевой системе отсчета}\end{array}\right|^{-1/2}. \qquad (22.23б)$$

**«Двухмасштабное» разложение, лежащее в основе геометрической оптики**

Геометрическая оптика справедлива, если только приведенная длина волны значительно короче каждой из двух других длин (иначе говоря, масштабов):

$$\lambda\!\!\!^{-} \ll \mathscr{L} \text{ и } \lambda\!\!\!^{-} \ll \mathscr{R}, \qquad (22.23в)$$

поэтому волны можно рассматривать *локально* как плоские волны, распространяющиеся в пространстве-времени с пренебрежимо малой кривизной.

Условие справедливости геометрической оптики (22.23в) используется следующим образом. Сосредоточим внимание на рассмотрении волн, высокомонохроматичных в областях $\gtrsim \mathscr{L}$. (Более сложные спектры можно проанализировать методом суперпозиции, т. е. с помощью анализа Фурье.) Выделим в векторном

потенциале электромагнитной теории быстро меняющуюся действительную фазу

$$\theta \sim (\text{масштаб распространения})/\lambda$$

и медленно меняющуюся комплексную амплитуду (т. е. имеющую действительную и мнимую части)

$$\mathbf{A} = \text{действительная часть}\{\text{амплитуда} \times e^{i\theta}\} \equiv$$
$$\equiv \Re\{\text{амплитуда} \times e^{i\theta}\}.$$

Представим себе, что масштаб изменения амплитуды $\mathscr{L}$ и масштаб кривизны пространства-времени $\mathscr{R}$ удерживаются фиксированными, в то время как приведенная длина волны $\lambda$ делается короче и короче. Тогда фаза в любом заданном событии в пространстве-времени будет становиться все больше и больше ($\theta \sim 1/\lambda$), однако амплитуда как функция положения в пространстве-времени может оставаться фактически неизменной

$$\text{амплитуда} = \begin{bmatrix}\text{главная часть, не}\\ \text{зависящая от } \lambda\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{малые поправки (отклонения от геометрической оптики), обусловленные конечностью длины волны}\end{bmatrix}.$$

Это обстоятельство позволяет разложить амплитуду в ряд по степеням $\lambda$ [1])

$$\text{амплитуда} = \underset{\text{не зависит от } \lambda}{\mathbf{a}} + \underset{\sim\lambda}{\mathbf{b}} + \underset{\sim\lambda^2}{\mathbf{c}} + \ldots .$$

В действительности разложение проводится по степеням безразмерного числа

$$\lambda/(\text{минимальная из длин } \mathscr{L} \text{ и } \mathscr{R}) \equiv \lambda/L. \qquad (22.24)$$

Математики называют его «двухмасштабным разложением», см., например, [219]. Базисное коротковолновое приближение имеет долгую историю, см., например, [220, 221]. Следуя предложению Дебая, Зоммерфельд и Рунге [222] применили его к уравнениям Максвелла. В квантовой механике оно известно как ВКБ приближение и имеет много других приложений, указанных в библиографии в работе [223]. Вклад членов высшего порядка рассматривали Клейн [224] и Люис [225], см. специально книгу [226].

Полезно ввести параметр $\varepsilon$, который позволяет проследить, как быстро различные члены стремятся к нулю (или к бесконечности) при приближении $\lambda/L$ к нулю:

$$A_\mu = \Re\{(a_\mu + \varepsilon b_\mu + \varepsilon^2 c_\mu + \ldots)\, e^{i\theta/\varepsilon}\}. \qquad (22.25)$$

**Векторный потенциал в геометрической оптике**

[1]) Уравнения для $\mathbf{A}$ линейны. Следовательно, с таким же основанием анализ можно продолжить, предположив (вместо независимости амплитуды от $\lambda$), что главный член $\mathbf{a} \sim \lambda^n$, а $\mathbf{b} \sim \lambda^{n+1}$, $\mathbf{c} \sim \lambda^{n+2}$ и т. д. Результаты не зависят от $n$. Выбирая $n = 1$, получаем, что напряженности поля $F_{\mu\nu}$ и плотности энергии $T_{\mu\nu} \sim F^2 \sim A^2/\lambda^2 \sim \text{const}$ при $\lambda \to 0$.

Любой член, перед которым стоит коэффициент $\varepsilon^n$, изменяется как $(\lambda/L)^n$ в пределе очень малых длин волн [$\theta \sim (\lambda/L)^{-1}$; $c_\mu \sim (\lambda/L)^2$ и т. д.]. По условию $\varepsilon$ представляет собой немой параметр разложения, который в конце расчета полагается равным 1, поэтому когда он перестает быть полезным, его можно опустить. И по условию все «поправки геометрической оптики» вносятся в амплитудные члены $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, . . ., а не в фазу $\theta$.

Заметим, что, в то время как фаза $\theta$, являющаяся функцией положения в пространстве-времени, действительна, амплитуда и, следовательно, векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ комплексны. Например, чтобы описать монохроматические волны с правой круговой поляризацией, распространяющиеся в направлении $z$, можно положить $\theta = \omega(z - t)$ и $\mathbf{a} = 1/\sqrt{2}\,a\,(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)$, где $a$ — действительная величина, поэтому

$$\mathbf{A} = \Re\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\,a\,(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)\,e^{i\omega(z-t)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,a\,\{\cos[\omega(z-t)]\,\mathbf{e}_x - \sin[\omega(z-t)]\,\mathbf{e}_y\}.$$

Предполагаемый вид (22.25) векторного потенциала — математическая основа геометрической оптики. Подставляя этот векторный потенциал в волновое уравнение без источников $\Delta\mathbf{A} = 0$ [уравнение (22.19г)] и в калибровочное условие Лоренца $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ [уравнение (22.19в)], получаем все основные уравнения геометрической оптики.

**Основные понятия геометрической оптики:**

Эти уравнения принимают простейший вид, если только входящие в них члены выразить через следующие величины:

**1) волновой вектор**

$$\text{«волновой вектор»}\ \mathbf{k} \equiv \nabla\theta, \tag{22.26а}$$

**2) скалярная амплитуда**

$$\text{«скалярную амплитуду»}\ a \equiv (\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}})^{1/2} = (a^\mu \bar{a}_\mu)^{1/2}, \tag{22.26б}$$

**3) вектор поляризации**

$$\text{«вектор поляризации»}\ \mathbf{f} \equiv \mathbf{a}/a = \text{«единичный комплексный вектор, направленный вдоль } \mathbf{a}\text{»}. \tag{22.26в}$$

(Здесь $\bar{\mathbf{a}}$ — вектор, комплексно сопряженный $\mathbf{a}$.)

**4) световые лучи**

*Световые лучи* определяются как кривые $\mathcal{P}(\lambda)$, нормальные к поверхностям постоянной фазы $\theta$. Поскольку вектор $\mathbf{k} \equiv \nabla\theta$ нормален к этим поверхностям, дифференциальное уравнение для светового луча имеет вид

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = k^\mu(x) = g^{\mu\nu}(x)\,\theta_{,\nu}(x). \tag{22.26г}$$

В дополнении 22.3, посвященном исследованию этого вопроса, представлены вектор поляризации, волновой вектор, поверхности постоянной фазы и световые лучи распространяющейся волны; не представленная там скалярная амплитуда просто означает

величину векторной амплитуды **a**. Разъяснение смысла комплексного вектора поляризации, если он не известен из электродинамики, можно найти далее в упражнении 22.12.

Это все, что касается оснований. Перейдем теперь к вычислениям. Подставим сначала векторный потенциал геометрической оптики (22.25) в калибровочное условие Лоренца:

Вывод законов геометрической оптики

$$0 = A^{\mu}{}_{;\mu} = \Re\left\{\left[\frac{i}{\varepsilon}k_{\mu}(a^{\mu}+\varepsilon b^{\mu}+\ldots)+(a^{\mu}+\varepsilon b^{\mu}+\ldots)_{;\mu}\right]e^{i\theta/\varepsilon}\right\}. \tag{22.27}$$

Главный член (имеющий порядок $1/\varepsilon$) дает

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{a} = 0 \quad (\textit{амплитуда перпендикулярна волновому вектору}), \tag{22.28}$$

или, эквивалентно,

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{f} = 0 \quad (\textit{вектор поляризации перпендикулярен волновому вектору}). \tag{22.28'}$$

Нарушение этого условия ортогональности постчленами геометрической оптики определяется членами высшего порядка [$O(1)$, $O(\varepsilon)$, $O(\varepsilon^2)$, ...], присутствующими в калибровочном условии (22.27); например, члены порядка $O(1)$ дают

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{b} = i\nabla\cdot\mathbf{a}.$$

Подставим затем векторный потенциал (22.25) в волновое уравнение без источников (22.19г):

$$0 = (\Delta_{dR}\mathbf{A})^{\alpha} = -A^{\alpha;\,\beta}{}_{\beta} + R^{\alpha}{}_{\beta}A^{\beta} =$$
$$= \Re\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon^2}k^{\beta}k_{\beta}(a^{\alpha}+\varepsilon b^{\alpha}+\varepsilon^2 c^{\alpha}+\ldots)-2\frac{i}{\varepsilon}k^{\beta}(a^{\alpha}+\varepsilon b^{\alpha}+\ldots)_{;\beta}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{i}{\varepsilon}k^{\beta}{}_{;\beta}(a^{\alpha}+\varepsilon b^{\alpha}+\ldots)-(a^{\alpha}+\ldots)^{;\beta}{}_{\beta}+R^{\alpha}{}_{\beta}(a^{\beta}+\ldots)\right]e^{i\theta/\varepsilon}\right\}. \tag{22.29}$$

Соберем члены порядка $1/\varepsilon^2$ и $1/\varepsilon$ (члены более высокого порядка, чем $1/\varepsilon$, определяют псевдопоправки геометрической оптики):

$$O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right): \qquad k^{\beta}k_{\beta}a^{\alpha} = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 0 \quad (\textit{волновой вектор равен нулю}); \tag{22.30}$$

$$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right): \qquad \underbrace{k^{\beta}k_{\beta}}_{=0}b^{\alpha} - 2i\left(k^{\beta}a^{\alpha}{}_{;\beta}+\frac{1}{2}k^{\beta}{}_{;\beta}a^{\alpha}\right) = 0$$

$$\rightarrow \nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{a} = -\frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{k})\mathbf{a} \quad (\textit{уравнение распространения для векторной амплитуды}). \tag{22.31}$$

Уравнения (22.30) и (22.31) совместно с уравнением (22.28) представляют собой основу, позволяющую получить все последующие результаты. В качестве первого следствия из (22.30) можно найти уравнение геодезических. Образуем градиент от $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=0$,

$$0=(k^\beta k_\beta)_{;\alpha}=2k^\beta k_{\beta;\alpha},$$

и, используя тот факт, что $k_\beta\equiv\theta_{,\beta}$ — градиент *скаляра*, переставим индексы, $\theta_{;\beta\alpha}=\theta_{;\alpha\beta}$ или

$$0=k^\beta k_{\beta;\alpha}=k^\beta k_{\alpha;\beta}.$$

**Основные законы геометрической оптики:**

В результате получим

$$\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{k}=0 \quad \textit{(уравнение распространения для волнового вектора)}. \tag{22.32}$$

Заметим, что это уравнение геодезических! Будучи скомбинированным с уравнением (22.30), оно представляет собой утверждение, выведенное из уравнений Максвелла в искривленном пространстве-времени: *световые лучи являются нулевыми геодезическими*. Это первый из основных результатов геометрической оптики.

**1) световые лучи являются нулевыми геодезическими**

Обратимся теперь от вектора распространения $\mathbf{k}=\nabla\theta$ к амплитуде волны $\mathbf{a}=a\mathbf{f}$ и получим отдельные уравнения для скалярной амплитуды $a$ и вектора поляризации $\mathbf{f}$. Используя уравнение (22.31), находим

$$2a\,\partial_{\mathbf{k}}a=2a\nabla_{\mathbf{k}}a=\nabla_{\mathbf{k}}a^2=\nabla_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}})=\bar{\mathbf{a}}\cdot\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{a}+$$

$$+\mathbf{a}\cdot\nabla_{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{a}}=-\frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{k})(\bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}})=-a^2\nabla\cdot\mathbf{k};$$

поэтому

$$\partial_{\mathbf{k}}a=-\frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{k})\,a \quad \textit{(уравнение распространения для скалярной амплитуды)}. \tag{22.33}$$

Подставляя затем $\mathbf{a}=a\mathbf{f}$ в уравнение (22.31), получаем

$$0=\nabla_{\mathbf{k}}(a\mathbf{f})+\frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{k})\,a\mathbf{f}=a\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{f}+\mathbf{f}\left[\nabla_{\mathbf{k}}a+\frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{k})\,a\right]=a\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{f},$$

или

$$\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{f}=0 \quad \textit{(уравнение распространения для вектора поляризации)}. \tag{22.34}$$

**2) вектор поляризации перпендикулярен лучу и переносится параллельно лучу**

Это уравнение совместно с уравнением (22.28′) составляет второй основной результат геометрической оптики: *вектор поляризации перпендикулярен лучу и переносится параллельно лучу*. Теперь можно видеть, что эти результаты, выведенные из уравнений (22.30) и (22.31), совместимы с калибровочным условием (22.28). Векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{f}$, заданные в одной точке, фиксируются уравнениями распространения вдоль всего луча. Но поскольку оба уравнения

распространения представляют собой законы параллельного переноса, то условия $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=0$, $\mathbf{f}\cdot\bar{\mathbf{f}}=1$ и $\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}=0$, наложенные однажды на векторы в одной точке, будут справедливы вдоль всего луча.

Уравнение (22.33) для скалярной амплитуды можно переформулировать в виде закона сохранения. Поскольку $\partial_{\mathbf{k}}\equiv(\mathbf{k}\cdot\nabla)$, то это уравнение переписывается в виде $(\mathbf{k}\cdot\nabla)\,a^2+a^2\nabla\cdot\mathbf{k}=0$, или

$$\nabla\cdot(a^2\mathbf{k})=0. \tag{22.35}$$

3) сохранение «числа фотонов»

Следовательно, вектор $a^2\mathbf{k}$ представляет собой «сохраняющий ток», а интеграл $\int a^2\mathbf{k}^\mu d^3\Sigma_\mu$ имеет определенное неизменное значение для каждого 3-объема, вырезаемого данной трубкой световых лучей. (Трубка должна быть образована лучами таким образом, чтобы интеграл от $a^2\mathbf{k}$ по стенкам трубки обращался в нуль.) Какая величина сохраняется? Оставаясь в рамках чисто классической физики, можно было бы сказать, что сохраняется «число световых лучей», и назвать $a^2k^0$ «плотностью световых лучей» на гиперповерхности $x^0$=const. Но надлежащий принцип соответствия и более конкретная физическая интерпретация показывают, что предпочтительней назвать уравнение (22.35) *законом сохранения числа фотонов*. Это третий основной результат геометрической оптики. Число фотонов, конечно, сохраняется не всегда, это адиабатический инвариант, величина, которая не изменяется при воздействиях (например, пространственно-временно́й кривизны $\sim 1/\mathscr{R}^2$), изменяющихся медленно ($\mathscr{R}\gg\lambda$) по сравнению с частотой фотона.

В дополнении 22.4 суммируются вышеприведенные уравнения геометрической оптики наряду с другими уравнениями, выведенными в упражнениях.

---

### 22.11. Электромагнитное поле и тензор энергии-импульса

УПРАЖНЕНИЯ

Выведите уравнения для $\mathbf{F}$, $E$, $B$ и $\mathbf{T}$, приведенные в п. Г дополнения 22.4.

### 22.12. Поляризация

В событии $\mathscr{P}_0$, через которое проходят волны, описываемые геометрической оптикой, введите локально лоренцеву систему отсчета с осью $z$ вдоль направления распространения. В таком случае $\mathbf{k}=\omega(\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_z)$. Поскольку вектор поляризации ортогонален $\mathbf{k}$, то $\mathbf{f}=f^0(\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_z)+f^1\mathbf{e}_x+f^2\mathbf{e}_y$, а поскольку $\mathbf{f}\cdot\bar{\mathbf{f}}=1$, то $|f^1|^2+|f^2|^2=1$.

а. Покажите, что компонента $f^0$ вектора поляризации не влияет на электрическое и магнитное поля, измеренные в данной системе отсчета, т. е. покажите, что, не оказывая никакого влияния на физические измерения, можно добавить к $\mathbf{f}$ величину, кратную $\mathbf{k}$.

УПРАЖНЕНИЯ

б. Покажите, что следующие векторы поляризации соответствуют указанным для них типам поляризации:

$\mathbf{f} = \mathbf{e}_x$ — линейная поляризация в направлении $x$;

$\mathbf{f} = \mathbf{e}_y$ — линейная поляризация в направлении $y$;

$\mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)$ — правая круговая поляризация;

$\mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)$ — левая круговая поляризация;

$\mathbf{f} = \alpha\mathbf{e}_x + i(1-\alpha^2)^{1/2}\mathbf{e}_y$ — левая эллиптическая поляризация.

в. Покажите, что тип поляризации (линейная, круговая, эллиптическая с данным эксцентриситетом эллипса) одинаков в любой локально лоренцевой системе отсчета для любого события на данном луче. [*Указание*: Воспользуйтесь изображениями и абстрактными расчетами, а не преобразованиями Лоренца и вычислениями компонент.]

### 22.13. Площадь пучка лучей

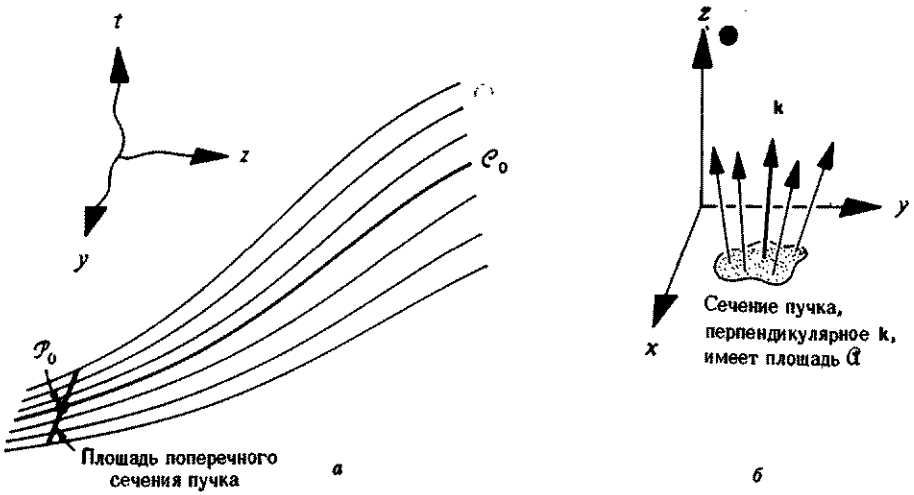
Запишите уравнение (22.31) в системе координат, в которой одна из координат выбрана за фазу $x^0 = \theta$ (запаздывающая временная координата).

а. Покажите, что $g^{00} = 0$ и в уравнении (22.33) не появляется производных $\partial/\partial\theta$, поэтому распространение $a$ можно описать в пределах одной гиперповерхности $\theta = \text{const}$.

б. Выполните следующее построение (фиг. 22.1). Выберите луч $\mathscr{C}_0$, вдоль которого должна распространяться амплитуда $a$. Выберите пучок лучей с двумерным поперечным сечением так, чтобы все лучи 1) лежали на той же поверхности постоянной фазы, что и $\mathscr{C}_0$, и 2) окружали $\mathscr{C}_0$. (Поверхность трехмерна, поэтому любой заполняющий ее пучок имеет двумерное поперечное сечение.) Измерьте площадь поперечного сечения пучка $\mathscr{A}$ в любом событии $\mathscr{P}_0$ в любой локально лоренцевой системе отсчета на «сечении одновременности» $x^0 = \text{const}$. (*Замечание*: Измеренная площадь перпендикулярна $\boldsymbol{k}$ в трехмерном евклидовом смысле; ее можно представить себе как область, мгновенно занимаемую группой фотонов, распространяющихся «бок о бок» вдоль этой области в направлении $\boldsymbol{k}$.) Покажите, что площадь $\mathscr{A}$ в данном событии $\mathscr{P}_0$ *не зависит от того, какая лоренцева система отсчета используется для ее измерения, однако площадь изменяется от точки к точке вдоль луча* $\mathscr{C}_0$ *в результате расходимости или сходимости лучей друг относительно друга*:

$$\partial_{\mathbf{k}}\mathscr{A} = (\nabla\cdot\mathbf{k})\,\mathscr{A}. \tag{22.36}$$

Затем покажите, что величина $\mathscr{A}a^2$ везде по лучу $\mathscr{C}_0$ остается постоянной («сохранение потока фотонов»). [*Указания*: 1) Любой вектор $\boldsymbol{\xi}$, соединяющий соседние лучи в пучке, перпендикулярен $\mathbf{k}$, поскольку $\boldsymbol{\xi}$ лежит на поверхности $\theta = \text{const}$ и $\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi} =$




ФИГ. 22.1.
Геометрическая оптика для пучка лучей с двумерным поперечным сечением, лежащим на поверхности постоянной фазы $\theta = \text{const}$. *а* — пучок, окружающий центральный луч $\mathscr{C}_0$, на пространственно-временной диаграмме с одним опущенным пространственным размером. *б* — пучок на сечении одновременности, проведенном в локально лоренцевой системе отсчета через событие $\mathscr{P}_0$. Сечение пучка превращает каждый луч в «фотон», поэтому пучок становится двумерной поверхностью, заполненной фотонами. Площадь $\mathscr{A}$ этой заполненной фотонами поверхности подчиняется следующим законам (см. упражнения 22.13 и 22.14): 1) $\mathscr{A}$ не зависит от выбора лоренцевой системы отсчета, а зависит только от положения $\mathscr{P}_0$ на луче $\mathscr{C}_0$. 2) Амплитуда волн $a$ удовлетворяет соотношению

$$\mathscr{A}a^2 = \text{const вдоль луча } \mathscr{C}_0$$

(*«сохранение потока фотонов»*). 3) $\mathscr{A}$ подчиняется *«уравнению распространения»* (22.36).

$= \langle \tilde{\mathbf{k}}, \boldsymbol{\xi} \rangle = \langle \mathbf{d}\theta, \boldsymbol{\xi} \rangle =$ (изменение $\theta$ вдоль $\boldsymbol{\xi}$) $= 0$. 2) Рассмотрите для простоты пучок с прямоугольным поперечным сечением, который наблюдается в данном событии $\mathscr{P}_0$ в определенной локально лоренцевой системе отсчета [$\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ — граничные векторы, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ (границы перпендикулярны), $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_0 = 0$ (границы находятся на поверхности постоянного времени) и $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{k} = 0$ (граничные векторы соединяют соседние лучи в пучке)]. Покажите графически, что в данном событии $\mathscr{P}_0$ в любой другой локально лоренцевой системе отсчета граничные векторы равны $\mathbf{v}' = \mathbf{v} \cdot \alpha\mathbf{k}$ и $\mathbf{w}' = \mathbf{w} + \beta\mathbf{k}$, где $\alpha$ и $\beta$ — некоторые числа. Сделайте вывод, что в данном событии $\mathscr{P}_0$ во всех лоренцевых системах отсчета поперечное сечение имеет тождественную форму и тождественную площадь и перпендикулярно направлению распространения ($k \cdot v = k \cdot w = 0$). 3) Путем вычисления в локально лоренцевой системе отсчета покажите, что $\partial_{\mathbf{k}}\mathscr{A} = (\nabla \cdot \mathbf{k})\mathscr{A}$. 4) Исходя из соотношения $\partial_{\mathbf{k}} a = -\frac{1}{2}(\nabla \cdot \mathbf{k})\, a$, сделайте вывод, что $\partial_{\mathbf{k}}(\mathscr{A}a^2) = 0$.]

УПРАЖНЕНИЯ

### 22.14. Теорема фокусировки

Площадь поперечного сечения $\mathcal{A}$ пучка лучей, лежащих на одной и той же поверхности постоянной фазы, изменяется вдоль центрального луча пучка со скоростью (22.36) (см. фиг. 22.1).

а. Выведите следующее уравнение (*«уравнение фокусировки»*) для второй производной от $\mathcal{A}^{1/2}$:

$$\frac{d^2\mathcal{A}^{1/2}}{d\lambda^2} = -\left(|\sigma|^2 + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta\right)\mathcal{A}^{1/2}, \tag{22.37}$$

где $\lambda$ — аффинный параметр вдоль центрального луча ($\mathbf{k} = d/d\lambda$), а «величина сдвига лучей» $|\sigma|$ определяется уравнением

$$|\sigma|^2 \equiv \frac{1}{2}k_{\alpha;\,\beta}k^{\alpha;\,\beta} - \frac{1}{4}(k^\mu{}_{;\mu})^2. \tag{22.38}$$

[*Указание*: Это энергичное упражнение по манипуляции индексов. Ключевыми уравнениями, необходимыми для манипулирования, являются следующие: $\mathcal{A}_{,\alpha}k^\alpha = (k^\alpha{}_{;\alpha})\mathcal{A}$ [уравнение (22.36)]; $k^\alpha{}_{;\beta}k^\beta = 0$ [уравнение геодезических для лучей (22.32)]; $k_{\alpha;\beta} = k_{\beta;\alpha}$ [уравнение, следующее из $k_\alpha \equiv \theta_{,\alpha}$]; правило (16.6в) для перестановки ковариантных производных от вектора.]

б. Покажите, что в начале локально лоренцевой системы отсчета, где $\mathbf{k} = \omega(\mathbf{e}_t + \mathbf{e}_z)$

$$|\sigma|^2 = \frac{1}{4}(k_{x,\,x} - k_{y,\,y})^2 + (k_{x,\,y})^2. \tag{22.39}$$

Таким образом, для $|\sigma|^2$ получаем неотрицательное значение, что оправдывает использование знака абсолютной величины.

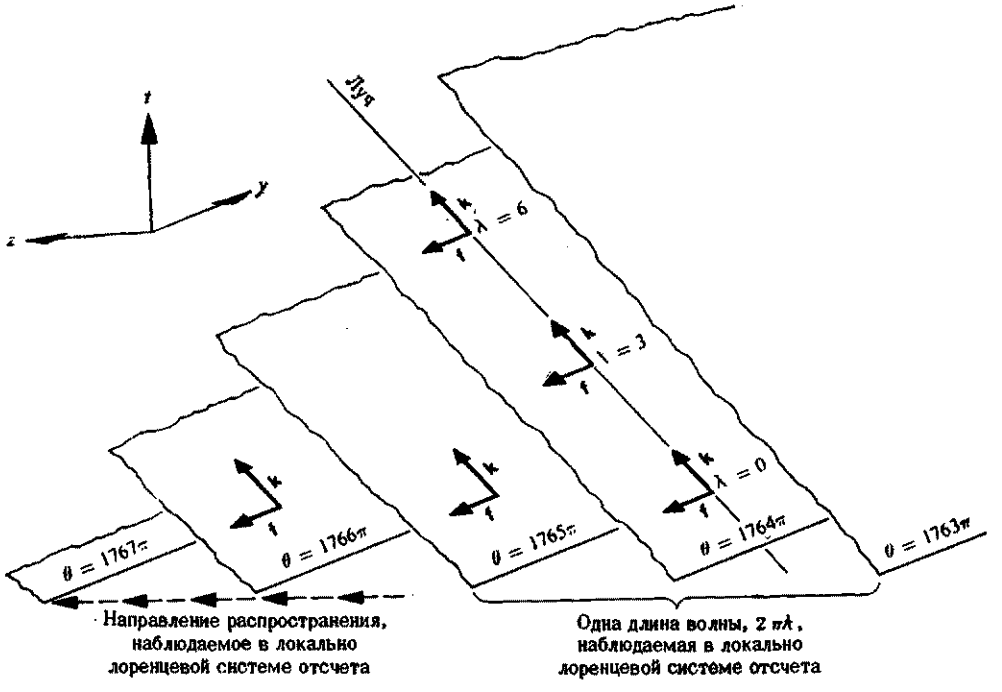
в. *Обсуждение*: Величина $|\sigma|$ названа *сдвигом* пучка лучей, так как с ее помощью можно измерить степень проскальзывания соседних лучей относительно друг друга (см., например, [25]). Следовательно, уравнение фокусировки (22.37) утверждает, что сдвиг фокусирует пучок лучей (делает $d^2\mathcal{A}^{1/2}/d\lambda^2 < 0$); кривизна пространства-времени также фокусирует его, если $R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta > 0$, и дефокусирует, если $R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta < 0$. (Если первоначально круговое поперечное сечение пучка зубочисток сжимать в эллиптическое, то пучок будет испытывать деформацию сдвига.)

г. Предположите, что плотность энергии $T_{\hat{0}\hat{0}}$, измеренная любым наблюдателем в любом месте пространства-времени, — неотрицательная величина. Комбинируя уравнение фокусировки (22.37) с уравнением поля Эйнштейна, сделайте вывод, что

$$\frac{d^2\mathcal{A}^{1/2}}{d\lambda^2} \leqslant 0 \quad \text{для любого пучка лучей, лежащих на одной и той же поверхности постоянной фазы в любом месте пространства-времени} \tag{22.40}$$

(*теорема фокусировки*). Эта теорема играет решающую роль в физике черных дыр (§ 34.5) и в теории сингулярностей (§ 34.6).

## Дополнение 22.3. ГЕОМЕТРИЯ ЦУГА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН




На фигуре показаны в локально лоренцевой системе отсчета поверхности постоянной фазы $\theta = \text{const}$, выходящие из «поверхности одновременности» $t = 0$. Поверхности постоянной фазы представляют собой чередующиеся «гребни» ($\theta = 1764\pi$, $\theta = 1766\pi$, . . .) и «впадины» ($\theta = 1765\pi$, $\theta = 1767\pi$, . . .) волнового цуга. Эти поверхности образуют 1-форму $\tilde{\mathbf{k}} = d\theta$, «соответственный вектор» которой $\mathbf{k} = \nabla\theta$ является *«волновым вектором»*. Согласно уравнениям Максвелла, волновой вектор равен нулю ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0$) [уравнение (22.30)], следовательно, он лежит на поверхности постоянной фазы:

$$\begin{pmatrix}\text{число поверхностей,}\\ \text{пересекаемых вектором } \mathbf{k}\end{pmatrix} = \langle d\theta, \mathbf{k}\rangle = \langle \tilde{\mathbf{k}}, \mathbf{k}\rangle = \\ = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 0.$$

Однако он не только лежит на поверхности постоянной фазы, но и перпендикулярен этой поверхности! Любой вектор $\mathbf{v}$ на этой поверхности должен удовлетворять равенству $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} = \langle \tilde{\mathbf{k}}, \mathbf{v}\rangle = \langle d\theta, \mathbf{v}\rangle = 0$, так как он не пересекает поверхностей.

В геометрической оптике предполагается, что приведенная длина волны $\lambda\!\!\!^{-}$, измеренная в типичной локально лоренцевой системе отсчета, мала по сравнению с масштабом неоднородностей в волновом цуге $\mathscr{L}$ и радиусом кривизны пространства-времени $\mathscr{R}$. Поэтому в областях, размеры которых значительно больше $\lambda\!\!\!^{-}$,

но меньше $\mathscr{L}$ или $\mathscr{R}$, волны являются плоскими и монохроматическими и существуют лоренцевы системы отсчета (римановы нормальные координаты). В одной из этих «протяженных» локально лоренцевых систем отсчета фаза должна определяться выражением

$$\theta = k_\alpha x^\alpha + \text{const}.$$

Никакое другое выражение не даст $\nabla\theta = \mathbf{k}$. Соответствующий векторный потенциал [уравнение (22.25)] будет равен

$$A^\mu = \Re\{a^\mu \exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - k^0 t)]\} + \begin{pmatrix}\text{«постпоправки}\\ \text{геометрической оптики»}\end{pmatrix};$$

следовательно,

$$k^0 = 2\pi/(\text{период волны}) = 2\pi\nu = \omega \equiv (\text{угловая частота}),$$

$$|\boldsymbol{k}| = 2\pi/(\text{длина волны}) = 1/\lambda\!\!\!^{-} = \omega,$$

$\boldsymbol{k}$ указывает направление распространения волны.

В каждом событии пространства-времени имеется волновой вектор; если концы этих волновых векторов скрепить друг с другом, то образуется семейство кривых — «световых лучей» или просто «лучей» с касательным вектором $\mathbf{k}$. Лучи, подобно касательному вектору, лежат как на поверхностях постоянной фазы, так и перпендикулярно им.

Аффинный параметр луча $\lambda$ (его не следует смешивать с длиной волны $= 2\pi\lambda$) удовлетворяет соотношению $\mathbf{k} = d/d\lambda$ и, следовательно, имеет вид

$$\lambda = t/k^0 + \text{const} = t/\omega + \text{const},$$

где $t$ — собственное время вдоль луча, а не самого луча (его собственное время равно нулю !), измеренное локально лоренцевым наблюдателем, который отмечает угловую частоту $\omega$. Поэтому несмотря на то, что $\omega$ и $t$ являются величинами, зависящими от системы отсчета, их частное $t/\omega$, измеренное вдоль луча (*но не вне луча*), представляет собой аффинный параметр, не зависящий от системы отсчета. Для частицы можно и естественно отождествить аффинный параметр $\lambda$ с собственным временем $\tau$. Для светового луча это неестественно и невозможно. Интервал собственного времени вдоль луча тождественно равен нулю. Появление $\lambda$ вместо исчезнувшего $\tau$ дает нам такое средство, о котором можно было и не подозревать. Задавшись световым лучом, испущенным в событии $\mathscr{A}$ и проходящим через событие $\mathscr{B}$, можно задать третье событие $\mathscr{C}$ вдоль той же самой нулевой мировой линии, которое находится от $\mathscr{A}$ в 2 раза дальше, чем $\mathscr{B}$, в новом смысле слова «дальше»; оно не имеет какой бы то ни было непосредственной связи с собственным временем (нуль !), а определяется равенством приращений аффинного параметра ($\lambda_{\mathscr{C}} - \lambda_{\mathscr{B}} = \lambda_{\mathscr{B}} - \lambda_{\mathscr{A}}$). «Аффинный параметр» имеет смысл для любой даже изолированной нулевой геодезической. В этом отношении он должен отличаться от «расстояния, определяемого по светимости», которое иногда вводится при рассмотрении распространения излучения в искривленном пространстве-времени и находится по расхождению двух или более световых лучей, приходящих от общего источника.

Уравнения Максвелла в том виде, в котором они использованы в тексте [уравнение (22.28′)], гарантируют, что комплексный вектор поляризации $\mathbf{f}$ перпендикулярен волновому вектору $\mathbf{k}$ и, следовательно, лежит в плоскости постоянной фазы (см. фигуру, стр. 235). Смысл вектора поляризации разъясняется в упражнении 22.12.

## Дополнение 22.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ[1])

### А. Допущение геометрической оптики

Электромагнитные волны, распространяющиеся в свободной от источников области пространства-времени, являются локально плоскими и монохроматическими (приведенная длина волны $\lambda \ll \mathscr{L}$ — масштаба изменения амплитуды, длины волны или вектора поляризации и $\lambda \ll \mathscr{R}$ — среднего радиуса кривизны пространства-времени).

### Б. Лучи, фаза и волновой вектор (см. дополнение 22.3)

Все (амплитуда, вектор поляризации, энергия и т. д.) переносится вдоль *лучей*; величины на одном луче не влияют на величины на другом луче.

Лучи представляют собой нулевые геодезические искривленного пространства-времени с касательными векторами (*«волновые векторы»*) $\mathbf{k}$:

$$\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{k} = 0.$$

Лучи лежат на поверхностях постоянной фазы $\theta = \text{const}$ и перпендикулярны им; касательные векторы лучей равны градиенту $\theta$:

$$\mathbf{k} = \nabla\theta.$$

В локально лоренцевой системе отсчета $k^0$ — «угловая частота», $k^0/2\pi$ — обычная частота волн и

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/k^0$$

— единичный 3-вектор, указывающий направление распространения волн.

### В. Амплитуда и вектор поляризации

Волны характеризуются действительной амплитудой $a$ и комплексным вектором поляризации $\mathbf{f}$, имеющим единичную длину $\mathbf{f}\cdot\bar{\mathbf{f}} = 1$. (За исключением $\mathbf{f}$, все фундаментальные величины $\theta$, $\mathbf{k}$, $a$ действительны. Для более глубокого понимания смысла вектора поляризации $\mathbf{f}$ см. упражнение 22.12.)

Вектор поляризации повсюду ортогонален лучам $\mathbf{k}\cdot\mathbf{f} = 0$ и параллельно переносится вдоль них $\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{f} = 0$.

Закон распространения амплитуды имеет вид

$$\partial_{\mathbf{k}}a = -\frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{k})\,a.$$

Он эквивалентен *закону сохранения фотонов* (классически — лучей); $a^2\mathbf{k}$ — «сохраняющийся ток», удовлетворяющий уравнению $\nabla\cdot(a^2\mathbf{k}) = 0$; $(8\pi\hbar)^{-1}\int a^2k^0\sqrt{|g|}\,d^3x$ — число фотонов (лучей) в 3-объеме интегрирования на любой гиперповерхности $x^0 = \text{const}$, которое остается постоянным при переносе объема вдоль лучей.

---

[1]) Резюме результатов, полученных в тексте и упражнениях.

Закон распространения удовлетворяется на каждой гиперповерхности постоянной фазы в отдельности. Его можно интерпретировать как закон сохранения $a^2\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — двумерная площадь поперечного сечения импульса фотонов или лучей (см. упражнение 22.13).

### Г. Векторный потенциал, электромагнитное поле и тензор энергии-импульса

В любом событии векторный потенциал в лоренцевой калибровке имеет вид

$$\mathbf{A} = \Re\{ae^{i\theta}\mathbf{f}\},$$

где $\Re$ означает действительную часть.

Тензор электромагнитного поля ортогонален лучам, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{k} = 0$, и определяется формулой

$$\mathbf{F} = \Re\{iae^{i\theta}\mathbf{k}\wedge\mathbf{f}\}.$$

Соответствующие электрическое и магнитное поля в локально лоренцевой системе отсчета выражаются в виде

$$\boldsymbol{E} = \Re\{iak^0e^{i\theta}\ (\text{проекция } \boldsymbol{f} \text{ на перпендикуляр } \boldsymbol{k})\},$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}, \text{ где } \boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{k}/k^0.$$

Тензор энергии-импульса, усредненный по масштабам, превышающим длину волны, равен

$$\mathbf{T} = (1/8\pi)\,a^2\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}.$$

В локально лоренцевой системе отсчета он определяет плотность энергии

$$T^{00} = (1/8\pi)\,(ak^0)^2$$

и поток энергии

$$T^{0j} = T^{00}n^j,$$

так что энергия переносится вдоль лучей (в направлении $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/k^0$) со скоростью света. Этот тензор энергии-импульса тождествен тензору энергии-импульса пучка фотонов с 4-импульсом $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$.

Закон сохранения энергии-импульса $\nabla\cdot\mathbf{T} = 0$ следует из закона сохранения луча $\nabla\cdot(a^2\mathbf{k}) = 0$ и уравнения геодезических $\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{k} \equiv (\mathbf{k}\cdot\nabla)\,\mathbf{k} = 0$;

$$8\pi\nabla\cdot\mathbf{T} = \nabla\cdot(a^2\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}) = [\nabla\cdot(a^2\mathbf{k})]\,\mathbf{k} + a^2(\mathbf{k}\cdot\nabla)\,\mathbf{k} = 0.$$

Адиабатический (отвечающий геометрической оптике) инвариант «число лучей» $a^2k^0$ или «число фотонов» $(8\pi\hbar)^{-1}a^2k^0$ в единице объема пропорционален энергии $(8\pi)^{-1}a^2(k^0)^2$, деленной на частоту $k^0$, и точно соответствует адиабатическому инварианту гармонического осциллятора $E/\omega$ [227 — 229].

### Д. Интерпретация геометрической оптики на языке фотонов

Законы геометрической оптики можно переинтерпретировать изложенным ниже образом. Эта интерпретация — основа стандартной квантовой теории электромагнитного поля (см., например, гл. 1 и 13 из книги [230]); классическим пределом этой квантовой теории является стандартная электродинамика Максвелла.

Фотоны представляют собой частицы нулевой массы покоя, которые движутся вдоль нулевых геодезических пространства-времени (нулевые лучи).

4-импульс фотона связан с касательным вектором к нулевому лучу (волновым вектором): $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Перенормировка аффинного параметра

$$(\text{новый параметр}) = (1/\hbar) \times (\text{старый параметр})$$

превращает $\mathbf{p}$ в вектор, касательный к лучу.

Каждый фотон обладает вектором поляризации $\mathbf{f}$, который ортогонален 4-импульсу ($\mathbf{p} \cdot \mathbf{f} = 0$) и переносится параллельно вдоль своей геодезической мировой линии ($\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{f} = 0$).

Множество фотонов с приблизительно одинаковыми 4-импульсами $\mathbf{p}$ и векторами поляризации $\mathbf{f}$ (они сравниваются путем параллельного переноса) образуют классическую электромагнитную волну. Скалярную амплитуду волны $a$ можно определить, приравнивая тензор энергии-импульса волны

$$\mathbf{T} = \frac{1}{8\pi} a^2 \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{a}{\hbar}\right)^2 \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}$$

тензору энергии-импульса множества фотонов с вектором потока фотонов $\mathbf{S}$

$$\mathbf{T} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{S}$$

[см. уравнение (5.18)]. В результате находим

$$\mathbf{S} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{a}{\hbar}\right)^2 \mathbf{p} = \frac{1}{8\pi\hbar} a^2 \mathbf{k}$$

или в любой локально лоренцевой системе отсчета

$$a = (8\pi\hbar^2 S^0/p^0)^{1/2} = (8\pi)^{1/2}\,\hbar \left(\frac{\text{плотность числа фотонов}}{\text{энергия одного фотона}}\right)^{1/2}.$$

## § 22.6. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ [1])

Звезды в галактике блуждают в пространстве-времени, каждая из них движется по собственной геодезической мировой линии и вносит свой вклад в пространственно-временну́ю кривизну, которую чувствуют все другие звезды. Фотоны, оставшиеся от горячих стадий эволюции мира, заливают Землю, принося с собою данные об однородности и изотропии Вселенной. Теоретический анализ этих и многих других проблем представляется невыполнимым, если пытаться прослеживать движение отдельной звезды или фотона. Но мощное статистическое описание дает точные результаты. Более того, для большинства задач в астрофизике и космологии простота статистических описаний — игнорирование столкновений — адекватна. Обычно для крупномасштабного поведения системы (например, галактики) столкновения не существенны или они настолько существенны, что возможно жидкостное описание (например, внутри звезд).

[1]) Более софистическое и детальное изложение этого предмета можно найти, например, в работах [9, 211, 212, 214, 231, 232]; см. также приведенную в них литературу. Особенно хорошую вводную обзорную статью написал Эйлер [9].

Рассмотрим в таком случае множество частиц (звезд, фотонов, или черных дыр, или ...), которые движутся в пространстве-времени по геодезическим мировым линиям, не испытывая столкновений. Предположим для простоты, что все частицы имеют одинаковую массу покоя. Тогда вся информация статистической природы о частицах может быть заключена в одной функции —«*функции распределения*» или «*плотности в фазовом пространстве*», $\mathcal{N}$.

Определим $\mathcal{N}$, исходя из измерений, выполненных конкретным локально лоренцевым наблюдателем в конкретном событии $\mathcal{P}_0$ в искривленном пространстве-времени. Дадим наблюдателю коробку с 3-объемом $\mathcal{V}_x$ (с воображаемыми стенками) и попросим сосчитать, сколько частиц $N$, находящихся внутри коробки, имеют локально лоренцевы компоненты импульса $p^j$ в интервале

$$P^j - \frac{1}{2}\Delta p^j < p^j < P^j + \frac{1}{2}\Delta p^j.$$

(Он может не рассматривать энергии частиц $p^0$; поскольку все частицы имеют одинаковую массу покоя $m$, энергия

$$p^0 = (m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$$

однозначно определяется импульсом.) Объем импульсного пространства, занимаемого частицами $N$, есть $\mathcal{V}_p = \Delta p^x \Delta p^y \Delta p^z$; *объем в фазовом пространстве равен*

Объем в фазовом пространстве для группы тождественных частиц

$$\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}_x \mathcal{V}_p. \tag{22.41}$$

Мнения других наблюдателей в $\mathcal{P}_0$, движущихся относительно первого, по вопросу о том, какой пространственный объем $\mathcal{V}_x$ и какой импульсный объем $\mathcal{V}_p$ занимают те же $N$ частиц, будут расходиться:

$\mathcal{V}_x$ и $\mathcal{V}_p$ зависят от выбора лоренцевой системы отсчета. (22.42)

Лоренц-инвариантность объема в фазовом пространстве

Однако величина произведения $\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}_x \mathcal{V}_p$ («объем в фазовом пространстве») будет одинакова для всех наблюдателей:

> Фазовый объем $\mathcal{V}$, занимаемый данным набором $N$ тождественных частиц в данном событии в пространстве-времени, не зависит от локально лоренцевой системы отсчета, в которой он измеряется. (22.43)

(Доказательство см. в дополнении 22.5.) Более того, при движении тех же $N$ частиц по их мировым геодезическим линиям в пространстве-времени (и в импульсном пространстве) охватываемый ими объем в фазовом пространстве $\mathcal{V}$ остается постоянным:

Теорема Лиувилля (сохранение фазового объема)

> Объем $\mathcal{V}$, занимаемый данным множеством $N$ частиц, не зависит от положения на мировой линии множества («*Теорема Лиувилля в искривленном пространстве-времени*»). (22.44)

(Доказательство см. в дополнении 22.6.)

Величина, более удобная для приложений по сравнению с объемом $\mathscr{V}$, занимаемым в фазовом пространстве данным набором $N$ частиц, — это «*плотность числа частиц в фазовом пространстве*» («*функция распределения*») в окрестности одной из этих частиц:

Плотность числа частиц в фазовом пространстве (функция распределения)

$$\mathscr{N} \equiv N/\mathscr{V}. \tag{22.45}$$

От чего зависит эта плотность? Она зависит от положения в пространстве-времени события $\mathscr{P}$, в котором проводятся измерения, и от 4-импульса $\mathbf{p}$ частицы, в окрестности которой проводятся измерения. Однако, поскольку все частицы имеют одинаковую массу, 4-импульс $\mathbf{p}$ не может принимать произвольное значение в касательном пространстве в событии $\mathscr{P}$. Вернее, 4-импульс $\mathbf{p}$ ограничен «передним массовым гиперболоидом» в $\mathscr{P}$:

$$\mathbf{p}^2 = m^2, \quad \mathbf{p} \text{ лежит внутри будущего светового конуса.}$$

Следовательно,

$$\mathscr{N} = \mathscr{N}\left[\begin{pmatrix}\text{положение } \mathscr{P} \\ \text{в пространстве-} \\ \text{времени}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\text{4-импульс } \mathbf{p}, \text{ который} \\ \text{должен лежать на пе-} \\ \text{реднем массовом гипер-} \\ \text{болоиде в касательном} \\ \text{пространстве в } \mathscr{P}\end{pmatrix}\right]. \tag{22.46}$$

Выберем из множества одну частицу с геодезической мировой линией $\mathscr{P}(\lambda)$ [$\lambda$ = (аффинный параметр) = (собственное время, если частица имеет конечную массу покоя)] и 4-импульсом $\mathbf{p}(\lambda)$. Исследуем плотность в фазовом пространстве в окрестности этой частицы в каждой точке ее мировой линии:

$$\mathscr{N} = \mathscr{N}[\mathscr{P}(\lambda),\ \mathbf{p}(\lambda)].$$

Вычислим $\mathscr{N}(\lambda)$ следующим образом:

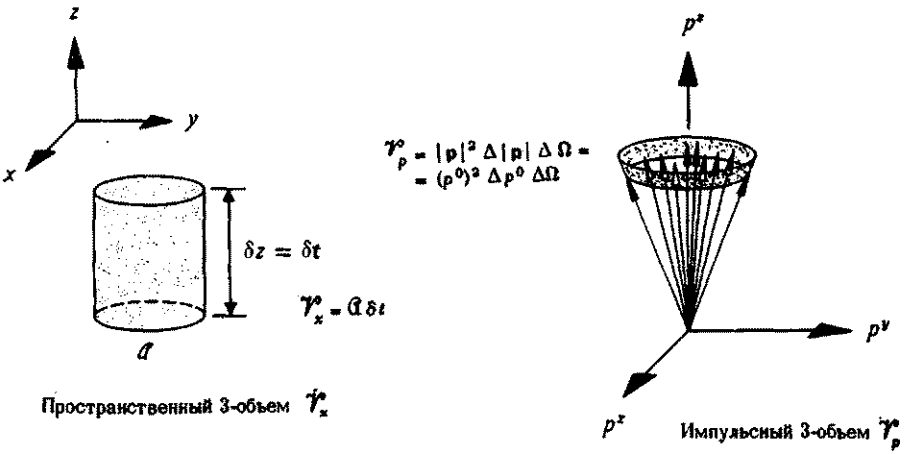
1. Выберем начальное событие $\mathscr{P}(0)$ на мировой линии и объем фазового пространства $\mathscr{V}$, содержащий частицу.

2. Покроем красной краской все частицы, содержащиеся в $\mathscr{V}$ и относящиеся к событию $\mathscr{P}_0$.

3. Проследим за движением красных частиц наряду с начальной частицей в пространстве-времени.

4. При движении форма занимаемой ими области фазового пространства экстенсивно изменяется, однако ее объем $\mathscr{V}$ остается неизменным (теорема Лиувилля). Кроме того, ни одна из частиц не может войти или покинуть эту область фазового пространства (однажды в этой области — всегда в этой области, однажды вне ее — всегда вне ее; границы области фазового пространства прикреплены к частицам и движутся вместе с ними).

5. Следовательно, при любом $\lambda$ вдоль начальной мировой линии частицы частица находится в области фазового пространства неизменного объема $\mathscr{V}$, неизменного числа частиц $N$ и неизмен-




ФИГ. 22.2.

Плотность числа фотонов в фазовом пространстве, интерпретируемая как функция удельной интенсивности $I_\nu$. Астроном имеет телескоп с фильтром, который пропускает только фотоны, приходящие из малого телесного угла $\Delta\Omega$ (проведенного вдоль направления оси $z$) и имеющие энергии в интервале от $p^0$ до $p^0 + \Delta p^0$. Собирающая площадь $\mathcal{A}$ этого телескопа лежит в плоскости $x$, $y$ (перпендикулярно падающему пучку фотонов). Пусть $\delta N$ — число фотонов, пересекающих площадь $\mathcal{A}$ за интервал времени $\delta t$. [Все энергии, площади, времена и длины измеряются в ортонормальной системе отсчета («собственная система отсчета»; § 13.6), которая подвергается переносу Ферми — Уолкера вдоль (возможно ускоренной) мировой линии астронома, или, эквивалентно, в локально лоренцевой системе отсчета, покоящейся в данный момент относительно астронома.] Сразу перед началом интервала времени $\delta t$ в показанном на фигуре цилиндре с площадью основания $\mathcal{A}$ и высотой $\delta z = \delta t$ находятся $\delta N$ фотонов. Поэтому их пространственный 3-объем равен $\mathcal{V}_x = \mathcal{A}\delta t$, а импульсный 3-объем равен $\mathcal{V}_p = (p^0)^2\Delta p^0\,\Delta\Omega$. [Для облегчения наглядного представления (см. фигуру) направление векторов импульса изменено на противоположное (телескоп как источник, а не приемник!).] Отсюда плотность фотонов в фазовом пространстве равна

$$\mathcal{N} = \frac{\delta N}{\mathcal{V}_x \mathcal{V}_p} = \frac{\delta N}{\mathcal{A}\,\delta t\,(p^0)^2\,(\Delta p^0)\,\Delta\Omega} = \frac{\delta N}{h^3 \mathcal{A}\,\delta t \nu^2\,\Delta\nu\,\Delta\Omega},$$

где $\nu$ — частота фотонов, измеренная с помощью телескопа ($p^0 = h\nu$). Удельная интенсивность фотонов $I_\nu$ (классическое понятие в астрономии) есть энергия на единицу площади, в единицу времени, на единичный интервал частот, в единице телесного угла, проходящая через перпендикулярную лучу поверхность

$$I_\nu = \frac{h\nu\,\delta N}{\mathcal{A}\,\delta t\,\Delta\nu\,\Delta\Omega}.$$

Непосредственное сравнение дает $\mathcal{N} = h^{-4}\,(I_\nu/\nu^3)$.

Таким образом, сохранение $\mathcal{N}$ вдоль мировой линии фотонов означает сохранение $I_\nu/\nu^3$. Этот закон сохранения находит важные применения в космологии (см., например, дополнение 29.2 и упражнение 29.5) и в эффекте гравитационной линзы [156]; см. также упражнения 21.15—22.17.

ного отношения $\mathscr{N} = N/\mathscr{V}$

$$\frac{d\mathscr{N}[\mathscr{P}(\lambda)\,\mathbf{p}(\lambda)]}{d\lambda} = 0. \tag{22.47}$$

Бесстолкновительное уравнение Больцмана (кинетическое уравнение)

Это уравнение сохранения $\mathscr{N}$ вдоль траектории частицы в фазовом пространстве называется «бесстолкновительным уравнением Больцмана» или «кинетическим уравнением».

Важное значение имеет приложение уравнения Больцмана к фотонам. При обсуждении фотонов обычно не пользуются понятием плотности в фазовом пространстве. Скорее говорят об «удельной интенсивности» $I_\nu$ излучения на данной частоте $\nu$, распространяющегося в данном направлении $\boldsymbol{n}$. Она измеряется в определенной локально лоренцевой системе отсчета:

$$I_\nu \equiv \frac{d\,(\text{энергия})}{d\,(\text{время})\;d\,(\text{площадь})\;d\,(\text{частота})\;d\,(\text{телесный угол})} \tag{22.48}$$

(см. фиг. 22.2). Простое вычисление в локально лоренцевой системе отсчета показывает, что

$$\mathscr{N} = h^{-4}\,(I_\nu/\nu^3), \tag{22.49}$$

Связь функции распределения фотонов с удельной интенсивностью $I_\nu$

где $h$ — постоянная Планка (фиг. 22.2). Таким образом, если два различных наблюдателя в одном и том же или в различных событиях пространства-времени смотрят на один и тот же пролетающий фотон (или соседние фотоны), они будут видеть различные частоты $\nu$ («доплеровский сдвиг», «космологическое красное смещение», «гравитационное красное смещение») и различные удельные интенсивности $I_\nu$, но будут получать одинаковые значения отношения $I_\nu/\nu^3$. Таким образом, $I_\nu/\nu^3$, подобно $\mathscr{N}$, инвариантно относительно наблюдателей и событий вдоль данной мировой линии фотона.

Инвариантность и сохранение $I_\nu/\nu^3$

---

## 22.15. Закон обратных квадратов для потока

УПРАЖНЕНИЯ

*Удельный поток* излучения, входящий в телескоп от данного источника, определяется формулой

$$F_\nu = \int I_\nu\, d\Omega; \tag{22.50}$$

интегрирование здесь проводится по полному телесному углу (предполагаемому $\ll 4\pi$), занимаемому источником на небе наблюдателя. Используя уравнение Больцмана (сохранение $I_\nu/\nu^3$), покажите, что для наблюдателей, покоящихся относительно друг друга в плоском пространстве-времени, $F_\nu \sim$ (расстоянию от источника)$^{-2}$.

УПРАЖНЕНИЯ

### 22.16. Яркость Солнца

Выглядит ли поверхность Солнца для астронавта, находящегося на Меркурии, сколько-нибудь ярче, чем для студента, стоящего на Земле?

### 22.17. Чернотельное излучение

Для наблюдателя, покоящегося вблизи источника, «оптически толстый» источник чернотельного излучения (например, поверхность звезды или горячее вещество, наполняющее Вселенную на ранних стадиях расширения) изотропно испускает фотоны с удельной интенсивностью (закон излучения Планка)

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}. \tag{22.51}$$

Здесь $T$ — температура источника. Покажите, что любой наблюдатель в любой локально лоренцевой системе отсчета в любом месте Вселенной, исследующий проходящее через него излучение, будет также видеть чернотельный спектр. Покажите далее, что температура, вычисленная по измеренной на любой частоте интенсивности $I_\nu$, и температура, вычисленная из формы спектра, совпадают. (Излучение не «дилютируется» в излучение «серого тела», а остается чернотельным.) В заключение покажите, что температура, измеренная наблюдателем, сдвинута в красную сторону с тем же коэффициентом, что и частота любого данного фотона:

$$\frac{T_{\text{наблюдаемая}}}{T_{\text{испускаемая}}} = \left(\frac{\nu_{\text{наблюдаемая}}}{\nu_{\text{испускаемая}}}\right) \text{ для данного фотона.} \tag{22.52}$$

[*Замечание*: Красные смещения по происхождению могут быть «доплеровскими», «космологическими», «гравитационными» или некоторой неразделимой смесью. В любом случае закон параллельного переноса 4-импульса фотона $\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p} = 0$ гарантирует, что красное смещение $\nu_{\text{наблюдаемая}}/\nu_{\text{испускаемая}}$ не зависит от испускаемой частоты.]

### 22.18. Тензор энергии-импульса

а. Покажите, что тензор энергии-импульса для множества тождественных частиц в событии $\mathcal{P}_0$ можно записать в виде интеграла по массовому гиперболоиду импульсного пространства в $\mathcal{P}_0$:

$$\mathbf{T} = \int (\mathcal{N}\mathbf{p} \otimes \mathbf{p})\,(d\mathcal{V}_p/p^0), \tag{22.53}$$

$$\frac{d\mathcal{V}^{\circ}{}_p}{p^0} \equiv \frac{dp^x\,dp^y\,dp^z}{p^0} \text{ в локально лоренцевой системе отсчета.} \tag{22.54}$$

[Заметим (см. дополнение 22.5), что $d\mathcal{V}^{\circ}{}_p/p^0$ есть лоренц-инвариантный элемент объема для любого сегмента массового гиперболоида.]

б. Проверьте, что для любого множества тождественных

частиц из уравнения Больцмана $d\mathcal{N}/d\lambda = 0$ следует $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$. [*Указание*: Вычислите $\nabla \cdot \mathbf{T}$ в локально лоренцевой системе отсчета, используя вышеприведенное выражение для $\mathbf{T}$ и уравнение геодезических, записанное в виде $Dp^\mu/d\lambda = 0$.]

### 22.19. Кинетическая теория для нетождественных частиц

Для множества частиц с большим разбросом масс покоя определите плотность в фазовом пространстве:

$$\mathcal{N} = \frac{\Delta N}{\mathcal{V}_x \mathcal{V}_p \Delta m}, \tag{22.55}$$

где $\mathcal{V}_x$ — пространственный 3-объем, $\mathcal{V}_p$ — импульсный 3-объем, а $\Delta N$ — число частиц в области $\mathcal{V}_x \mathcal{V}_p$ с массами покоя в интервале $m - \Delta m/2$ и $m + \Delta m/2$. Покажите, что имеют место следующие результаты:

а. $\mathcal{V}_x \mathcal{V}_p \Delta m$ не зависит от лоренцевой системы отсчета и от положения на мировой трубке пучка частиц.

б. $\mathcal{N}$ можно рассматривать как функцию положения $\mathcal{P}$ в пространстве-времени и 4-импульса $\mathbf{p}$ внутри будущего светового конуса в касательном к $\mathcal{P}$ пространстве:

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathbf{p}). \tag{22.56}$$

в. $\mathcal{N}$ удовлетворяет бесстолкновительному уравнению Больцмана (кинетическому уравнению)

$$\frac{d\mathcal{N}[\mathcal{P}(\lambda), \mathbf{p}(\lambda)]}{d\lambda} = 0 \text{ вдоль геодезической траектории любой частицы.} \tag{22.57}$$

г. В локально лоренцевой системе отсчета $\mathcal{N}$ можно записать в виде

$$\mathcal{N} = \frac{\Delta N}{[(p^0/m)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z]\,[\Delta p^0 \Delta p^x \Delta p^y \Delta p^z]}. \tag{22.58}$$

д. Тензор энергии-импульса в событии $\mathcal{P}$ можно записать в виде интеграла по внутренней области будущего светового конуса импульсного пространства

$$T^{\mu\nu} = \int (\mathcal{N} p^\mu p^\nu)\, m^{-1}\, dp^0\, dp^1\, dp^2\, dp^3 \tag{22.59}$$

в локально лоренцевой системе отсчета (обозначение интеграла разъяснено в курсе 1, см. дополнение 5.3) или в обозначениях, не зависящих от системы отсчета,

$$\mathbf{T} = \int (\mathcal{N} \mathbf{p} \otimes \mathbf{p})\, m^{-1} * 1,$$

отсюда

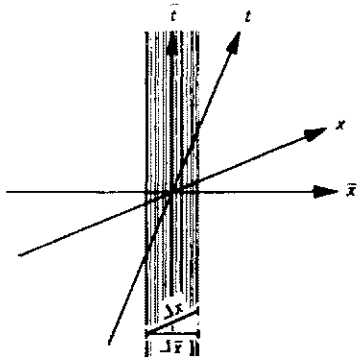
$$\mathbf{T} = \int (\mathcal{N} \mathbf{p} \otimes \mathbf{p})\, m^{-1}\, \mathbf{d}p^0 \wedge \mathbf{d}p^1 \wedge \mathbf{d}p^2 \wedge \mathbf{d}p^3 \tag{22.59'}$$

в локально лоренцевой системе отсчета (обозначение принято в курсе 2, см. дополнение 5.4).

## Дополнение 22.5. ОБЪЕМ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

### А. Для множества тождественных частиц с ненулевой массой покоя

Выберем событие $\mathcal{P}_0$, через которое проходит частица по имени «Джон» с 4-импульсом по имени «**P**». В локально лоренцевой системе отсчета в $\mathcal{P}_0$, в которой покоится частица Джон («система отсчета с чертой», $\bar{S}$), выберем содержащий ее малый 3-объем $\mathcal{V}_{\bar{x}} \equiv \Delta\bar{x}\,\Delta\bar{y}\,\Delta\bar{z}$. Выберем также малый «3-объем в импульсном пространстве», $\mathcal{V}_{\bar{p}} \equiv \Delta p^{\bar{x}}\,\Delta p^{\bar{y}}\,\Delta p^{\bar{z}}$, с центром в импульсе Джона, который равен $P^{\bar{x}} = P^{\bar{y}} = P^{\bar{z}} = 0$. Сосредоточим внимание на всех частицах, мировые линии которых проходят через $\mathcal{V}_{\bar{x}}$ и которые обладают импульсами $p^{\bar{j}}$ в области $\mathcal{V}_{\bar{p}}$, окружающей $P^{\bar{j}} = 0$.

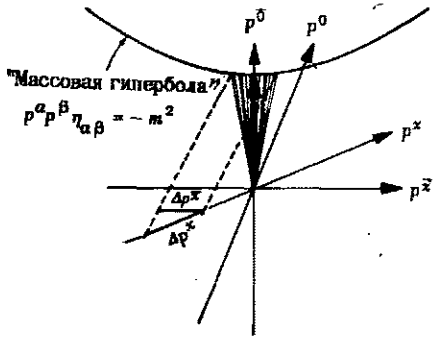



Исследуем этот пучок в другой локально лоренцевой системе отсчета в $\mathcal{P}_0$ («система отсчета без черты» $S$), которая движется со скоростью $\beta$ относительно покоящейся системы отсчета. Ориентируем оси таким образом, чтобы относительное движение систем, отсчета происходило в $x$ и $\bar{x}$ направлениях. Тогда для пространственного объема $\mathcal{V}_x$, занимаемого в новой системе отсчета, имеем $\Delta y = \Delta\bar{y}$, $\Delta z = \Delta\bar{z}$ (движение не влияет на размеры в поперечных направлениях) и $\Delta x = (1 - \beta^2)^{1/2}\Delta\bar{x}$ (лоренцево сокращение в продольном направлении). Следовательно, $\mathcal{V}_x = (1 - \beta^2)^{1/2}\mathcal{V}_{\bar{x}}$ («закон преобразования пространственных объемов»), или, эквивалентно [поскольку $P^0 = m/(1 - \beta^2)^{1/2}$],

$$P^0\mathcal{V}_x = m\mathcal{V}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix}\text{постоянная, не зависящая}\\ \text{от лоренцевой системы}\\ \text{отсчета}\end{pmatrix}.$$

На фазовой диаграмме, которая аналогична пространственно-временной диаграмме, изображен разброс импульсов частиц в пучке и показано, что $\Delta p^x = \Delta p^{\bar{x}}/(1 - \beta^2)^{1/2}$. Лоренц-преобразование от $\bar{\mathcal{C}}$ к $\mathcal{C}$ не влияет на поперечные компоненты импульсов, поэтому $\Delta p^y = \Delta p^{\bar{y}}$, $\Delta p^z = \Delta p^{\bar{z}}$. Следовательно, $\mathcal{V}_p = \mathcal{V}_{\bar{p}}/(1 - \beta^2)^{1/2}$ («закон преобразования импульсных объемов»), или, эквивалентно,

$$\frac{\mathcal{V}_p}{p^0}\,\frac{\mathcal{V}_{\bar{p}}}{m} = \begin{pmatrix}\text{постоянная, не зависящая}\\ \text{от лоренцевой системы отсчета}\end{pmatrix}.$$




Хотя пространственные 3-объемы $\mathcal{V}_x$ и $\mathcal{V}_{\bar{x}}$ и импульсные 3-объемы $\mathcal{V}_p$ и $\mathcal{V}_{\bar{p}}$

отличаются, объем в шестимерном фазовом пространстве является лоренц-инвариантным

$$\mathscr{V} \equiv \mathscr{V}_{\bar{x}} \mathscr{V}_{\bar{p}} = \mathscr{V}_x \mathscr{V}_p.$$

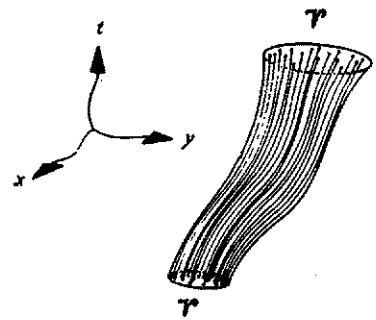
Это геометрический объект, не зависящий от системы отсчета!

**Б. Для множества тождественных частиц с нулевой массой покоя**

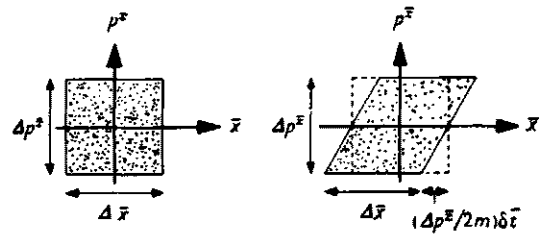
Рассмотрим последовательность систем частиц с уменьшающейся массой покоя и увеличивающейся скоростью относительно лабораторной системы отсчета. Для каждого пучка частиц в каждой системе величины $P^0 \mathscr{V}_x$, $\mathscr{V}_p / P^0$ и $\mathscr{V}_x \mathscr{V}_p$ являются лоренц-инвариантными. Следовательно, в пределе при $m \to 0$, $\beta \to 1$ и $P^0 = m/(1-\beta^2)^{1/2} \to$ к конечной величине (частицы нулевой массы покоя, движущиеся со скоростью света) $P^0 \mathscr{V}_x$, $\mathscr{V}_p / P^0$ и $\mathscr{V}_x \mathscr{V}_p$ все еще остаются лоренц-инвариантными геометрическими величинами.

## Дополнение 22.6. СОХРАНЕНИЕ ОБЪЕМА В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим очень маленький пучок тождественных частиц, которые движутся в искривленном пространстве-времени по соседним геодезическим. Измерим объем $\mathscr{V}$ пучка в фазовом пространстве ($\mathscr{V} = \mathscr{V}_x \mathscr{V}_p$ в любой локально лоренцевой системе отсчета) как функцию аффинного параметра $\lambda$ вдоль центральной геодезической пучка. Последующий расчет показывает, что



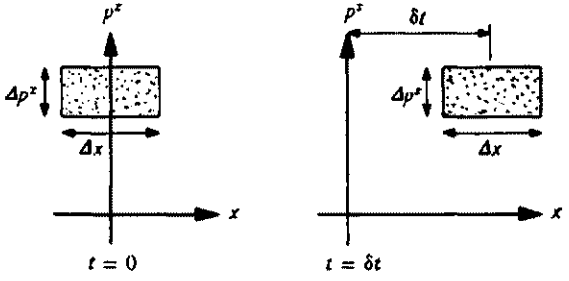

$$d\mathscr{V}/d\lambda = 0 \qquad \begin{pmatrix}\text{«теорема Лиувилля}\\ \text{в искривленном про-}\\ \text{странстве-времени»}\end{pmatrix}.$$




Каждая частица движется со скоростью $d\bar{x}/d\bar{t}$, пропорциональной высоте на диаграмме:

$$d\bar{x}/d\bar{t} = p^{\bar{x}}/m,$$

и импульс ее сохраняется $dp^{\bar{x}}/d\bar{t} = 0$. Следовательно, область, занимаемая частицами, деформируется с сохранением площади. То же справедливо для $(y - p^y)$ и $(z - p^z)$.



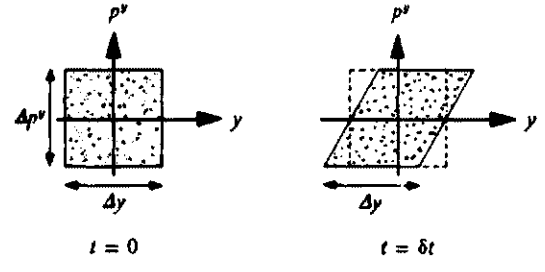

Каждая частица «фотон» движется со скоростью $dx/dt = 1$ и $dp^x/dt = 0$ в локально лоренцевой системе отсчета. Площадь и форма области, занимаемой частицами, сохраняются.

*Доказательство для частиц с конечной массой покоя.* Рассмотрим движение частицы в течение интервала времени $\delta\tau$, используя локально лоренцеву систему отсчета, в которой покоится центральная частица. Все скорости в этой системе отсчета малы, поэтому $\bar{p}^j = m d\bar{x}^j/d\bar{t}$.

Следовательно, см. фигуры, разбросы в импульсе и положении не изменяют $\Delta\bar{x}\,\Delta p^{\bar{x}}$, $\Delta\bar{y}\,\Delta p^{\bar{y}}$, $\Delta\bar{z}\,\Delta p^{\bar{z}}$, т. е.

$$\frac{d\mathscr{V}^0}{d\tau} = \frac{\delta(\Delta\bar{x}\,\Delta\bar{y}\,\Delta\bar{z}\,\Delta p^{\bar{x}}\,\Delta p^{\bar{y}}\,\Delta p^{\bar{z}})}{\delta\bar{t}} = 0.$$

Но $\tau = a\lambda + b$ для некоторых произвольных постоянных $a$ и $b$, поэтому $d\mathscr{V}/d\lambda = 0$. *Доказательство для частиц с нулевой массой покоя.* Рассмотрим движение частицы в локально лоренцевой системе отсчета, в которой импульс центральной




Скорость каждой частицы («фотона») пропорциональна высоте на диаграмме:

$$dy/dt = p^y/P^0,$$

и $dp^y/dt = 0$. Следовательно, область, занимаемая частицами, деформируется с сохранением площади. То же справедливо для $(z - p^z)$.

частицы равен $\mathbf{P} = P^0(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_x)$. В этой системе отсчета все частицы имеют импульс $p^y \ll p^0$, $p^z \ll p^0$, $p^x = p^0 + O([p^y]^2/P^0) \approx P^0$. Поскольку при подходящей нормировке аффинных параметров (см. дополнение 22.4) $p^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$, можно записать $dx^j/dt = p^j/p^0$, т.е.

$$\frac{dx}{dt} = 1 + O([p^y/P^0]^2 + [p^z/P^0]^2) \approx 1,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p^y}{P^0}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{p^z}{P^0}.$$

Следовательно (см. фигуру), $\Delta x\,\Delta p^x$, $\Delta y\,\Delta p^y$ и $\Delta z\,\Delta p^z$ не изменяются, и

$$\frac{d\mathcal{V}^\circ}{dt} \equiv \frac{\delta(\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta p^x\,\Delta p^y\,\Delta p^z)}{\delta t} = 0.$$

Но $t$ и аффинный параметр $\lambda$ центральной частицы связаны соотношением $t = P^0\lambda$ [ср. уравнение (16.4)], поэтому

$$d\mathcal{V}/d\lambda = 0.$$

ЧАСТЬ V

# РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЗВЕЗДЫ

*Здесь читатель, используя магические зелья и силы геометродинамики, покоряет звезды*

# 23. СФЕРИЧЕСКИЕ ЗВЕЗДЫ

## § 23.1. ПРОЛОГ

Несмотря на красоту теории тяготения, до тех пор пока она не касается реального физического мира, она бесплодна. Только суровая действительность экспериментов и астрономических наблюдений может вдохнуть жизнь в теорию тяготения. И только путем построения теоретических моделей звезд (часть V), Вселенной (часть VI), звездного коллапса и черных дыр (часть VII), гравитационных волн и их источников (часть VIII) и проведения гравитационных экспериментов (часть IX) можно получить ясное представление о связях между теорией тяготения и действительностью.

Кратко о содержании оставшихся частей данной книги

В этой книге при построении моделей мы будем следовать традиции теоретической физики. Каждая часть (звезды, Вселенная, коллапс ...) будет начинаться с максимально упрощенной из всех возможных моделей, и к ней последовательно будут добавляться только те дополнительные штрихи реализма, которые необходимы для связи с наиболее простыми реальными физическими системами. В результате получится проверенный интеллектуальный каркас, готовый выдержать и правильно включить дополнительные усложнения, диктуемые более реалистичной картиной. В данной книге мы не будем пытаться подойти достаточно близко к действительности. Однако читатель, который захочет это сделать, не найдет для начала лучшей книги, чем двухтомный трактат по *релятивистской астрофизике* Зельдовича и Новикова [196, 238].

Начнем теперь с моделей релятивистских звезд. В качестве главного упрощения потребуем (сначала), чтобы все изучаемые звезды были статическими. Вследствие этого исключаются не только взрывающиеся и пульсирующие звезды, но даже спокойные стационарно вращающиеся звезды. Из предположений, что звезда

**Статические звезды должны быть сферически симметричными**

статична и должна состоять из «идеальной жидкости» (не допустимы сдвиговые напряжения!) и что для нее выполняются уравнения поля Эйнштейна, вероятно, следует сферическая симметрия звезды. Однако это еще никто не доказал. (Доказательство при более ограничивающих предположениях см. в работах [239, 240].) В отсутствие доказательства мы будем считать, что все изучаемые звезды являются статическими и сферическими.

## § 23.2. КООРДИНАТЫ И МЕТРИКА СТАТИЧЕСКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

**Метрика для любой статической сферической системы:**

Для получения гравитационного поля статической сферической звезды или любой другой статической сферической системы начнем с метрики специальной теории относительности (в отсутствие тяготения) в сферически симметричной форме

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{23.1}$$

где

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \tag{23.2}$$

**1) полученная из метрики плоского пространства-времени**

Попытаемся модифицировать эту метрику таким образом, чтобы учесть кривизну, вызванную гравитационным влиянием звезды, но сохранить в то же время ее сферически симметричную форму. По-видимому, простейшее и наиболее очевидное действие — это придать другие значения тем метрическим коэффициентам, которые уже присутствуют в метрике (23.1):

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + R^2\,d\Omega^2, \tag{23.3}$$

где $\Phi$, $\Lambda$ и $R$ — функции только $r$. (Предположение о статичности требует, чтобы $\partial g_{\mu\nu}/\partial t = 0$.) Чтобы убедиться, хороша ли эта догадка, используем ее при построении звездных моделей и проверим, имеют ли получающиеся модели ту же степень общности (одинаковый набор свободно задаваемых величин), как и в ньютоновской теории и как это ожидается из общефизических соображений. Кажущаяся более общей метрика

$$ds^2 = -a^2dt^2 - 2ab\,dr\,dt + c^2\,dr^2 + R^2\,d\Omega^2 \tag{23.4}$$

в действительности не является более общей в любом физическом смысле. Можно совершить переход к новой временной координате $t'$, определяемой соотношением

$$e^{\Phi}dt' = a\,dt + b\,dr. \tag{23.5}$$

Подставляя выражение (23.5) в (23.4) и определяя $e^{2\Lambda} \equiv b^2 + c^2$, получаем, если опустить штрих при $t$, постулированный выше линейный элемент (23.3) [1].

[1] Конечно, определить новую временную координату $t'$ из уравнения (23.5) удается только тогда, когда его можно проинтегрировать как дифференциальное уравнение для $t'$. Выбирая интегрирующий множитель $e^{\Phi}$

Необходимость допущения произвольных координат в общей теории относительности может показаться обременительной при формулировке теории, однако это дает дополнительную гибкость — всегда следует что-нибудь обращать в преимущество при формулировке и решении задач. Упрощение $g_{rt} = 0$ (называемое *координатным условием*) в уравнении (23.3) вытекает из преимущественного выбора координаты $t$. Координата $r$, однако, также в нашем распоряжении (пока она выбирается таким способом, при котором учитывается сферическая симметрия; так, нельзя положить $r' = r + \cos\theta$). Можно обратить эту свободу в преимущество, вводя новую координату $r'(r)$:

$$r' = R(r). \tag{23.6}$$

2) приведенная к «шварцшильдовской форме»

При таком выборе радиальной координаты равенство (23.3) сводится (штрихи опускаем) к линейному элементу только с двумя неизвестными функциями $\Phi(r)$ и $\Lambda(r)$:

$$ds^2 = -e^{2\Phi}\,dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2\,d\Omega^2. \tag{23.7}$$

Такая система координат и метрика использовались, начиная с пионерских работ Шварцшильда [241], Толмана [242] и Оппенгеймера и Волкова [243], в большинстве теоретических моделей релятивистских звезд. Эти особые координаты иногда называют «координатами кривизны», иногда — «шварцшильдовскими координатами». Основная идея введения этих координат заключается кратко в следующем: (шварцшильдовская координата $r$) = (собственная длина окружности)/$2\pi$.

3) выведенная более строго

Более строгое доказательство того, что в любой статической сферической системе можно ввести шварцшильдовские координаты, приводящие метрику к простой форме (23.7), см. в дополнении 23.1.

---

### 23.1. Изотропные координаты и ньютоновский предел

УПРАЖНЕНИЕ

Альтернативным набором координат, иногда используемым для статических сферических систем, является «изотропная система координат» $(t, \bar{r}, \theta, \phi)$. Метрика в изотропных координатах имеет вид

$$ds^2 = -e^{2\Phi}\,dt^2 + e^{2\mu}\,[d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2], \tag{23.8}$$

причем $\Phi$ и $\mu$ являются функциями от $\bar{r}$.

а. Найдите преобразование координат, связывающее шварцшильдовские координаты (23.7) с изотропными координатами (23.8).

---

непосредственно равным $a(r)$, т. е. $e^{\Phi} = a(r)$, мы видим, что $t' = t + \int [b(r)/a(r)]dr$ есть интеграл от (23.5). Поэтому необходимая координата $t'$ всегда существует независимо от вида функций $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ и $R(r)$, входящих в уравнение (23.4).

УПРАЖНЕНИЕ

б. Исходя из уравнения (16.2а) [или, эквивалентно, из (18.15в)], покажите, что в ньютоновском пределе метрический коэффициент Ф изотропного линейного элемента переходит в ньютоновский потенциал, а коэффициент μ становится равным —Ф. Комбинируя это с «а», найдите, что в ньютоновском пределе $\Lambda = rd\Phi/dr$.

---

## Дополнение 23.1. СТРОГИЙ ВЫВОД СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ЛИНЕЙНОГО ЭЛЕМЕНТА

В § 23.2 дан эвристический вывод сферически симметричного линейного элемента (23.7) в общем виде. В данном дополнении мы попытаемся дать более строгий вывод, применимый как к нестатическим, так и к статическим системам.

Начнем с многообразия $M^4$, на котором определена метрика $ds^2$ с лоренцевой сигнатурой. Предположим, что многообразие $M^4$ сферически симметрично в том смысле, что там любой $3 \times 3$ матрице вращения $A$ соответствует отображение (вращение) $M^4$, также называемое $A$ ($A : M^4 \to M^4 : \mathcal{P} \to A\mathcal{P}$), которое сохраняет длины всех кривых. Дальнейшие предположения и построения будут отмечены римскими цифрами в скобках (I), (II) и т.д., поэтому можно видеть, какие предположения необходимы для получения линейного элемента (23.7) Крестиками (†) отмечены предположения, которые нельзя использовать в некоторых других физически интересных ситуациях.

Для любой точки $\mathcal{P}$ образуем набор $s = \mathcal{S}(\mathcal{P}) = \{A\mathcal{P} \in M^4 \mid A \in SO(3)\}$ всех точек, эквивалентных точке $\mathcal{P}$ при вращениях. Предположим, что (I) † поверхность $s$ двумерная поверхность (за исключением центральных точек $\mathcal{P}$, для которых она нульмерна) и что (II) метрика на $s$ есть метрика стандартной 2-сферы. Тогда на $s$ будем иметь

$$(ds^2)_s = R^2(s)\, d\Omega^2, \tag{1}$$

где $d\Omega^2$ — стандартная метрика единичной сферы ($d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ для некоторых углов $\theta$ и $\phi$, определенных на $s$) и где $2\pi R$ — длина окружности на $s$. Если $M^2$ — набор всех таких поверхностей $s$, то $\mathcal{S} : M^4 \to M^2 : \mathcal{P} \to s = \mathcal{S}(\mathcal{P})$ позволяет получить из функции $R : M^2 \to \mathcal{R} : s \to R(s)$ [функция «окружности» на $M^2$, определенная равенством (1)] соответствующую функцию $R : M^4 \to \mathcal{R} : \mathcal{P} \to R(\mathcal{S}(\mathcal{P}))$, заданную на $M^4$, которая в конечном счете в некоторых случаях может использоваться в качестве координаты на $M^4$. (*Замечание*: $\mathcal{R}$ означает здесь действительные числа.)

Предположим теперь, что (III) † имеется сферически симметричное поле 4-скорости $\mathbf{u}$, определенное так, что если $\mathcal{P} = \mathcal{C}(\tau)$ есть одна траектория $\mathbf{u}$ с $\mathbf{u} = d/d\tau$, то каждая кривая $\mathcal{P} = A\mathcal{C}(\tau)$, полученная из этой траектории вращением, должна также быть траекторией $\mathbf{u}$. Ортогональная проекция $\mathbf{u}$ на любую сферу $s$ должна в таком случае быть нульмерной, поскольку на 2-сферах нет вращательно инвариантных ненулевых векторных полей. Таким образом, $\mathbf{u}$ ортогонально каждой сфере $s$. Аналогично, если две траектории $\mathbf{u}$ начинаются на некоторой одной сфере $s$, так что $\mathcal{C}_1(0) = A\mathcal{C}_2(0)$, то их будет всегда связывать одно и то же вращение $A$, т.е. $\mathcal{C}_1(\tau) = A\mathcal{C}_2(\tau)$, поскольку траектории однозначно определень

любой одной своей точкой. Тогда $\mathscr{S}(\mathscr{C}_1(\tau))$ и $\mathscr{S}(\mathscr{C}_2(\tau))$ — одинаковые кривые на $M^2$, касательный вектор которых $d/d\tau$ можно также назвать $\mathbf{u}$; таким путем мы получаем некоторое векторное поле $\mathbf{u}$ на $M^2$. Присвоим каждой траектории $\mathbf{u}$ на $M^2$ другой индекс $r$, чтобы определить функцию $r(s)$ на $M^2$. Обозначим посредством $r = r(\mathscr{S}(\mathscr{P}))$ соответствующую функцию $r$ на $M^4$ с $dr/d\tau = 0$. Поскольку функции и их градиенты на $M^2$ определяют соответствующие величины на $M^4$, внутренние произведения типа $\mathbf{d}f \cdot \mathbf{d}g$ можно определить на $M^2$ с помощью их значений на $M^4$; таким образом из метрики на $M^4$ получается метрика на $M^2$. Тогда, используя формулу (23.5), или, эквивалентно, изображая кривые на $M^2$, ортогональные линиям $r = \text{const}$, и приписывая каждой другой индекс $t$, получаем координаты с $g^{rt} = \mathbf{d}r \cdot \mathbf{d}t = 0$. Оба индекса, $r$ и $t$, были приписаны соответствующим кривым произвольно, поэтому ясно, что нельзя исключить преобразования $t' = t'(t)$ и $r' = r'(r)$.

На одной из 2-сфер $s$ на $M^4$ на гиперповерхности $t = 0$ выберем координаты $\theta$, $\phi$, произвольно зафиксировав полюс ($\theta = 0$) и начальный меридиан ($\phi = 0$). Затем распространим определение $\theta$, $\phi$ по гиперповерхности $t = 0$, потребовав, чтобы $\theta$ и $\phi$ были постоянными на кривых, ортогональных каждой 2-сфере $s$, т.е. потребовав, чтобы вектор $(\partial/\partial r)_{\theta\phi}$ был ортогонален каждой $s$ на $t = 0$. Распространим определение $\theta$ и $\phi$ гиперповерхности на $t \neq 0$, потребовав, чтобы они были постоянны на кривых, касательных $\mathbf{u}$, и, следовательно, $(\partial/\partial t)_{r\theta\phi} \sim \mathbf{u}$. Но каждая 2-сфера $s$ есть поверхность постоянных $r$ и $t$, поэтому $(\partial/\partial\theta)_{rt\phi}$ и $(\partial/\partial\phi)_{rt\theta}$ касательны к $s$, тогда как $\mathbf{u} \sim (\partial/\partial t)$ ортогональны каждой поверхности $s$. Следовательно, в только что построенной системе координат $tr\theta\phi$

$$g_{t\theta} = (\partial/\partial t) \cdot (\partial/\partial\theta) = 0 \tag{2}$$

и

$$g_{t\phi} = (\partial/\partial t) \cdot (\partial/\partial\phi) = 0. \tag{3}$$

Вектор $(\partial/\partial r)_{t\theta\phi}$ не зависит от произвольных направлений, введенных при первоначальном выборе координат $\theta$, $\phi$ на сфере $s$; он инвариантен при преобразованиях $\theta = \theta(\theta', \phi')$, $\phi = \phi(\theta', \phi')$. Но ничто, за исключением $\theta$ и $\phi$, не ввело в обсуждение элементы, неинвариантные при вращениях, поэтому вектор $(\partial/\partial r)_{t\theta\phi}$ должен быть инвариантным векторным полем относительно вращения (в отличие, скажем, от $\partial/\partial\phi$), и, следовательно, он, подобно $\mathbf{u}$, ортогонален каждой 2-сфере $s$. Из этой инвариантности следует

$$g_{r\theta} = (\partial/\partial r) \quad (\partial/\partial\theta) = 0, \tag{4}$$

$$g_{r\phi} = (\partial/\partial r) \cdot (\partial/\partial\phi) = 0, \tag{5}$$

что вместе с предварительно установленным равенством $g^{tr} = 0$ дает $g_{tr} = 0$. В результате получается формула (23.3) для линейного элемента. Если перейти к обозначениям $R$ и $T$ для радиальной и временной координат, причем координату $R$ определить формулой (1) и положить

$$\mathbf{d}T = e^{\psi}\left[\frac{1}{g_{rr}}\frac{\partial R}{\partial r}\mathbf{d}t - \frac{1}{g_{tt}}\frac{\partial R}{\partial t}\mathbf{d}r\right],$$

где $e^{\psi}$ — интегрирующий множитель, возникший из-за изменения обозначения, то получатся шварцшильдовские координаты и линейный элемент (23.7), несмотря на то, что такое преобразование возможно (т.е. несингулярно) только там, где

$\mathbf{d}R \wedge \mathbf{d}T \neq 0$:

$$(\nabla R)^2 = \frac{(\partial R/\partial t)^2}{g_{tt}} + \frac{(\partial R/\partial r)^2}{g_{rr}} \neq 0.$$

Если (IV) † пространство-время асимптотически плоское, т. е. $r \to \infty$ есть та область, где метрика принимает вид, который она имеет в специальной теории относительности, тогда произвольность координаты $t$, т. е. $t' = t'(t)$, можно исключить, потребовав, чтобы $g_{tt} = -1$ при $r \to \infty$. В таком случае производная $\partial/\partial t_{r,\,\theta,\,\phi}$ однозначно определяется естественными требованиями (независимо от произвольного выбора $\theta$, $\phi$), и если мы хотим сделать еще одно физическое предположение о том, что (V) † геометрия не зависит от времени, то можем это сформулировать как $\partial g_{\mu\nu}/\partial t = 0$.

## § 23.3. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ШВАРЦШИЛЬДОВСКИХ КООРДИНАТ

Поскольку в общей теории относительности допускается использование произвольных координат, физический смысл утверждений относительно компонент тензора или вектора и других физических величин здесь не всегда очевиден. Имеются, однако, некоторые ситуации, где интерпретация почти также прямолинейна, как в специальной теории относительности. Наиболее очевидный пример — центральная точка локально инерциальной системы координат, где принцип эквивалентности позволяет трактовать все локальные величины (величины, не содержащие кривизну пространства-времени) точно так же, как в специальной теории относительности. Второй пример — шварцшильдовские координаты для сферической системы.

**Форма любой метрики может выявлять природу используемых координат**

Первая реакция при встрече с новой метрикой — исследовать ее, но не для того, чтобы узнать о гравитационном поле (о нем можно получить непосредственную информацию из тензора кривизны), а для того, чтобы узнать о координатах. (Являются ли они, например, локально инерциальными в некоторой точке?)

В обозначения, данные координатам, не вложен какой-либо смысл. Вполне допустимо и не влияет на физику или математику релятивистской проблемы координатное преобразование $t' = \theta$, $r' = \phi$, $\theta' = r$, $\phi' = t$. Единственно, чему оно способствует, — это облегчению общения между исследователем, применяющим это преобразование и его коллегами. Таким образом, обозначения $t, r, \theta, \phi$ для шварцшильдовских координат (23.7) обеспечивают мнемоническую схему, указывающую на геометрическое содержание координат [1]. Обозначения $\theta$, $\phi$, в частности, оправданы

**Геометрический смысл шварцшильдовских координат:**

**1) $\theta$, $\phi$ — углы на сфере**

[1]) В качестве примера обозначений, вводящих в заблуждение, рассмотрите обозначения в равенстве

$$ds^2 = -e^{2\Phi(\theta')}\,d\phi'^2 + e^{2\Lambda(\theta')}\,d\theta'^2 + \theta'^2\,(dt'^2 + \sin^2 t'\,dr'^2),$$

которое эквивалентно (23.7), но в нем используются координаты $t' = \theta$, $r' = \phi$, $\theta' = r$, $\phi' = t$.

тем, что на каждой двумерной поверхности постоянных $r$ и $t$ расстояние между двумя соседними событиями равно $ds^2 = r^2\, d\Omega^2$, как это имеет место в случае стандартных координат $\theta$, $\phi$ на сфере радиусом $r$. Ясно, что площадь этой двумерной сферы равна

$$A = \int (r\, d\theta)\,(r \sin\theta\, d\phi) = 4\pi r^2. \tag{23.9}$$

Следовательно, метрика (23.7) указывает, как измерить координату $r$, которая используется в ней. Можно просто измерить (в единицах собственной длины) площадь $A$ сферы, составленной из всех точек, вращательно эквивалентных точке $\mathcal{P}$, для которой ищется величина $r$ ($\mathcal{P}$), и затем вычислить

2) $r$ «измеряет» площадь поверхности сферы

$$r(\mathcal{P}) = \left[\begin{pmatrix}\text{собственная площадь сферы,}\\ \text{проходящей через точку } \mathcal{P}\end{pmatrix}/4\pi\right]^{1/2} \tag{23.9'}$$

Шварцшильдовские координаты выбраны для удобства, а не для облегчения построения машины, измеряющей координаты. Используя их, труднее сконструировать машину для измерения $t$, чем для измерения $r$, $\theta$, $\phi$.

Измеряющее устройство может быть основано на следующих геометрических свойствах $t$: 1) на независимости от времени расстояний ($\partial g_{\alpha\beta}/\partial t = 0$) между мировыми линиями постоянного $r$, $\theta$, $\phi$; 2) на ортогональности ($g_{tr} = g_{t\theta} = g_{t\phi} = 0$) этих мировых линий к гиперповерхностям $t = \text{const}$; 3) на нумерации этих гиперповерхностей с помощью координатного времени Минковского (времени специальной теории относительности) на пространственной бесконечности, где пространство-время становится плоским. Эта нумерация приводит к связи

3) $t$ имеет 3 особых геометрических свойства

$$\Phi(\infty) = 0 \tag{23.10}$$

в метрике (23.7). (Математически эта связь налагается простым масштабным преобразованием $t' = e^{\Phi(\infty)}t$ с последующим опусканием штриха.)

Одним из «машинных» устройств, которые строят (мысленно) такую координату $t$ и в процессе построения измеряют ее, является следующее. Наблюдатели, использующие радиолокаторы, условливаются двигаться вдоль координатных линий $r$, $\theta$, $\phi = \text{const}$. Они достигают этого, приспосабливая свои скорости до тех пор, пока каждый не найдет, что радарное эхо от соседних наблюдателей или от «реперных» отсчетных точек в асимптотически плоском пространстве приходит через одинаковое время при каждом повторении. Эквивалентно, каждое возвращающееся эхо должно приходить без доплеровского сдвига; оно должно возвращаться с той же частотой, с которой было испущено. Затем вблизи пространственной бесконечности (вдали от звезды) устанавливаются задающие часы. Они сконструированы для измерения собственного времени (которое в данном случае является временем Минковского «на бесконечности») и испускают стандартный сигнал

4) описание «машинного» устройства для измерения $t$

с частотой 1 Гц. Каждый наблюдатель настраивает темп хода своих «координатных часов» в соответствии с сигналами, которые он принимает от задающих часов. Чтобы установить нуль своих «координатных» часов теперь, когда темп их хода правилен, он синхронизует свои часы с задающими часами, учитывая координатное время $\Delta t$, требуемое для движения радиолокационных сигналов от задающих часов до него. [Для вычисления времени прохождения наблюдатель предполагает, что для радиолокационных сигналов $(t_{\text{отражения}} - t_{\text{испускания}}) = (t_{\text{возвращения}} - t_{\text{отражения}}) = \Delta t$, т. е. что эхо получается путем инверсии времени относительно отражающего события. Эта инвариантность относительно обращения времени позволяет отличить время $t$ в метрике (23.7) от более общих координат $t$, допускаемых равенством (23.4).] Каждый наблюдатель, движущийся вдоль координатной линии ($r$, $\theta$, $\phi$ = const), имеет теперь часы, которые измеряют временную координату $t$ в его окрестности.

Вышеприведенное обсуждение устанавливает природу шварцшильдовских координат, входящих в (23.7), с помощью их собственных геометрических свойств. Величины $r$ и $t$ не только соответственно радиальная и временная переменные (причем $\partial/\partial r$ и $\partial/\partial t$ являются соответственно пространственноподобным и времениподобным векторами, которые ортогональны сферам, определяемым вращательной симметрией), они имеют особые свойства ($4\pi r^2$ = площадь поверхности; $\partial g_{\mu\nu}/\partial t = 0$; $\partial/\partial r \cdot \partial/\partial t = g_{rt} = 0$; $\partial/\partial t \times \partial/\partial t = g_{tt} = -1$ при $r = \infty$); которые отличают их от других возможных выборов координат [$r' = f(r)$, $t' = t + F(r)$]. Не утверждается, что они являются единственными координатами, которые разумно называть $r$ и $t$; альтернативный выбор («изотропные координаты») см. в упражнении 23.1. Однако шварцшильдовские координаты разумны, недвусмысленны, полезны и часто используются.

**Другие координаты возможны, но шварцшильдовские являются особенно простыми**

## § 23.4. ОПИСАНИЕ ВЕЩЕСТВА ВНУТРИ ЗВЕЗДЫ

**Вещество внутри звезды должно рассматриваться как идеальная жидкость**

Вещество внутри любой звезды с высокой точностью представляет собой идеальную жидкость. Сдвиговые напряжения пренебрежимо малы, и перенос энергии, определяемый по «гидродинамической шкале времени», также пренебрежимо мал. Поэтому при построении модели разумно описывать вещество параметрами идеальной жидкости в системе отсчета, покоящейся относительно жидкости:

**Параметры, описывающие идеальную жидкость:**

**1) $\rho$, $p$, $n$,**

$$\rho = \rho(r) = \text{плотность массы-энергии};$$
$$p = p(r) = \text{изотропное давление};$$
$$n = n(r) = \text{плотность числа барионов}; \qquad (23.11)$$
$$u^\mu = u^\mu(r) = \text{4-скорость жидкости};$$

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)\, u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} = \text{тензор энергии-импульса жидкости.} \tag{23.12}$$

(Обсуждение в рамках курса 1 см. в дополнении 5.1, а более подробное обсуждение в рамках курса 2 — в § 22.2 и 22.3.) Чтобы звезда была статической, каждый ее элемент должен всегда оставаться в покое в статической системе координат, т. е. каждый элемент должен двигаться вдоль мировой линий постоянных $r$, $\theta$, $\phi$, иначе говоря, каждый элемент должен иметь следующие компоненты 4-скорости:

2) и

$$u^r = dr/d\tau = 0,\ u^\theta = d\theta/d\tau = 0,\ u^\phi = d\phi/d\tau = 0. \tag{23.13а}$$

Нормировка 4-скорости

$$-1 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = g_{tt}u^t u^t = -e^{2\Phi}u^t u^t$$

определяет тогда $u^t$

$$u^t = dt/d\tau = e^{-\Phi},\quad \mathbf{u} = e^{-\Phi}\,\partial/\partial t; \tag{23.13б}$$

используя затем (23.13б), общую форму (23.12) для тензора энергии-импульса и форму (23.7) для метрики, можно найти $T^{\mu\nu}$:

3) т

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho e^{-2\Phi}, \qquad T^{rr} = p e^{-2\Lambda}, \qquad T^{\theta\theta} = p r^{-2}, \\ T^{\phi\phi} &= p r^{-2}\sin^{-2}\theta, \qquad T^{\alpha\beta} = 0, \text{ если } \alpha \neq \beta. \end{aligned} \tag{23.14}$$

Хотя эти компоненты тензора энергии-импульса в шварцшильдовских координатах полезны для вычислений, наличие нормировочных множителей $e^{-2\Phi}$, $e^{-2\Lambda}$, $r^{-2}$, $r^{-2}\sin^{-2}\theta$ делает их неудобными для физических интерпретаций. Более удобны компоненты ортонормальных тетрад, переносимых жидкими элементами («собственные системы отсчета», см. § 13.6):

Собственная система отсчета жидких элементов

$$\mathbf{e}_{\hat t} \equiv \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{e^\Phi}\frac{\partial}{\partial t},\quad \mathbf{e}_{\hat r} = \frac{1}{e^\Lambda}\frac{\partial}{\partial r},\quad \mathbf{e}_{\hat\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \mathbf{e}_{\hat\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}; \tag{23.15а}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{\hat t} = e^\Phi = \mathbf{d}t,\quad \boldsymbol{\omega}^{\hat r} = e^\Lambda\,\mathbf{d}r,\quad \boldsymbol{\omega}^{\hat\theta} = r\,\mathbf{d}\theta,\quad \boldsymbol{\omega}^{\hat\phi} = r\sin\theta\,\mathbf{d}\phi; \tag{23.15б}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_{\hat t},\quad u^{\hat t} = 1,\quad u^{\hat r} = e^{\hat\theta} = u^{\hat\phi} = 0; \tag{23.15в}$$

Компоненты $u$ и $T$ в собственной системе отсчета

$$T_{\hat t\hat t} \equiv T_{\hat 0\hat 0} = \rho,\quad T_{\hat r\hat r} = T_{\hat\theta\hat\theta} = T_{\hat\phi\hat\phi} = p,\quad T_{\hat\alpha\hat\beta} = 0, \text{ если } \alpha \neq \beta. \tag{23.15г}$$

См. упражнение 23.2.

Внутреннее строение звезды, характеризуемое набором функций $\Phi(r)$, $\Lambda(r)$, $\rho(r)$, $p(r)$, $n(r)$, частично определяется уравнениями поля Эйнштейна $G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}$ и частично законом локального сохранения энергии-импульса жидкости $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$. Однако

этих уравнений недостаточно для однозначного определения внутреннего строения звезды. Необходимо знать также функциональную зависимость давления $p$ и плотности $\rho$ от плотности числа барионов $n$:

$$p = p(n), \quad \rho = \rho(n). \tag{23.16}$$

Уравнение состояния: 1) в общем виде

Обычно невозможно получить $p$ и $\rho$, зная только $n$. Необходимо вдобавок иметь информацию о температуре $T$ или энтропии на барион $s$; тогда законы термодинамики и уравнение состояния будут определять оставшиеся термодинамические переменные:

$$p = p(n, s), \quad \rho = \rho(n, s), \ldots .$$

(Более полное обсуждение в рамках курса 2 см. в § 22.2 и в дополнении 22.1.) Чтобы перейти от найденных термодинамических величин $p(n, s)$ и $\rho(n, s)$ к $p(n)$ и $\rho(n)$, необходимо иметь информацию о тепловых свойствах звезды и в особенности о том, каким способом генерация энергии и тепловой поток стремятся распределить энтропию $s = s(n)$: $p(n) = p[n, s(n)]$, $\rho(n) = \rho[n, s(n)]$.

2) в «однопараметрической форме» $p = p(n)$, $\rho = \rho(n)$

Обычно рассматривают три важных приложения теории релятивистских звезд: нейтронные звезды, белые карлики и сверхмассивные звезды (звезды с $M \gtrsim 10^3 M_\odot$, которые, согласно теории, могут существовать, однако существование их еще не было подтверждено наблюдениями). К счастью, во всех трех случаях переход от $p = p(n, s)$, $\rho = \rho(n, s)$ к $p = p(n)$, $\rho = \rho(n)$ тривиален.

Обоснование идеализированного уравнения состояния: 1) для нейтронных звезд

Рассмотрим сначала нейтронную звезду. Хотя по обычным стандартам нейтронная звезда горячая, по любой шкале температур для ядерного вещества она так холодна, что по существу все ее тепловые степени свободы заморожены («вырожденный газ», «квантовая жидкость»). Детальное изучение вещества нейтронной звезды лежит за пределами возможности существующей теории (учет взаимодействия между барионами, образование при достаточно больших давлениях гиперонов и мезонов), но это неважно. Дело в том, что вещество звезды имеет плотности, сравнимые с плотностью атомного ядра ($2 \cdot 10^{14}$ г/см$^3$) и выше. Из всех сведений о ядерном веществе (см., например, [244]), следует, что оно вырождено и (температуру вырождения) можно оценить по порядку величины, рассматривая как идеальный нейтронный ферми-газ. (В нормальном атомном ядре нейтроны составляют несколько больше 50% всех барионов, остальные проценты падают на долю протонов; в нейтронной звезде нейтроны составляют до 99% всех барионов.) При аппроксимации вещества нейтронной звезды идеальным нейтронным ферми-газом считается, что нейтроны занимают квантовые состояния свободной частицы, причем в каждом заполненном состоянии имеются две частицы с противоположными спинами; когда энергия частицы достигает уровня «энергии Ферми», происходит резкий переход от 100%-ной степени заполненности квантовых состояний к пустым состояниям (дополнительно о таком идеальном ферми-газе см. в книге Киттеля [245],

§ 19, или на вводном уровне см. в [246], § 16-5). В веществе при ядерной плотности энергия Ферми

$$E_{\text{Ферми}} \sim 30 \text{ МэВ, или } 3 \cdot 10^{11}\text{K},$$

а при более высоких плотностях температура, необходимая для размораживания вырожденности, даже больше. Другими словами, для вещества при ядерных и более высоких плотностях уже при нулевой температуре кинетическая энергия частиц (определяемая принципом запрета Паули и их энергией Ферми) является главным источником давления. Ядерные силы вносят большую поправку в это давление, но при $T \lesssim 30$ МэВ $= 3 \cdot 10^{11}$K энергии теплового движения не существенны.

Звезда, сжимающаяся от нормального состояния к состоянию нейтронной звезды, см. гл. 24, при температурах $\gtrsim 10^{10}$K испускает гигантский поток нейтрино и вследствие этого через несколько секунд после образования охлаждается до $T \ll 3 \cdot 10^{11}$K. Следовательно, во всех нейтронных звездах, время жизни которых превышает несколько секунд, можно пренебречь тепловыми вкладами в давление и плотность, т. е. можно положить

$$p(n, s) = p(n, s = 0) = p(n), \quad \rho(n, s) = \rho(n, s = 0) = \rho(n).$$

2) для белых карликов

В белом карлике ситуация аналогична, за исключением того, что здесь при рассмотрении давления ферми-газа и вырождения мы имеем дело не с нейтронами, а с электронами. Типичные температуры белых карликов удовлетворяют соотношению

$$kT \ll E_{\text{ферми-электронов}};$$

за давление и плотность энергии в основном ответственна кинетическая энергия Ферми (принцип запрета Паули), а не хаотическая тепловая энергия $kT$, т. е. можно положить

$$p(n, s) = p(n, s = 0) = p(n), \quad \rho(n, s) = \rho(n, s = 0) = \rho(n).$$

3) для сверхмассивных звезд

В сверхмассивной звезде (см. гл. 24) ситуация совсем другая. Давление и плотность энергии здесь полностью определяются температурой и энтропией. Однако в результате конвективного перемешивания в звезде устанавливается однородное независящее от радиуса распределение энтропии

$$s = \text{const},$$

поэтому можно записать

$$p(n, s) = p_s(n), \qquad \rho(n, s) = \rho_s(n).$$

($p_s(n)$, $\rho_s(n)$ — функции, зависящие в звезде от однородной энтропии $s$ на барион)

Во всех трех случаях — нейтронные звезды, белые карлики, сверхмассивные звезды — соотношения $p(n)$ и $\rho(n)$ рассматриваются как «уравнения состояния»; задавшись ими, можно определить внутреннее строение звезды без дальнейшего обращения к ее тепловым свойствам.

УПРАЖНЕНИЕ

**23.2. Собственные системы отсчета жидких элементов**

а. Убедитесь, что уравнения (23.15а) и (23.15б) определяют в каждом событии в пространстве-времени ортонормальную тетраду и ее дуальные базисные 1-формы.

б. Убедитесь, что компоненты 4-скорости жидкости относительно этих тетрад даются уравнениями (23.15в). Почему эти компоненты гарантируют, что тетрады образуют «собственные системы отсчета» жидких элементов?

в. Проверьте уравнения (23.15г) для компонент тензора энергии-импульса.

## § 23.5. УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННЕГО СТРОЕНИЯ ЗВЕЗДЫ

**Пять уравнений для пяти функций $\Phi$, $\Lambda$, $p$, $\rho$, $n$, определяющих внутреннее строение звезды**

Внутреннее строение релятивистской звезды определяется пятью функциями радиуса $r$: метрическими функциями $\Phi(r)$, $\Lambda(r)$, давлением $p(r)$, плотностью массы-энергии $\rho(r)$ и плотностью числа барионов $n(r)$. Следовательно, для однозначного определения внутреннего строения звезды необходимо иметь пять уравнений для этих функций плюс граничные условия. Два уравнения внутреннего строения звезды — уравнения состояния $p(n)$ и $\rho(n)$ — нам уже известны. Оставшиеся три должны быть неотъемлемым содержанием уравнений поля Эйнштейна и закона локального сохранения энергии-импульса $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$.

Известно, что закон локального сохранения энергии-импульса жидкости получается как тождество из уравнений поля Эйнштейна. Поэтому без потери информации можно задать все 10 уравнений поля и явно не учитывать закон локального сохранения энергии-импульса. Однако такой подход неэффективен.

**Наиболее эффективный метод решения уравнений Эйнштейна**

Почти всегда уравнения $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ можно свести к виду, удобному для приложений, значительно легче, чем уравнения поля. Поэтому наиболее эффективный метод заключается в следующем:

1) определить 4 уравнения $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$; 2) определить достаточное число (6) уравнений поля для получения полного набора ($6 + 4 = 10$); 3) определить оставшиеся 4 уравнения поля для проверки результатов «1» и «2».

Читатель курса 2 знает (§ 22.3), что уравнения $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ для идеальной жидкости принимают особенно простой вид, если их спроектировать 1) на 4-скорость жидкости $\mathbf{u}$ и 2) ортогонально $\mathbf{u}$.

**Вывод уравнения гидростатического равновесия**

Проекция на $\mathbf{u}$ ($u_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$) дает локальный закон сохранения энергии (22.11а):

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -(\rho + p)\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\rho + p}{n}\frac{dn}{d\tau},$$

где $\mathbf{u} = d/d\tau$, т. е. $\tau$ — собственное время вдоль мировой линии любого выбранного элемента жидкости. Для статической звезды или для любой другой статической системы обе стороны этого уравнения должны тождественно обращаться в нуль (собственная плотность любого жидкого элемента никогда не претерпевает изменений). Проекция $T^{\mu\nu}{}_{;\,\nu} = 0$ на направление, ортогональное $\mathbf{u}$, дает уравнение

$$\begin{pmatrix}\text{инертная масса}\\ \text{на единицу объема}\end{pmatrix} \times (\text{4-ускорение}) = -\begin{pmatrix}\text{градиент давления,}\\ \text{спроектированный}\\ \text{перпендикулярно } \mathbf{u}\end{pmatrix},$$

т. е.

$$(\rho + p)\,\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = -[\nabla p + (\nabla_{\mathbf{u}} p)\,\mathbf{u}]$$

[см. уравнение (22.13)]. В применении к статической звезде это уравнение показывает, какой градиент давления необходим, чтобы удержать жидкий элемент от падения. Поскольку давление зависит только от $r$, важна лишь радиальная компонента этого уравнения. В шварцшильдовской системе координат радиальная компонента гласит [см. линейный элемент (23.7) и компоненты 4-скорости (22.13)]:

$$(\rho + p)\,u_{r;\,\nu}u^{\nu} = -(\rho + p)\,\Gamma^{\alpha}{}_{r\nu}u_{\alpha}u^{\nu} =$$

$$= -(\rho + p)\,\Gamma^{0}{}_{r0}u_0u^0 = (\rho + p)\,\Phi_{,\,r} = -p_{,\,r}. \qquad (23.17)$$

(Читатели курса 1 могут в конце параграфа вывести это уравнение с самого начала, упражнение 23.3.) В ньютоновском пределе $\Phi$ переходит в ньютоновский потенциал (поскольку $g_{00} = -e^{2\Phi} \approx \approx -1 - 2\Phi$), а давление становится намного меньше, чем плотность массы-энергии; следовательно, уравнение (23.17) принимает вид

$$\rho\Phi_{,\,r} = -p_{,\,r}. \qquad (23.17\text{Н})$$

Это ньютоновское уравнение, описывающее баланс гравитационной силы и градиента давления.

**Сравнение ньютоновской и эйнштейновской точек зрения на гидростатическое равновесие**

Градиент давления, предотвращающий падение жидкого элемента, выступает в теории Эйнштейна как источник ускорения. Это ускорение является причиной того, что жидкий элемент, чтобы удержаться на мировой линии с фиксированным значением $r$, отклоняется от геодезического движения (от «опорной мировой линии»; от свободного падения в центр звезды). В ньютоновской теории за опорную мировую линию принимают мировую линию с фиксированным значением $r$, «гравитационную силу» рассматривают как силу, пытающуюся (безуспешно, поскольку она сбалансирована градиентом давления) столкнуть частицу с мировой линии с фиксированным значением $r$ на геодезическую мировую линию. Величины ускорений, «действительно имеющих место» (теория Эйнштейна) или «пытающихся иметь место» (ньютоновская теория), в наинизшем порядке одинаковы (но противопо-

ложно направлены), поэтому не удивительно, что уравнения (23.17) и (23.17Н) отличаются только в деталях.

Обратимся затем к уравнению поля Эйнштейна. Здесь, как это часто бывает, компоненты уравнения поля в ортонормальной системе отсчета жидкости [уравнения (23.15а) и (23.15б)] проще, чем компоненты в координатном базисе. Тензор энергии-импульса $T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ в ортонормальной системе отсчета уже известен [уравнение (23.15г)]. Тензор Эйнштейна $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ читатели курса 2 уже вычисляли (упражнение 14.13), а читатели курса 1 встретятся с этой задачей в конце данного параграфа (упражнение 23.4).

**Вывод уравнения для $\hat{0}\hat{0}$**

Остается приравнять $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ и $8\pi T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$. Рассмотрим сначала компоненту $\hat{0}\hat{0}$ уравнений поля:

$$G_{\hat{0}\hat{0}} = r^{-2} - r^{-2}e^{-2\Lambda} - r^{-1}\,(d/dr)\,(e^{-2\Lambda}) = \\ = r^{-2}\,(d/dr)\,[r\,(1 - e^{-2\Lambda})] = 8\pi T_{\hat{0}\hat{0}} = 8\pi\rho.$$

Это уравнение довольно легко решить, так как оно представляет собой дифференциальное уравнение, *линейное по* $e^{-2\Lambda}$. Сосредоточим внимание на величине $r\,(1 - e^{-2\Lambda})$. Обозначим ее через $2m(r)$ (пока только обозначение!); таким образом, имеем

$$2m \equiv r\,(1 - e^{-2\Lambda}),\quad e^{2\Lambda} = (1 - 2m/r)^{-1}. \tag{23.18}$$

Используя это обозначение, перепишем компоненту $\hat{0}\hat{0}$ тензора Эйнштейна в виде

$$G_{\hat{0}\hat{0}} = \frac{2}{r^2}\,\frac{dm\,(r)}{dr} = 8\pi\rho.$$

Проинтегрировав ее, найдем

$$m\,(r) = \int_0^r 4\pi r^2\rho\,dr + m\,(0). \tag{23.19}$$

Если постоянная интегрирования $m\,(0)$ равна нулю, то геометрия пространства в начале координат гладкая (физически приемлемая), а если $m\,(0)$ имеет ненулевое значение, то геометрия пространства в начале координат сингулярна (физически неприемлемая: нет локально лоренцевой системы отсчета в $r = 0$):

$$ds^2 = [1 - 2m\,(0)/r]^{-1}\,dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) \approx \\ \approx -\,[r/2m\,(0)]\,dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) \\ \text{при } r \approx 0, \text{ если } m\,(0) \neq 0; \tag{23.20}$$

$$ds^2 = [1 - (8\pi/3)\,\rho_c r^2]^{-1}\,dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) \approx \\ \approx dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) \text{ при } r \approx 0, \text{ если } m\,(0) = 0.$$

**Определение «массы-энергии $m\,(r)$ внутри радиуса $r$»**

Величина $m\,(r)$, определяемая равенством (23.18) и вычисленная по формуле (23.19) при $m\,(0) = 0$ является релятивистским аналогом «массы-энергии внутри радиуса $r$». Подробно эта анология разъясняется в дополнении 23.2.

Вывод уравнения для Φ

Обратимся затем к компоненте $\hat{r}\hat{r}$ уравнений поля:

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = -r^{-2} + r^{-2}e^{-2\Lambda} + 2r^{-1}e^{-2\Lambda}\, d\Phi/dr = 8\pi T_{\hat{r}\hat{r}} = 8\pi p.$$

Разрешая это уравнение относительно производной от Φ и заменяя $e^{-2\Lambda}$ на $1-2m/r$, получаем выражение для градиента потенциала Φ:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r-2m)}. \tag{23.21}$$

В ньютоновском пределе это выражение сводится к известной формуле

$$d\Phi/dr = m/r^2. \tag{23.21Н}$$

При изучении внутреннего строения звезды уравнение (23.17) заменяется эквивалентным уравнением, полученным с помощью (23.21):

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r-2m)}. \tag{23.22}$$

Уравнение гидростатического равновесия в форме «ОВ»

Уравнение (23.22) называется уравнением гидростатического равновесия Оппенгеймера — Волкова (ОВ). Его ньютоновский предел хорошо известен:

$$dp/dr = -\rho m/r^2. \tag{23.22Н}$$

Сравните две модели звезды — релятивистскую и ньютоновскую, — предполагая, что на данном радиусе $r$ [определяемом в обоих случаях из формулы (собственная площадь) $= 4\pi r^2$] обе конфигурации имеют одинаковые значения $\rho$, $p$ и $m$. Тогда в релятивистской модели градиент давления равен

$$\frac{dp}{d\,(\text{собственное радиальное расстояние})} = \frac{dp}{e^{\Lambda}\,dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r^2(1-2m/r)^{1/2}}, \tag{23.23}$$

а в ньютоновской модели —

$$\frac{dp}{d\,(\text{собственное радиальное расстояние})} = \frac{dp}{dr} = -\frac{\rho m}{r^2}. \tag{23.23Н}$$

Сравнение градиентов давления в ньютоновской и релятивистской звездах

Градиент давления в релятивистской модели больше, чем в ньютоновской, поскольку 1) числитель больше (добавляется в оба сомножителя давление) и 2) знаменатель меньше [включен множитель, учитывающий сокращение $(1-2m/r)^{1/2}$]. Следовательно, по мере продвижения в глубь звезды давление растет быстрее, чем это предсказывается ньютоновской теорией. Кроме того, этот рост давления является в некотором смысле «саморазгоняющимся». Чем больше увеличивается давление, тем больше становятся поправочные к давлению члены, входящие в числитель (23.23), а чем больше эти члены, тем быстрее растет давление при продвижении

в глубь звезды. Геометрический множитель $[1-2m(r)/r]^{1/2}$ в знаменателе (23.23) дополнительно увеличивает этот «саморазгоняющийся» рост давления по направлению к центру.

Уместно кратко подытожить ситуацию: общая теория относительности по сравнению с ньютоновской теорией предсказывает в стационарном теле более мощные гравитационные силы. Эти силы наряду с другими важными эффектами могут подвергнуть гравитационному коллапсу некоторые белые карлики и сверхмассивные звезды в тех случаях (см. гл. 24), когда ньютоновская теория предсказывает устойчивое гидростатическое равновесие. Из анализа устойчивости элементарно следует, что не существует звезды в гидростатическом равновесии, для которой $2m(r)/r \geqslant 1$ (иллюстрацию см. в дополнении 23.3, а обсуждение в § 23.8); этот критерий не имеет места в ньютоновской теории.

**Уравнения внутреннего строения звезды, резюме**

Теперь у нас в руках 5 уравнений внутреннего строения звезды [2 уравнения состояния (23.16); уравнение (23.19), выражающее $m(r) = \frac{1}{2} r(1-e^{-2\Lambda})$ в виде объемного интеграла от $r$; уравнение источника (23.21) для Ф; уравнение гидростатического равновесия (23.22) в форме OB] для 5 структурных функций $\rho$, $p$, $n$, Ф, $\Lambda$. Если вышеописанная теория релятивистских звезд сформулирована правильно, тогда каждое из оставшихся 8 уравнений поля Эйнштейна $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 8\pi T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ должно быть или бессодержательным («0 = 0»), или следствием 5 уравнений внутреннего строения звезды. То, что это действительно так, можно проверить прямыми, но громоздкими вычислениями.

Для построения модели звезды наряду с уравнениями внутреннего строения необходимы также граничные условия. Чтобы облегчить постановку граничных условий, рассмотрим в следующем параграфе внешнее гравитационное поле звезды.

---

**УПРАЖНЕНИЯ**

### 23.3. Закон локального сохранения энергии-импульса [1])

Запишите в шварцшильдовской системе координат (23.7) четыре компоненты уравнения $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ для тензора энергии-импульса (23.14). [*Ответ*: Только $T^{\tau\beta}{}_{;\beta} = 0$ дает нетривиальный результат, а именно уравнение (23.17).]

### 23.4. Тензор кривизны Эйнштейна[2])

Вычислите компоненты тензора кривизны Эйнштейна $G_{\alpha\beta}$ в шварцшильдовской системе координат. Выполните затем преобразование, чтобы получить компоненты $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$, в ортонормальной системе отсчета (23.15а) и (23.15б). [См. дополнение 8.6 или 14.2 и уравнение (14.7).]

---

[1]) Это упражнение предназначено для читателей, не изучавших гл. 22.
[2]) Это упражнение предназначено для читателей, не изучавших гл. 14.

в глубь звезды. Геометрический множитель $[1-2m(r)/r]^{1/2}$ в знаменателе (23.23) дополнительно увеличивает этот «саморазгоняющийся» рост давления по направлению к центру.

Уместно кратко подытожить ситуацию: общая теория относительности по сравнению с ньютоновской теорией предсказывает в стационарном теле более мощные гравитационные силы. Эти силы наряду с другими важными эффектами могут подвергнуть гравитационному коллапсу некоторые белые карлики и сверхмассивные звезды в тех случаях (см. гл. 24), когда ньютоновская теория предсказывает устойчивое гидростатическое равновесие. Из анализа устойчивости элементарно следует, что не существует звезды в гидростатическом равновесии, для которой $2m(r)/r \geqslant 1$ (иллюстрацию см. в дополнении 23.3, а обсуждение в § 23.8); этот критерий не имеет места в ньютоновской теории.

**Уравнения внутреннего строения звезды, резюме**

Теперь у нас в руках 5 уравнений внутреннего строения звезды [2 уравнения состояния (23.16); уравнение (23.19), выражающее $m(r) = \frac{1}{2}r(1-e^{-2\Lambda})$ в виде объемного интеграла от $r$; уравнение источника (23.21) для Ф; уравнение гидростатического равновесия (23.22) в форме OB] для 5 структурных функций $\rho$, $p$, $n$, Ф, $\Lambda$. Если вышеописанная теория релятивистских звезд сформулирована правильно, тогда каждое из оставшихся 8 уравнений поля Эйнштейна $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 8\pi T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ должно быть или бессодержательным («0 = 0»), или следствием 5 уравнений внутреннего строения звезды. То, что это действительно так, можно проверить прямыми, но громоздкими вычислениями.

Для построения модели звезды наряду с уравнениями внутреннего строения необходимы также граничные условия. Чтобы облегчить постановку граничных условий, рассмотрим в следующем параграфе внешнее гравитационное поле звезды.

---

**УПРАЖНЕНИЯ**

**23.3. Закон локального сохранения энергии-импульса** [1])

Запишите в шварцшильдовской системе координат (23.7) четыре компоненты уравнения $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ для тензора энергии-импульса (23.14). [*Ответ*: Только $T^{\tau\beta}{}_{;\beta} = 0$ дает нетривиальный результат, а именно уравнение (23.17).]

**23.4. Тензор кривизны Эйнштейна**[2])

Вычислите компоненты тензора кривизны Эйнштейна $G_{\alpha\beta}$ в шварцшильдовской системе координат. Выполните затем преобразование, чтобы получить компоненты $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$, в ортонормальной системе отсчета (23.15а) и (23.15б). [См. дополнение 8.6 или 14.2 и уравнение (14.7).]

[1]) Это упражнение предназначено для читателей, не изучавших гл. 22.
[2]) Это упражнение предназначено для читателей, не изучавших гл. 14.

### Дополнение 23.2. МАССА-ЭНЕРГИЯ ВНУТРИ РАДИУСА $r$

Полная масса-энергия $M$ изолированной звезды полностью определена (гл. 19), но не полностью определено в общем случае распределение этой массы-энергии от точки к точке внутри звезды и в ее гравитационном поле (нет однозначного «гравитационного тензора энергии-импульса»). Это было решающим утверждением § 20.4 (курс 2).

В общем случае это утверждение справедливо. Однако для сферической звезды, и только для нее, дело обстоит иначе. Сферическая симметрия позволяет выбрать физически разумное распределение полной массы-энергии. В шварцшильдовских координатах оно определяется формулой

$$\text{«полная масса-энергия внутри радиуса } r\text{»} \equiv m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr. \tag{1}$$

Эту формулу можно достаточно убедительно доказать, если только рассмотреть обобщение ее на случай зависящих от времени сферически симметричных звезд (пульсирующих, коллапсирующих или взрывающихся; см. гл. 26 и 32 и особенно упражнение 32.7). Для них получается, что об изменении со временем массы-энергии $m$, связанной с данным шаром вещества (с заданным числом барионов), можно судить лишь по тем локально измеримым потокам энергии, которые можно зарегистрировать на границе шара. [Такие потоки энергии могут представлять собой мощность, затрачиваемую силами давления на работу против передвижения граничной поверхности, или потоки тепла, или потоки излучения (фотонные или нейтринные). Однако, поскольку в силу сферической симметрии гравитационные волны не существуют (гл. 35 и 36), ни физическая интуиция, ни уравнения Эйнштейна не подсказывают нам, чтобы мы обращались к проблемам локализации гравитационно-волновой энергии.] Поэтому на энергию $m$ не налагается математическое условие локализации, а используется то обстоятельство, что перенос энергии (при таком определении $m$) обнаруживается локальными измерениями. [О математических деталях, связанных с $m(r, t)$ в случае зависимости от времени, см. работы [184, 247] и упражнение 32.7.]

Помимо описанного выше критического свойства $m(r)$, связанного с «локальным потоком энергии», имеются еще три свойства, подтверждающие отождествление $m(r)$ с массой-энергией. Перечислим их:

1. Повсюду вне звезды

$$m(r) = M \equiv \left( \begin{array}{l} \text{полная масса-энергия звезды,} \\ \text{измеренная с помощью третьего} \\ \text{закона Кеплера для удаленных} \\ \text{планет} \end{array} \right); \tag{2}$$

доказательство см. в § 23.6.

2. Для ньютоновской звезды $m(r)$ является той «массой внутри радиуса $r$», которая имеет однозначный смысл.

3. Для релятивистской звезды $m(r)$ точно расщепляется на «массу-энергию покоя» $m_0(r)$, «внутреннюю энергию $U(r)$» и «гравитационную потенциальную энергию» $\Omega(r)$.

Чтобы признать и оценить расщепление

$$m(r) = m_0(r) + U(r) + \Omega(r), \tag{3}$$

поступим следующим образом. Расщепим вначале полную плотность массы-энергии $\rho$ на часть $\mu_0 n$, обусловленную массой покоя, где $\mu_0$ — средняя масса покоя имеющихся типов барионов, и на часть $\rho - \mu_0 n$, обусловленную внутренней тепловой энергией, энергией сжатия и т. д. Заметим далее, что собственный объем оболочки толщиной $dr$ равен

$$d\mathscr{V} = 4\pi r^2 (e^{\Lambda}\, dr) = 4\pi r^2 (1 - 2m/r)^{-1/2}\, dr, \tag{4}$$

а не $4\pi r^2\, dr$. Отсюда полная масса покоя, содержащаяся внутри радиуса $r$, есть

$$m_0 = \int_0^r \mu_0 n\, d\mathscr{V} = \int_0^r 4\pi r^2 (1 - 2m/r)^{-1/2} \mu_0 n\, dr, \tag{5}$$

а полная внутренняя энергия равна

$$U = \int_0^r (\rho - \mu_0 n)\, d\mathscr{V} = \int_0^r 4\pi r^2 (1 - 2m/r)^{-1/2} (\rho - \mu_0 n)\, dr. \tag{6}$$

Вычтем $m_0$ и $U$ из полной массы-энергии $m$, оставшаяся величина должна быть гравитационной потенциальной энергией

$$\Omega = -\int_0^r \rho\, [(1 - 2m/r)^{-1/2} - 1]\, 4\pi r^2\, dr \approx -\int_0^r (\rho m/r)\, 4\pi r^2\, dr. \tag{7}$$

↑

ньютоновский предел $m/r \ll 1$

(См. упражнение 23.7.)

## § 23.6. ВНЕШНЕЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

Вне звезды плотность и давление обращаются в нуль, поэтому необходимо рассматривать только метрические параметры $\Phi$ и $\Lambda = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2m/r)$. Из уравнения (23.19) видно, что для значений $r$, превышающих $R$ (вне звезды), «масса внутри радиуса $r$», $m(r)$, остается постоянной. Эта постоянная обозначается через $M$:

$$m(r) = M \text{ для } r > R \text{ (т. е. вне звезды).} \tag{23.25}$$

Интегрируя уравнение (23.21) при $p = 0$ и $m = M$ и налагая граничное условие (23.10) на $\Phi$ при $r = \infty$ («нормировка масштаба времени на $r = \infty$»), находим

$$\Phi(r) = \tfrac{1}{2}\ln(1 - 2M/r) \quad \text{для} \quad r > R. \tag{23.26}$$

Пространство-время вне звезды обладает «шварцшильдовской» геометрией

Следовательно, вне звезды геометрия пространства-времени (23.7) принимает вид

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{(1-2M/r)} + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2). \quad (23.27)$$

Она называется «шварцшильдовской геометрией» или «шварцшильдовским гравитационным полем», или «шварцшильдовским линейным элементом», поскольку была открыта Карлом Шварцшильдом [248] как точное решение уравнений поля Эйнштейна, причем он сделал это спустя несколько месяцев после формулировки Эйнштейном общей теории относительности.

В области пространства-времени $r \gg 2M$, где геометрия приблизительно плоская, справедлива ньютоновская теория тяготения и ньютоновский потенциал равен

$$\Phi = -M/r \text{ для } r > R,\ r \gg 2M. \quad (23.26Н)$$

Полная масса-энергия звезды

Следовательно, $M$ — масса, которая определяет кеплеровские движения планет в удаленном, ньютоновском гравитационном поле, т. е. это есть «полная масса-энергия» звезды (см. гл. 19 и 20). Поскольку метрика (23.27) вдали от звезды точно диагональна ($g_{tj} \equiv 0$), полный момент импульса звезды должен равняться нулю. Этот результат означает, что внутренние движения у жидкости отсутствуют.

## § 23.7. КАК ПОСТРОИТЬ ЗВЕЗДНУЮ МОДЕЛЬ

Полная система уравнений, описывающих внутреннее строение звезды

Уравнения внутреннего строения звезды (23.16), (23.19), (23.21), (23.22), соответствующие граничные условия (которые будут обсуждаться ниже) и линейный элемент имеют вид

**Линейный элемент**

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + \frac{dr^2}{1-2m/r} + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2) =$$
$$= -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-2M/r} +$$
$$+ r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2) \quad \text{для } r > R. \quad (23.27')$$

**Уравнение для массы**

$$m = \int_0^r 4\pi r^2 \rho\,dr, \quad \text{причем } m(r=0) = 0. \quad (23.28а)$$

**Уравнение гидростатического равновесия в форме ОВ**

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho+p)(m+4\pi r^3 p)}{r(r-2m)}, \text{ причем } p(r=0) = p_c =$$
$$\text{центральное давление.} \quad (23.28б)$$

**Уравнения состояния**

$$p = p(n), \qquad (23.28в)$$

$$\rho = \rho(n). \qquad (23.28г)$$

**Уравнение источника для Ф**

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{(m + 4\pi r^3 p)}{r(r-2m)}, \quad \text{причем } \Phi(r=R) = \frac{1}{2}\ln(1-2M/R). \qquad (23.28д)$$

**Как решать уравнения, описывающие внутреннее строение звезды**

Чтобы построить звездную модель, можно поступить следующим образом.

Задать вначале уравнения состояния (23.28в) и (23.28г), значение давления $p_c$ в центре, а также произвольное (которое будет позже перенормировано) значение $\Phi_0$ для $\Phi$ ($r = 0$). Граничные условия

$$p(r=0) = p_c, \quad \Phi(r=0) = \Phi_0, \quad m(r=0) = 0$$

являются достаточными для однозначного определения решения связанных уравнений (23.28).

Проинтегрировать эти связанные уравнения от $r = 0$ до $r$, при котором давление обращается в нуль. [Уравнение (23.28б) в форме ОВ гарантирует, что давление будет монотонно уменьшаться, пока уравнения состояния подчиняются разумному ограничению $\rho \geqslant 0$ для всех $p \geqslant 0$.] Точка, в которой давление достигает нуля, есть поверхность звезды, величина $r$ в ней равна радиусу звезды $R$, а величина $m$ — полной массе-энергии звезды $M$.

Достигнув поверхности, перенормировать потенциал Ф, добавив к нему постоянную, так чтобы он подчинялся граничному условию (23.28д). В результате получится релятивистская звездная модель, функции которой Ф, $m$, $\rho$, $p$, $n$ удовлетворяют уравнениям внутреннего строения.

Заметим, что для любого фиксированного выбора уравнений состояния $p = p(n)$ и $\rho = \rho(n)$ звездные модели образуют однопараметрическую последовательность (параметр $p_c$). После того как центральное давление задано, модель однозначно определена.

В следующей главе описано семейство релятивистских звездных моделей, построенных численно по вышеприведенному рецепту. Об идеализированной звездной модели, построенной аналитически, см. дополнение 23.3.

## 23.8. Ньютоновские звезды с однородной плотностью

**УПРАЖНЕНИЕ**

Вычислите в ньютоновской теории внутреннее строение конфигурации с однородной плотностью. Покажите, что релятивистские конфигурации, рассматриваемые в дополнении 23.3, тождественно переходят в ньютоновские конфигурации в пределе слабого гравитационного поля. Покажите также, что в ньютоновской теории нет ограничений на массу и радиус.

## Дополнение 23.3. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МОДЕЛЬ ЗВЕЗДЫ С ОДНОРОДНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Для реалистических уравнений состояния (см. следующую главу) проинтегрировать аналитически уравнения внутреннего строения звезды (23.28) невозможно; необходимо численное интегрирование. Однако аналитические решения существуют для различных идеализированных и выбираемых *ad hoc* уравнений состояния. Одно из наиболее полезных аналитических решений, полученное Карлом Шварцшильдом [241], описывает звезду с однородной плотностью

$$\rho = \rho_0 = \text{const для всех } p. \tag{1}$$

Чтобы принять эту модель, нет необходимости предаваться фикции «несжимаемой жидкости». Несжимаемость означала бы, что скорость звука $v = (dp/d\rho)^{1/2}$ имеет бесконечное значение и превышает, следовательно, скорость света, а это находится в противоречии с основным принципом специальной теории относительности («принципом причинности»), утверждающим, что никакой физический эффект не может распространяться со скоростью $v > 1$. (Если источник смог бы вызвать такой быстрый эффект в одной локально лоренцевой системе отсчета, то тогда существовала бы другая локально лоренцева система отсчета, в которой эффект наступил бы раньше, чем начал действовать источник!) Однако легко допустить, что часть жидкости в области высокого давления имеет такую же плотность, как и часть жидкости в области низкого давления, если только предположить, что состав жидкости изменяется с изменением $r$ («сшитый вручную»). Не зависимо от того, принимаем ли мы такое предположение или просто имеем в виду сферическую каплю воды, размеры которой составляют малую долю размеров Земли, модель Шварцшильда представляет собой поучительный пример гидростатики в рамках теории Эйнштейна.

Формула (23.28а) для массы немедленно дает

$$m = \begin{cases} (4\pi/3)\,\rho_0 r^3 & \text{для } r < R, \\ M = (4\pi/3)\,\rho_0 R^3 & \text{для } r > R, \end{cases} \tag{2}$$

откуда следует выражение для поправочного размерного множителя в метрике:

$$\frac{d\,(\text{собственное расстояние})}{dr} = e^{\Lambda} = [1 - 2m\,(r)/r]^{-1/2}. \tag{3}$$

Если для облегчения представления пространственная геометрия $(r,\ \phi)$ экваториального сечения звезды рассматривается как погруженная в евклидову 3-геометрию $(z,\ r,\ \phi)$ [см. § 23.8], то «подъем» над плоскостью $z = 0$ равен

$$z\,(r) = \begin{cases} (R^3/2M)^{1/2}\,[1 - (1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2} & \text{для } r \leqslant R, \\ (R^3/2M)^{1/2}\,[1 - (1 - 2M/R)^{1/2}] + [8M\,(r - 2M)]^{1/2} - & \\ \qquad - [8M\,(R - 2M)]^{1/2} & \text{для } r \geqslant R. \end{cases} \tag{4}$$

Определив $m(r)$ из формулы (2), можно проинтегрировать уравнение гидростатического равновесия (23.28б) и получить давление

$$p = \rho_0 \left\{ \frac{(1-2Mr^2/R^3)^{1/2} - (1-2M/R)^{1/2}}{3(1-2M/R)^{1/2} - (1-2Mr^2/R^3)^{1/2}} \right. \quad \text{для } r < R. \tag{5}$$

Давление в свою очередь позволяет найти с помощью уравнения (23.28д) поправочный временной множитель в метрике

$$\frac{d\,(\text{собственное время})}{dt} = e^{\Phi} = \begin{cases} \frac{3}{2}\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2} & \text{для } r < R, \\ (1-2M/r)^{1/2} & \text{для } r > R. \end{cases} \tag{6}$$

Свойства конфигураций с однородной плотностью заслуживают внимания.

1. В случае фиксированной плотности энергии $\rho_0$ давление в центре

$$p_c = \rho_0 \left\{ \frac{1-(1-2M/R)^{1/2}}{3(1-2M/R)^{1/2}-1} \right\} \tag{7}$$

монотонно увеличивается с увеличением радиуса $R$, а, следовательно, также и с увеличением массы $M = (4\pi/3)\,\rho_0 R^3$ и отношения («силы тяготения»)

$$2M/R = (8\pi/3)\,\rho_0 R^2. \tag{8}$$

Это естественно, поскольку чем больше вещества добавляется к звезде, тем больше давление, необходимое для удержания равновесия.

2. Давление в центре становится бесконечным, когда $M$, $R$ и $2M/R$ достигают предельных значений

$$R_{\lim} = (9/4)\,M_{\lim} = (3\pi\rho_0)^{-1/2}, \tag{9}$$

$$(2M/R)_{\lim} = 8/9. \tag{10}$$

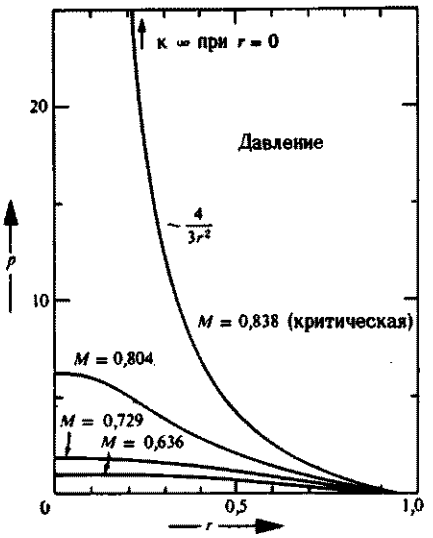
Масса и радиус звезды с однородной плотностью не могут превышать эти пределы. Эти пределы чисто релятивистское явление; в ньютоновской теории они отсутствуют.

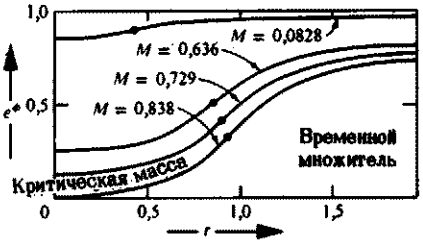
3. Внутри звезды пространственная геометрия (геометрия гиперповерхности $t = \text{const}$) совпадает с геометрией трехмерной сферической поверхности с радиусом кривизны[1]

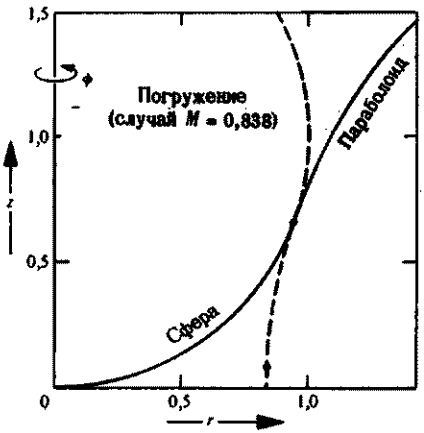
$$a = (3/8\pi\rho_c)^{1/2}. \tag{11}$$

[См. выше уравнение (4).] Вне звезды (шварцшильдовская) пространственная геометрия есть геометрия трехмерного параболоида вращения. Внутренняя и внешняя геометрии гладко сшиваются. Все эти детали показаны на следующих трех диаграммах. Все величины, представленные на них, даны в геометрических единицах (от единицы массы г и единицы плотности г/см$^3$ можно перейти соответственно к единицам см и см$^{-2}$, умножив первые на $0{,}742 \cdot 10^{-28}$ см/г): длины — в единицах $(3/8\,\pi\rho_0)^{1/2}$, давление — в единицах $\rho$, масса — в единицах $(3/32\,\pi\rho_0)^{1/2}$.

Масса «после сборки» $M$ и масса той же жидкости, рассеянной на бесконечно удаленные друг от друга капельки, $M_{\text{прежде}}$, приведены в таблице на стр. 276.




*Таблица*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_{\text{прежде}}$ | мала | 0,0882 | 0,894 | 1,0913 | 1,374 | |
| $M$ | мала | 0,0828 | 0,636 | 0,729 | 0,838 | (критическая) |
| Разность (связь) | $\frac{3}{10}M^{5/3}$ | 0,0054 | 0,258 | 0,362 | 0,536 | |

## § 23.8. ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ДЛЯ СТАТИЧЕСКОЙ ЗВЕЗДЫ

**Площадь поверхности сфер $4\pi r^2$: 1) монотонно увеличивается от центра звезды наружу**

Для высоко релятивистской звезды геометрия пространства-времени сильно отклоняется от плоской геометрии Евклида — Лоренца. Следовательно, нет *априорной* причины ожидать, что площадь поверхности $4\pi r^2$, а значит, и радиальная координата $r$ будут монотонно увеличиваться при движении от центра звезды наружу. К счастью, *уравнения внутреннего строения звезды гарантируют, что r будет монотонно увеличиваться от 0 в центре звезды до ∞ на*

*бесконечном расстоянии от звезды*, поскольку $p \geqslant 0$ и звезда статическая (находится в равновесии).

Монотонность $r$ можно показать следующим образом. Введем в качестве новой радиальной координаты собственное расстояние $\ell$ от центра звезды. В силу выражения для метрики (23.27′) $\ell$ и $r$ связаны соотношением

$$dr = \pm (1 - 2m/r)^{1/2} d\ell. \qquad (23.29)$$

Заметим, что радиальная координата $r$ равна нулю в центре звезды (где $m \sim r^3$) и по определению всегда положительная величина. Поэтому сначала при движении от $\ell = 0$ наружу координата $r$ должна увеличиваться с ростом $\ell$, затем $r(\ell)$ может достичь максимума и начать уменьшаться лишь в точке, где отношение $2m/r$ становится равным единице [см. уравнение (23.29)]. Такое поведение $r(\ell)$ характерно для замкнутой модели Вселенной, т. е. 3-сферы с однородной плотностью и радиусом $a$, и мы можем представить функцию $r(\ell)$ в виде

$$r(\ell) = a \sin (\ell/a)$$

[см. гл. 27, особенно диаграмму погружения из дополнения 27.2, п. А]. Согласно уравнениям поля, такая система должна быть динамичной. Здесь же мы рассматриваем систему, находящуюся в статистических условиях. К последней применимо уравнение гидростатического равновесия (23.28б). Градиент давления в этом случае описывается выражением, содержащим в знаменателе множитель $[1-2m(r)/r]$. Если в некоторой области звезды $2m/r$ приближается к единице с увеличением $\ell$, то градиент давления там становится таким большим, что переход к точке $p = 0$ (поверхность звезды) произойдет прежде, чем переход к любой точке, где величина $2m(r)/r$ могла бы достичь единицы. Более того, за поверхностью звезды $m$ остается постоянной $m(r) = M$ и величина $2m(r)/r$ уменьшается. Следовательно, *$2m/r$ всегда меньше единицы* и $r(\ell)$ не может иметь максимума, что и требовалось доказать. (Подробное доказательство предлагается провести читателю, см. упражнение 23.9.)

Хотя радиус кривизны $r$ и соответствующая площадь сферической поверхности $2\pi r^2$ монотонно увеличиваются от центра звезды наружу, скорость их роста отлична от скорости роста в плоском пространстве-времени. В плоском пространстве-времени скорость роста равна $dr/d$ (собственное радиальное расстояние) $= dr/d\ell = 1$. В звезде она равна $dr/d\ell = (1 - 2m/r)^{1/2} < 1$. Поэтому, если бы некто поднимался по длинной лестнице из центра релятивистской звезды наружу, измеряя для каждого последовательного сферического слоя его шварцшильдовскую координату $r$ («собственную длину окружности»/$2\pi$), он обнаружил бы, что эти значения $r$ увеличиваются удивительно медленно.

2) увеличивается более медленно, чем в плоском пространстве-времени

Такое странное поведение легче всего представить себе с помощью «диаграммы погружения». Пытаться погрузить все искривленное четырехмерное многообразие в некоторое плоское пространство более высокой размерности — нелегкая задача. (См., однако,

Погружение пространства-времени в плоское пространство более высокой размерности

работы [249, 250] о глобальном погружении в пространство $5+1$ измерений и работу [251] о локальном погружении в пространство $4+2$ измерений. О невозможности погрузить неплоскую вакуумную метрику ($G_{\mu\nu}=0$) в плоское 5-мерное пространство см. в работе [252].) Поищем более простую картину [253]. В статической системе пространство в любой момент времени имеет одну и ту же 3-геометрию. Поэтому изобразим 3-пространство только в один момент времени $t = \text{const}$. Кроме того, в любой момент времени пространство обладает сферической симметрией. Следовательно, сечение, проведенное через центр $r = 0$ и делящее пространство на две симметричные половины (например, экваториальное сечение ($\theta = \pi/2$), имеет такую же 2-геометрию, что и любое другое, проведенное через центр сечение (с любым выбранным углом наклона, т. е. с любым азимутом). Поэтому ограничимся рассмотрением 2-геометрии экваториального сечения; она описывается линейным элементом

$$ds^2 = [1-2m(r)/r]^{-1}\,dr^2 + r^2\,d\phi^2. \qquad (23.30)$$

Теперь можно погрузить эту двумерную геометрию искривленного пространства в плоскую геометрию трехмерного евклидова многообразия.

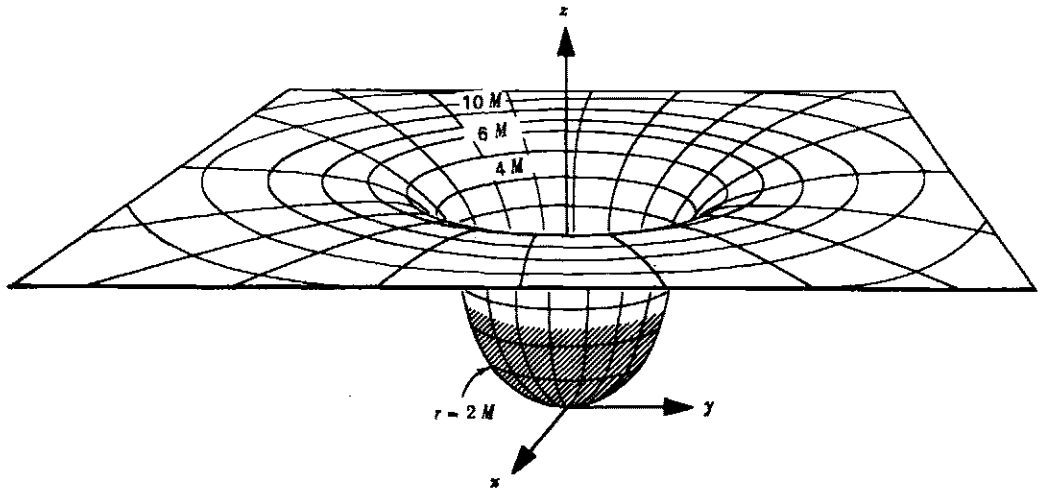
**Построение «диаграммы погружения» для экваториального сечения звезды**

Если кривизна двумерного сечения равна нулю или пренебрежимо мала, то погружение тривиально. В этом случае достаточно отождествить 2-геометрию с сечением $z = 0$ евклидова 3-пространства и ввести, кроме того, в это 3-пространство обычные цилиндрические координаты $z$, $r$, $\phi$, которые применяются в любой задаче с аксиальной симметрией (подробнее см. фиг. 23.1 и дополнение 23.3). Тогда двумерное плоское сечение будет представлять собой множество точек евклидова пространства с $z = 0$, $\phi$, изменяющимся от 0 до $2\pi$, и координатой $r$, изменяющейся от 0 до $\infty$, причем $r$ и $\phi$ двумерного сечения отождествлены с $r$ и $\phi$ евклидова 3-пространства.

Если 2-геометрия искривлена, как это имеет место для экваториального сечения реальной звезды, то, сохраняя отождествление $r$, $\phi$ двумерного сечения с $r$, $\phi$ евклидовой 3-геометрии, отогнем сечение от плоскости $z = 0$ (везде, за исключением начала $r = 0$). В то же время потребуем, чтобы отгибание было аксиально симметричным. Другими словами, потребуем, чтобы величина «подъема» над плоскостью $z = 0$ не зависела от $\phi$, какова бы ни была ее зависимость от $r$. Таким образом, все погружение характеризуется одной функцией, т. е. подъемом

$$z = z(r) \qquad (\text{«формула погружения»}).$$

Геометрию этого искривленного двумерного геометрического места точек в евклидовом пространстве (3-пространство — лишь математическая конструкция, не имеющая отношения к реальному миру) следует отождествить с геометрией двумерного экватори-




ФИГ. 23.1
Геометрия внутри (заштриховано) и вокруг (без штриховки) звезды радиусом $R = 2{,}66\ M$ (схематическое представление). Звезда находится в гидростатическом равновесии и имеет нулевой момент импульса (сферическая симметрия). Двумерная геометрия

$$ds^2 = [1 - 2m\ (r)/r]^{-1}\ dr^2 + r^2\ d\phi^2$$

экваториального сечения звезды ($\theta = \pi/2$, $t = \text{const}$), погруженная в евклидово 3-пространство, представлена таким образом, что расстояния между любыми двумя соседними точками $(r, \phi)$ и $(r + dr, \phi + d\phi)$ воспроизведены правильно. Расстояния, измеренные вне искривленной поверхности, и точки вне этой поверхности, а также сама евклидова 3-геометрия не имеют физического смысла. Имеет смысл только искривленная 2-геометрия. Собственная длина окружности шварцшильдовского координатного радиуса $r$ равна $2\pi r$ (рассматривается экваториальная плоскость звезды $\theta = \pi/2$). Чтобы получить наглядное представление о полной 3-геометрии в звезде и вокруг нее в любой выбранный момент шварцшильдовского координатного времени $t$, заменим эту окружность сферой с собственной площадью $4\pi r^2$, проделав аналогичную процедуру со всеми другими окружностями. Множитель $[1 - 2m\ (r)/r]^{-1}$ не становится сингулярным с уменьшением $r$ до $r = 2M$, поскольку с уменьшением $r$ достаточно быстро уменьшается $m(r)$.

ального сечения, проведенного через реальную звезду, другими словами, линейные элементы в обоих случаях должны совпадать. Чтобы выразить это требование в математических терминах, перепишем линейный элемент трехмерного евклидова пространства в виде

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2\ d\phi^2. \qquad (23.31)$$

Ограничимся выбранным геометрическим местом точек («поднятая поверхность»), т. е. запишем $z = z\,(r)$ или $dz = (dz/dr)\ dr$. Отсюда для линейного элемента двумерного геометрического места точек в 3-геометрии имеем

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz\,(r)}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2\ d\phi^2; \qquad (23.32)$$

этот линейный элемент должен быть отождествлен с линейным элементом в реальной звезде:

$$ds^2 = [1 - 2m(r)/r]^{-1}\, dr^2 + r^2\, d\phi^2.$$

Сравнивая, заключаем

$$\left(\frac{dz(r)}{dr}\right)^2 + 1 = [1 - 2m(r)/r]^{-1}. \tag{23.33}$$

Полученное уравнение позволяет найти подъем как функцию $r$; таким образом, имеем

$$z(r) = \int_0^r \frac{dr}{\left[\dfrac{r}{2m(r)} - 1\right]^{1/2}} \quad \text{везде.} \tag{23.34а}$$

$$z(r) = [8M(r - 2M)]^{1/2} + \text{const} \quad \text{вне звезды,} \tag{23.34б}$$

Вне звезды эта погруженная поверхность представляет собой сегмент параболоида вращения. Форма ее внутри звезды зависит от вида функции $m(r)$. Напомним, что вблизи центра звезды $m(r)$ изменяется как $(4\pi/3)\rho_c r^3$. Поэтому заключаем, что погруженная поверхность там выглядит как сегмент сферы радиуса $a = (3/8\ \pi\rho_c)^{1/2}$; следовательно, можно написать

$$[a - z(r)]^2 + r^2 = a^2 \text{ для } r \ll a = (3/8\pi\rho_c)^{1/2}. \tag{23.34в}$$

**Описание погруженной поверхности**

В особом случае звезды с однородной плотностью (дополнение 23.3) вся внутренняя часть поверхности имеет сферическую форму (23.34в); в общем случае это не так. В силу того, что $r > 2\,m(r)$, уравнение (23.34а) всегда описывает поверхность с монотонно увеличивающимися функциями $z(r)$ и $r(z)$. Это означает, что погруженная поверхность всегда, подобно вазе, раскрывается вверх и наружу и качественно похожа на поверхность, изображенную на фиг. 23.1; она не имеет горла и может быть плоской только асимптотически при $r = \infty$. На поверхности звезды, несмотря на то что плотность может разрывным образом обращаться в нуль (плотность $\rho$ конечна внутри при $p = 0$ и равна нулю снаружи), внутренняя и внешняя геометрии должны сшиваться гладким образом [производная $dz/dr$, заданная уравнением (23.33), непрерывна].

Следует подчеркнуть, что когда речь идет о геометрии звезды, физический смысл имеют только точки, лежащие на двумерной погруженной поверхности, трехмерные области внутри и вне вазы, изображенной на фиг. 23.1, не имеют физического смысла, поскольку пространство, в которое происходит погружение, является евклидовым. Оно просто позволяет наглядно представить геометрию пространства вокруг звезды.

---

**УПРАЖНЕНИЯ**

**23.9. Хорошее поведение $r$**

Докажите в явном виде со всеми подробностями, что $2m/r$ всегда меньше единицы и $r$ — монотонная функция $\ell$.

### 23.10. Заполнение центра звезды ультрарелятивистским идеальным ферми-газом

Предположим, что звезда состоит из идеального ферми-газа (идеальная нейтронная звезда, см. [243]) при нулевой температуре, сжатого настолько сильно, что частицы имеют релятивистские энергии, по сравнению с которыми любая их масса покоя пренебрежимо мала. (Эта модель противоположна модели звезды из несжимаемой жидкости.) В рассматриваемом случае, считая, что на ячейку объемом $h^3$ в фазовом пространстве приходится две частицы, имеем

$$\begin{pmatrix}\text{плотность числа}\\ \text{фермионов}\end{pmatrix} = n = (2/h^3)\,4\pi \int_0^{p_F} p^2\,dp = 8\pi p_F^3/3h^3,$$

$$\begin{pmatrix}\text{плотность}\\ \text{массы-энергии}\end{pmatrix} = \rho = (2/h^3)\,4\pi \int_0^{p_F} cp\cdot p^2\,dp = 2\pi c p_F^4/h^3,$$

и окончательно

$$p = -\frac{d\begin{pmatrix}\text{энергия}\\ \text{на частицу}\end{pmatrix}}{d\begin{pmatrix}\text{объем на}\\ \text{частицу}\end{pmatrix}} = -\frac{d\,(\rho/n)}{d\,(1/n)} = 2\pi c p_F^4/3h^3 = \rho/3,$$

как если бы вместо частиц рассматривалось излучение ($p_F$ — импульс Ферми, т. е. импульс самого высокого заполненного состояния).

а. Выпишите релятивистское уравнение гидростатического равновесия для вещества, удовлетворяющего уравнению состояния $p = \rho/3$.

б. Покажите, что существует полностью определенное аналитическое решение этого уравнения для предельного случая бесконечной плотности в центре, когда $m\,(r)/r$ имеет величину 3/14.

в. Найдите $\rho\,(r)$, $p\,(r)$ и $n\,(r)$.

г. Покажите, что, несмотря на бесконечность $n\,(r)$ при $r = 0$, число частиц, заключенных в сфере любого конечного $r$, конечно.

д. Покажите, что 3-геометрия в $r = 0$ имеет «коническую особенность».

е. Постройте для этой 3-геометрии «диаграмму погружения» [„подъем" $z\,(r)$ как функции $r$, см. (23.34)]. (*Замечание*: Коническая особенность в $r = 0$ (при других $r$ не имеющая физического смысла) возникает потому, что в этой точке плотность массы-энергии обращается в бесконечность. Вычисленная масса системы расходится при $r \to \infty$. В действительности с уменьшением плотности ферми-импульс изменяется от релятивистского к нерелятивистскому значению, уравнение состояния меняет свой математический вид и полная масса-энергия $M$ сходится к конечной величине.)

# 24. ПУЛЬСАРЫ И НЕЙТРОННЫЕ ЗВЕЗДЫ; КВАЗАРЫ И СВЕРХМАССИВНЫЕ ЗВЕЗДЫ

*Наука указует путь тебе, о человек счастливый,*
*Измерь всю Землю, воздух взвесь, установи приливы,*
*Поправь седое время, скажи планетам, по каким орбитам*
*Держать им путь.*
*Да не забудь в порядок привести небесное светило.*

АЛЕКСАНДР ПОУП, 1733[1])

## § 24.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

**Типы звездных конфигураций, для которых должна быть существенна теория относительности**

Известно пять типов звездных конфигураций, для которых должны быть существенны релятивистские эффекты: белые карлики, нейтронные звезды, черные дыры, сверхмассивные звезды и релятивистские звездные скопления. Ключевые факты о каждом типе конфигураций приведены в дополнении 24.1, а наиболее важные детали описаны в тексте данной главы (белые карлики — в § 24.2, нейтронные звезды и их связь с пульсарами — в § 24.2 и 24.3, сверхмассивные звезды и их возможная связь с квазарами и галактическими ядрами — в § 24.4 и 24.5, релятивистские звездные скопления — в § 24.6, подробное обсуждение черных дыр отложено до гл. 33).

Ясное и очень полное изложение всех указанных астрофизических приложений релятивистской теории звезд дано в книге Зельдовича и Новикова «*Теория тяготения и эволюция звезд*» [196]. В некотором смысле книгу [196] можно считать сопутствующим томом к данной книге; в ней с астрофизическим акцентом рассматриваются те вопросы, которые здесь трактуются с гравитационным акцентом. Цель настоящей главы заключается только в том, чтобы дать читателю краткий обзор материала, который можно найти в книге «*Теория тяготения и эволюция звезд*».

---

[1]) Из работы [254].

## Дополнение 24.1. ЗВЕЗДНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ, ДЛЯ КОТОРЫХ СУЩЕСТВЕННЫ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ[1])

### А. Белые карлики

Представляют собой звезды с массой порядка солнечной, радиусом около 5000 км и плотностями порядка $10^6$ г/см$^3$ $\approx 1$ т/см$^3$; тяготение в них уравновешено давлением вырожденных электронов; ядерное горение прекратилось и, излучая оставшийся запас тепловой энергии, они постепенно охлаждаются.

Наблюдались и изучались астрономически задолго до того, как были поняты теоретически.

Ключевые моменты истории:

Август 1926 г., Дирак [255], следуя Ферми (февраль), сформулировал статистику Ферми — Дирака.

Декабрь 1926 г., Фаулер [256] использовал статистику Ферми — Дирака для объяснения природы белых карликов; он указал, что давление вырожденного электронного газа способно удержать звезду от сжатия под действием тяготения[2]).

1930 г., Чандрасекар [257, 258] рассчитал модели белых карликов с учетом в уравнении состояния вырожденного электронного газа эффектов специальной теории относительности; он обнаружил, *что масса белого карлика не может превышать* $\sim 1{,}2\ M_\odot$ (*«чандрасекаровский предел»*).

1932 г. Л. Д. Ландау [259] дал элементарное объяснение чандрасекаровского предела.

1949 г., С. А. Каплан [260, 261] рассчитал влияние общей теории относительности на кривую масса — радиус для массивных белых карликов и получил, что эффекты общей теории относительности, вероятно, вызывают неустойчивость, если радиус становится меньше $1{,}1 \cdot 10^3$ км.

Роль общей теории относительности в белых карликах:

пренебрежимо малое влияние на внутреннее строение;

существенное влияние на устойчивость, частоту пульсаций и форму кривой масса — радиус вблизи чандрасекаровского предела (т. е. в массивных белых карликах). Существен также электронный захват. См., например, [196, 262].

### Б. Нейтронные звезды

Представляют собой звезды с массой порядка солнечной, радиусом около 10 км и плотностями порядка $10^{14}$ г/см$^3$ (т. е. такими же, как плотность атомного ядра); тяготение в них уравновешено давлением вырожденных нейтронов и нуклон-нуклонными сильными взаимодействиями; ядерное горение отсутствует, излучаемая энергия черпается из энергии вращения и оставшегося запаса внутренней тепловой энергии.

Теоретические расчеты предсказали их существование в 1934 г., однако до 1968 г. это не было подтверждено наблюдениями.

---

[1]) Подробный анализ см. в книге Зельдовича и Новикова [196]; там же указана литература по всем затрагиваемым здесь вопросам.

[2]) 1928 г., Я. Френкель [536] показал важность релятивистского вырождения электронного газа в массивных белых карликах. М. П. Бронштейн заложил основы теории белых карликов.—*Прим. ред.*

ФИГ. 24.1.
Два значительных достижения на астрофизической сцене: нейтронная звезда (1933 г.) и черная дыра (1795 г., 1939 г.). Надлежащее объяснение их невозможно без общей теории относительности.

JANUARY 15, 1934 PHYSICAL REVIEW VOLUME 45

## Proceedings of the American Physical Society

MINUTES OF THE STANFORD MEETING, DECEMBER 15–16, 1933

**38. Supernovae and Cosmic Rays.** W. BAADE, *Mt. Wilson Observatory*, AND F. ZWICKY, *California Institute of Technology*.—Supernovae flare up in every stellar system (nebula) once in several centuries. The lifetime of a supernova is about twenty days and its absolute brightness at maximum may be as high as $M_{vis} = -14^M$. The visible radiation $L_r$ of a supernova is about $10^8$ times the radiation of our sun, that is, $L_r = 3.78 \times 10^{41}$ ergs/sec. Calculations indicate that the total radiation, visible and invisible, is of the order $L_r = 10^7 L_r = 3.78 \times 10^{48}$ ergs/sec. The supernova therefore emits during its life a total energy $E_r \geq 10^4 L_r = 3.78 \times 10^{52}$ ergs. If supernovae initially are quite ordinary stars of mass $M < 10^{34}$ g, $E_r/c^2$ is of the same order as $M$ itself. In the *supernova* process *mass in bulk is annihilated*. In addition the hypothesis suggests itself that *cosmic rays are produced by supernovae*. Assuming that in every nebula one supernova occurs every thousand years, the intensity of the cosmic rays to be observed on the earth should be of the order $\sigma = 2 \times 10^{-3}$ erg/cm² sec. The observational values are about $\sigma = 3 \times 10^{-3}$ erg/cm² sec. (Millikan, Regener). With all reserve we advance the view that supernovae represent the transitions from ordinary stars into *neutron stars*, which in their final stages consist of extremely closely packed neutrons.

FEBRUARY 15, 1939 PHYSICAL REVIEW VOLUME 55

## On Massive Neutron Cores

J. R. OPPENHEIMER AND G. M. VOLKOFF
*Department of Physics, University of California, Berkeley, California*

(Received January 3, 1939)

It has been suggested that, when the pressure within stellar matter becomes high enough, a new phase consisting of neutrons will be formed. In this paper we study the gravitational equilibrium of masses of neutrons, using the equation of state for a cold Fermi gas, and general relativity. For masses under $\frac{1}{2}\odot$ only one equilibrium solution exists, which is approximately described by the nonrelativistic Fermi equation of state and Newtonian gravitational theory. For masses $\frac{1}{2}\odot < m < \frac{4}{3}\odot$ two solutions exist, one stable and quasi-Newtonian, one more condensed, and unstable. For masses greater than $\frac{4}{3}\odot$ there are no static equilibrium solutions. These results are qualitatively confirmed by comparison with suitably chosen special cases of the analytic solutions recently discovered by Tolman. A discussion of the probable effect of deviations from the Fermi equation of state suggests that actual stellar matter after the exhaustion of thermonuclear sources of energy will, if massive enough, contract indefinitely, although more and more slowly, never reaching true equilibrium.

EXPOSITION

DU SYSTEME

DU MONDE,

PAR PIERRE-SIMON LAPLACE,
de l'Institut National de France, et
du Bureau des Longitudes.

TOME SECOND.

A PARIS,

De l'Imprimerie du CERCLE-SOCIAL, rue du
Théâtre Français, N°. 4.

L'AN IV DE LA RÉPUBLIQUE FRANÇAISE.

( 505 )

aussi sensibles à la distance qui nous en sépare ; et combien ils doivent surpasser ceux que nous observons à la surface du soleil ? Tous ces corps devenus invisibles, sont à la même place où ils ont été observés, puisqu'ils n'en ont point changé, durant leur apparition ; il existe donc dans les espaces célestes, des corps obscurs aussi considérables, et peut être en aussi grand nombre, que les étoiles. Un astre lumineux, de même densité que la terre, et dont le diamètre serait deux cents cinquante fois plus grand que celui du soleil, ne laisserait en vertu de son attraction, parvenir aucun de ses rayons jusqu'à nous ; il est donc possible que les plus grands corps lumineux de l'univers, soient par cela même, invisibles. Une étoile qui, sans être de cette grandeur, surpasserait considérablement le soleil ; affaiblirait sensiblement la vitesse de la lumière, et augmenterait ainsi l'étendue de son aberration. Cette différence dans l'aberration des étoiles ; un catalogue de celles qui ne font que paraître, et leur position observée au moment de leur éclat passager ; la détermination de toutes les étoiles changeantes,

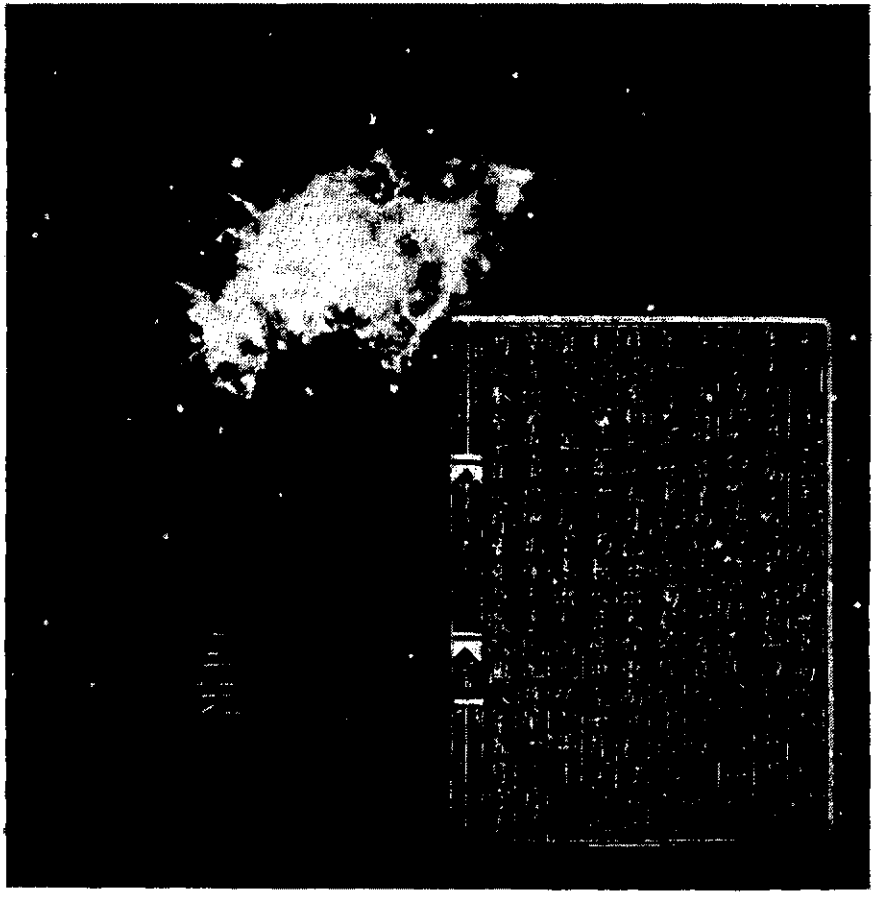
Tome II. V

SEPTEMBER 1, 1939 PHYSICAL REVIEW VOLUME 56

## On Continued Gravitational Contraction

J. R. OPPENHEIMER AND H. SNYDER
*University of California, Berkeley, California*
(Received July 10, 1939)

When all thermonuclear sources of energy are exhausted a sufficiently heavy star will collapse. Unless fission due to rotation, the radiation of mass, or the blowing off of mass by radiation, reduce the star's mass to the order of that of the sun, this contraction will continue indefinitely. In the present paper we study the solutions of the gravitational field equations which describe this process. In I, general and qualitative arguments are given on the behavior of the metrical tensor as the contraction progresses: the radius of the star approaches asymptotically its gravitational radius; light from the surface of the star is progressively reddened, and can escape over a progressively narrower range of angles. In II, an analytic solution of the field equations confirming these general arguments is obtained for the case that the pressure within the star can be neglected. The total time of collapse for an observer comoving with the stellar matter is finite, and for this idealized case and typical stellar masses, of the order of a day; an external observer sees the star asymptotically shrinking to its gravitational radius.



Крабовидная туманность (NGC 1952), остаток сверхновой, вспыхнувшей в июле 1054 г. Это событие наблюдалось и было зарегистрировано национальной обсерваторией Санг в К'ай-фенге. За прошедшие с той поры 900 лет остатки взрыва продвинулись приблизительно на три световых года, т. е. они двигались со скоростью около 1/300 скорости света. В 1934 г. Вальтер Бааде и Фритц Цвики предсказали, что во взрывах сверхновой должны рождаться нейтронные звезды. Среди первой полдюжины пульсаров, открытых в 1968 г., был и пульсар, расположенный в центре Крабовидной туманности, пульсирующий 30 раз в 1с; для последнего сегодня не существует более приемлемого объяснения, чем вращающаяся нейтронная звезда. В китайской исторической записи, приведенной на фигуре, перечисляются необычные астрономические явления, наблюдавшиеся во время правления династии Северный Санг. Она заимствована из журнала (Journal of Astronomy, part 9, chapter 56), где рассматривается история Санг (Sung Shih) и впервые была опубликована в 1340 г.

Ключевые моменты истории:

1932 г., Чадвик [263] открыл нейтрон.

1933—34 гг., Бааде и Цвики [264—266] 1) выдвинули концепцию нейтронной звезды; 2) отождествили новый класс астрономических объектов, которые они назвали «сверхновые»; 3) предположили, что сверхновая может рождаться при коллапсе нормальной звезды, сопровождающемся образованием нейтронной звезды (фиг. 24.1)[1]).

1939 г., Оппенгеймер и Волков [243] выполнили первые детальные расчеты внутреннего строения нейтронных звезд; при этом они изложили основы релятивистской теории внутреннего строения звезд, как это представлено в гл. 23. (См. фиг. 24.1.)

1942 г. Дьювендак [267] и Мэйол и Оорт [268] сделали вывод, что Крабовидная туманность является остатком сверхновой, наблюдавшейся китайскими астрономами в 1054 г. нашей эры. Бааде [269] и Минковский [270] отождествили «южную звезду», расположенную вблизи центра Крабовидной туманности как вероятный (коллапсировавший) остаток звезды, которая взорвалась в 1054 г.

1967 г., Хьюиш и др. открыли пульсары [271].

1968 г., Голд [272] выдвинул идею, что пульсары являются вращающимися нейтронными звездами, а последующие наблюдения подтвердили это предположение.

1969 г., Коук, Дисней и Тейлор [273] обнаружили, что «южная звезда» Крабовидной туманности является пульсаром, и установили тем самым связь между сверхновыми, нейтронными звездами и пульсарами[2]).

Роль общей теории относительности в нейтронных звездах:

существенное влияние (меняет примерно вдвое) на внутреннее строение и периоды колебаний;

торможение гравитационным излучением может быть доминирующей силой, вызывающей затухание нерадиальных колебаний.

## B. Черные дыры

Представляют собой объекты, рождающиеся при сжатии звезды до размера меньше удвоенной геометризованной массы ($R < 2M \sim (M/M_\odot) \times 3$ км); при этом создаются такие сильные пространственно-временные кривизны, что звезда не может больше поддерживать связь с внешним миром (подробный анализ черных дыр см. в гл. 33 и 34).

Каждый, кто принимает общую теорию относительности, не видит способа избежать предсказания, что черные дыры должны существовать в нашей Галактике. Это предсказание никоим образом не зависит от сложности коллапса, в котором образуются черные дыры, или от неизвестных свойств вещества при высокой плотности. Однако существование черных дыр пока еще не было подтверждено наблюдениями.

---

[1]) 1938 г., Л. Д. Ландау рассчитал максимальную массу нейтронной звезды.—*Прим. ред.*

[2]) К этому перечню открытий следует добавить:

1972 г., Джиаконни, Гурский и др. открыли рентгеновские пульсары — нейтронные звезды в составе двойных звезд.— *Прим. ред.*

Ключевые моменты истории:

1795 г., Лаплас [274] заметил, что согласно ньютоновской теории тяготения и ньютоновской корпускулярной теории света, свет не может покидать достаточно массивные объекты (фиг. 24.1).

1939 г., Оппенгеймер и Снайдер [275] рассчитали коллапс однородной пылевидной сферы жидкости, используя общую теорию относительности, и обнаружили, что сфера порывает связь с остальным миром. Это был первый расчет образования черной дыры (фиг. 24.1).

1965 г., начало эры интенсивного теоретического исследования физики черных дыр. [1])

Роль общей теории относительности в физике черных дыр:

разумное объяснение черных дыр в ньютоновской теории невозможно; физика черных дыр от начала до конца аппелирует к эйнштейновскому описанию тяготения.

## Г. Сверхмассивные звезды

Представляют собой звезды с массой от $10^3$ до $10^9$ солнечных масс; состоят из горячей плазмы с плотностью, обычно меньшей плотности нормальных звезд; удерживаются в основном с помощью давления фотонов, захваченных плазмой и находящихся с ней в тепловом равновесии; сжигают ядерное горючее (водород) на некоторых стадиях своей эволюции.

Теоретические расчеты наводят на мысль (но *не* с полной уверенностью), что сверхмассивные звезды существуют в центрах галактик и квазарах и возможно еще где-нибудь. Сверхмассивные звезды, скорее всего, могут быть источниками энергии для некоторых квазаров и галактических ядер. Однако астрономические наблюдения пока не дали определенного доказательства их существования и их роли во Вселенной, если они существуют.

Ключевые моменты истории:

1963 г., Хойл и Фаулер [276, 277] выдвинули идею сверхмассивных звезд, рассчитали их свойства и предположили, что они могут быть связаны с галактическими ядрами и квазарами.

1963—1964 гг., Чандрасекар [278, 279] и Фейнман [135] развили релятивистскую теорию звездных пульсаций; использовав ее, Фейнман показал, что, хотя сверхмассивные звезды являются ньютоновскими по внутреннему строению, они подвержены релятивистской неустойчивости.

1964 г. и последующие годы, расчеты многих авторов развивали и расширяли идеи Хойла и Фаулера, не создав, однако, сколь-нибудь захватывающего научного прорыва.

Роль общей теории относительности в сверхмассивных звездах:

пренебрежимо малое влияние на внутреннее строение, исключая экстремальный случай компактной быстровращающейся дископодобной конфигурации [280, 281];

существенное влияние на устойчивость.

---

[1]) К этому следует добавить:
1972 г., Джиаконни, Гурский и др. открыли, по-видимому, черные дыры в составе двойных рентгеновских источников.— *Прим. ред.*

### Д. Релятивистские звездные скопления

Представляют собой настолько плотные скопления звезд, что релятивистские поправки к ньютоновской теории видоизменяют их внутреннее строение.

Теоретические расчеты наводят на мысль, что релятивистские звездные скопления могут (а может быть и нет) образовываться в ядрах некоторых галактик и квазаров; если все же происходит процесс такого рода, то в ходе его звездные скопления могут быть разрушены в результате звездных столкновений. Последние превращают скопление в сверхмассивные звезды или в плотный конгломерат звезд и газа. Астрономические наблюдения пока не дали определенного доказательства существования релятивистских скоплений.

Ключевые моменты истории:

1965 г., Зельдович и Подурец [282] выдвинули идею релятивистских звездных скоплений, развили, используя общую теорию относительности и кинетическую теорию (см. § 25.7), теорию их внутреннего строения и высказали соображения об устойчивости релятивистких звездных скоплений.

1968 г., Инсер [283] развил теорию устойчивости звездного скопления и показал (в согласии с соображениями Зельдовича и Подурца), что, когда скопление становится слишком плотным, оно начинает коллапсировать с образованием черной дыры.

Роль общей теории относительности в звездных скоплениях:

существенное влияние на внутреннее строение, если гравитационное красное смещение от центра к бесконечности превышает $z_c \equiv \Delta\lambda/\lambda \sim 0{,}05$;

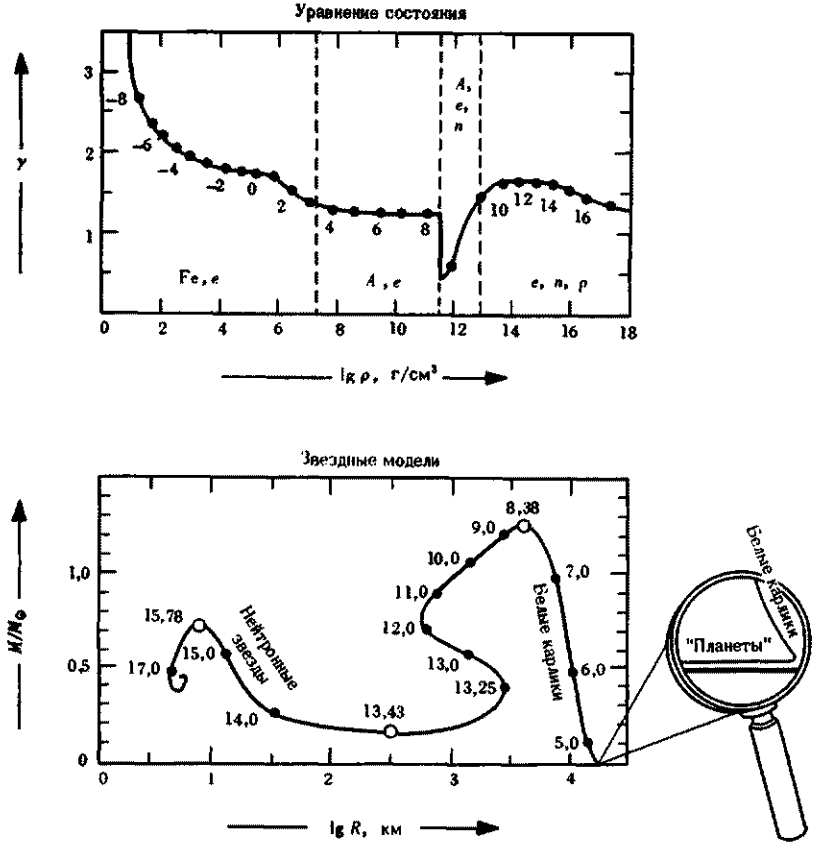
вызывает коллапс скопления с образованием черной дыры, когда красное смещение в центре достигает значения $z_c \approx 0{,}50$.

## § 24.2. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНАЯ СТАДИЯ ЭВОЛЮЦИИ ЗВЕЗДЫ

После нормальных стадий эволюции звезды «умирают» по-разному. Некоторые звезды взрываются, рассеиваясь в межзвездном пространстве, другие сжимаются в состояние белого карлика, а третьи, согласно современной теории, коллапсируют в состояние нейтронной звезды или еще дальше в черную дыру. Хотя на сегодняшний день известно мало о динамической эволюции звезды в конечное состояние, о самих конечных состояниях известно много. Конечные состояния включают в себя рассеянные туманности, которые здесь не представляют интереса, холодные звездные конфигурации — предмет данного параграфа — и «черные дыры», которые будут рассмотрены в части VII.

**Определение «конечного состояния эволюции звезды» и «холодного каталитированного вещества»**

Что в принципе понимается под выражением «конечное состояние эволюции звезды»? Рассмотрим звезду, содержащую данное число $A$ барионов; пусть она эволюционирует к абсолютной конечной точке выжигания термоядерного горения (минимальная масса-энергия, возможная для системы из $A$ барионов). Если нор-




**ФИГ. 24.2.**
**Уравнение состояния Гаррисона — Уилера для холодного вещества в абсолютной конечной точке термоядерной эволюции и соответствующие звездные модели Гаррисона — Вакано — Уилера. Уравнение состояния представлено в виде зависимости «коэффициента сжимаемости» от плотности массы-энергии ρ:**

$$\gamma = \frac{\rho + p}{p} \frac{dp}{d\rho},$$

**(Меньшие значения γ соответствуют более легкой сжимаемости.) Параметром кривой служит логарифм давления lg $p$, выраженного в единицах г/см³ [те же единицы, что и для ρ; заметим, что $p$ (г/см³) = $(1/c^2) \times p$ (дин/см²)]. Ниже указан химический состав вещества как функция плотности: Fe — ядра $Fe^{56}$, $A$ — ядра, более обогащенные нейтронами, чем $Fe^{56}$, $e$ — электроны, $n$ — свободные нейтроны, $p$ — свободные протоны.**
**Первый закон термодинамики [уравнение (22.6)] в применении к холодному веществу (с нулевой энтропией) гласит $d\rho/(\rho + p) = dn/n$, т. е.**

$$n = \frac{\rho + p}{\mu_{Fe}/56} \exp\left(-\int_0^p \frac{dp}{\rho + p}\right),$$

**Здесь $\mu_{Fe}$ — масса покоя атома $Fe^{56}$ — есть отношение $\rho + p \approx \rho$ и $n/56$ в пределе нулевой плотности. Из этой формулы и знания ρ ($p$) (см. фигуру) можно вычислить $n$ ($p$).**

**Равновесные конфигурации представлены кривыми зависимости полной массы-энергии $M$ от радиуса $R$ (последний определен так, что $4\pi R^2$ равно площади поверхности звезды). Параметром кривой $M$ ($R$) служит логарифм плотности в центре, lg $\rho_c$, измеряемой в г/см³. Единственными конфигурациями на кривой, устойчивыми относительно малых возмущений, а потому существующими в природе, будут белые карлики с lg $\rho_c < 8{,}38$ и нейтронные звезды с $13{,}43 < \lg \rho_c < 15{,}78$ (см. дополнение 26.1).**

**Более подробно об уравнении состояния и равновесных конфигурациях см. в работе [287]; таблицу уравнения состояния, включающую новые данные, см. в работе [288].**

мальный ход термоядерного горения слишком медленный, ускорим его путем катализа. Если происходит взрыв, то соберем вылетающее вещество, отберем его кинетическую энергию и заставим падать назад в систему. Повторим эту операцию столько раз, сколько необходимо для достижения выгорания (холодное железо $Fe^{56}$ для части системы с умеренным давлением; другие типы ядер в области, близкой к центру; «холодное вещество, катализированное до конечной точки термоядерного горения» повсюду). В конце концов, придем к системе, которая находится в своем абсолютно низшем энергетическом состоянии: момент импульса равен нулю и тепло полностью извлечено, так что она имеет нулевую угловую скорость и температуру, равную абсолютному нулю. Такая «мертвая» система в зависимости от ее массы и предшествующей истории (два отдельных минимума энергии для определенных значений $A$) превращается в холодную звездную конфигурацию (нейтронная звезда или «белый» карлик) или в «мертвую» черную дыру.

**Уравнение состояния холодного катализированного вещества**

В основе анализа холодной звездной конфигурации должно лежать уравнение состояния. Температура равна нулю, ядерный состав в принципе однозначно определяется плотностью, а как только плотность задана, давление также однозначно фиксируется [уравнение состояния $p(\rho)$ для «холодного катализированного вещества»].

Наблюдаемые астрономами белые карлики и нейтронные звезды в действительности не состоят из холодного катализированного вещества. Однако вещество в них достаточно близко к конечной точке термоядерной эволюции и достаточно охлаждено, чтобы с хорошей точностью его можно было рассматривать как холодное и катализированное (см. § 23.4).

Уравнение состояния $\rho(p)$ для холодного катализированного вещества показано графически на фиг. 24.2. Эта разновидность уравнения состояния была построена Гаррисоном и Уилером [284] в 1958 г. Построенные недавно варианты уравнения состояния (см. работы, указанные в [285, 286]) при плотностях, значительно меньших ядерных, $\rho < 3 \cdot 10^{13}$ г/см$^3$, почти тождественны уравнению состояния Гаррисона — Уилера. При ядерных и сверхъядерных плотностях все варианты уравнения состояния различаются из-за разных предположений относительно нуклон-нуклонных взаимодействий. Наряду с уравнением состояния на фиг. 24.2 представлены свойства моделей холодных звезд, построенных на основе этого уравнения состояния путем численного интегрирования уравнений внутреннего строения (23.28).

Уравнение состояния можно понять, прослеживая превращения, которые имеют место, когда образец холодного катализированного вещества сжимается ко все большим и большим плотностям. На каждой стадии сжатия каждая возможная термоядерная реакция должна быть катализирована до своей конечной точки и тепловая энергия продукта реакции должна быть удалена.

Когда образец находится при нулевом давлении, он представ-

ляет собой шар из чистого холодного $Fe^{56}$, поскольку из всех ядер $Fe^{56}$ — наиболее компактно связанное ядро [1]). Образец имеет плотность 7,86 г/см$^3$. При сжатии образца его внутреннее давление сначала обеспечивается нормальными твердотельными силами, однако вскоре атомы так тесно сближаются друг с другом, что электроны совершенно забывают о своих ядрах и начинают образовывать вырожденный ферми-газ. К тому времени, когда плотность достигает величины $\rho = 10^5$ г/см$^3$, валентные силы полностью пренебрежимы, доминирует давление вырожденных электронов, и коэффициент сжимаемости $\gamma$ (см. подпись к фиг. 24.2) принимает значение $^5/_3$, характерное для нерелятивистского вырожденного ферми-газа. В интервале плотностей от $10^5$ до $10^7$ г/см$^3$ давление вырожденных электронов постепенно становится релятивистским и коэффициент $\gamma$ приближается к $^4/_3$. При плотности выше $\rho = 1{,}4 \times 10^7$ г/см$^3$ масса покоя 62 ядер $Fe^{56}_{26}$ плюс масса покоя 44 электронов плюс довольно большая кинетическая энергия Ферми 44 электронов на поверхности ферми-моря превышают массу покоя 56 ядер $Ni^{62}_{28}$. Следовательно, когда катализированный образец вещества сжат до плотностей, превышающих $\rho = 1{,}4 \cdot 10^7$ г/см$^3$, пойдет ядерная реакция

$$62\mathrm{Fe}^{56}_{26}\left(\begin{array}{l}\text{в высокой степени}\\ \text{сжатые нейтральные атомы}\end{array}\right) \rightarrow$$
$$\rightarrow 56\mathrm{Ni}^{62}_{28}\left(\begin{array}{l}\text{в высокой степени сжатые}\\ \text{нейтральные атомы}\end{array}\right), \qquad (24.1)$$

сопровождающаяся выделением энергии. При продолжении сжатия за эту точку растущая ферми-энергия электронов вызывает новые ядерные реакции, аналогичные (24.1), но включающие другие ядра. В этих реакциях все больше и больше электронов поглощается при образовании новых ядер, которые все более и более обогащаются нейтронами. Когда плотность достигает величины $\rho = 3 \cdot 10^{11}$ г/см$^3$, ядра так высоко обогащены нейтронами ($Y^{122}_{39}$), что нейтроны начинают стекать с них. На короткий момент ($3 \cdot 10^{11}$ г/см$^3 \leqslant \rho \leqslant 4 \cdot 10^{11}$ г/см$^3$) вещество становится высоко сжимаемым, поскольку большинство оставшихся электронов очень быстро поглощается теми ядрами, с которых стекли нейтроны. При плотностях, превышающих $\rho \sim 4 \cdot 10^{11}$ г/см$^3$, свободных нейтронов становится так много, что давление вырожденных нейтронов превышает давление вырожденных электронов. При дальнейшем сжатии к $\rho \sim 10^{13}$ г/см$^3$ происходит полное разрушение оставшихся ядер, образец становится почти чисто нейтронным со значением $\gamma = {}^5/_3$, характерным для нерелятивистского вырожденного ферми-газа. В смеси с нейтронами имеется как раз достаточное количество вырожденных электронов для предотвращения распада нейтронов и достаточное количество протонов для поддер-

[1]) Строго говоря, наиболее компактно связанным является ядро $Ni^{62}_{28}$, но разность энергий связи Fe и Ni очень мала. Подробнее см. § 5 гл. 6 в книге [196]. — *Прим. ред.*

жания зарядовой нейтральности. Сжатие за $\rho \sim 10^{13}$ г/см$^3$ толкает образец в область ядерных плотностей, где физика вещества понята плохо. В уравнении состояния Гаррисона — Уилера все нуклон-нуклонные взаимодействия при ядерных плотностях и выше не учитываются, вещество рассматривается как невзаимодействующая смесь нейтронов, протонов и электронов с преобладанием нейтронов, показатель сжимаемости принимает значение $^5/_3$, пока нейтроны нерелятивистские, и $^4/_3$, когда они достигают релятивистских ферми-энергий. В других вариантах уравнения состояния нуклон-нуклонные взаимодействия пытаются учесть многими способами (см. [285, 286] и большое количество цитируемых в них работ).

**Равновесные конфигурации для холодного катализированного вещества:**

Каждому значению плотности в центре звезды $\rho_c$ соответствует одна равновесная конфигурация. Устойчиво ли это равновесие? Анализ устойчивости (гл. 26 и особенно дополнение 26.1) показывает, что многие модели неустойчивы относительно малых радиальных возмущений, которые ведут к гравитационному коллапсу. Устойчивы только белые карлики в области $\lg \rho_c < 8{,}4$ и нейтронные звезды в интервале $13{,}4 \leqslant \lg \rho_c \leqslant 15{,}8$. Неустоичивость в интервале значений $\lg \rho_c$ между 8,4 и 13,4 обусловлена 1) релятивистским увеличением гравитационных сил и 2) высокой сжимаемостью вещества вследствие электронного захвата и потери нейтронов атомными ядрами. Нейтронные звезды устойчивы по простой причине. Вещество, в котором преобладают нейтроны, настолько трудно сжать, что не помогает даже релятивистское увеличение гравитационных сил. При значениях выше $\lg \rho_c \sim 15{,}8$ гравитационные силы становятся настолько большими, что превышают силы давления ядерного вещества, и все звезды тогда неустойчивы. (О возможности существования третьего семейства устойчивых равновесных конфигураций дополнительно к белым карликам и нейтронным звездам см. в [289], однако эта возможность оценивается автором как невероятная.)

**1) формы и устойчивость**

Белые карлики имеют массы ниже 1,2 $M_\odot$ и радиусы от примерно 3000 до примерно 20 000 км. Они поддерживаются в равновесии почти полностью давлением вырожденного электронного газа. Релятивистские отклонения от ньютоновского внутреннего строения составляют лишь долю процента, однако релятивистское влияние на устойчивость и пульсации важно в интервале плотностей от $\rho_c \approx 10^8$ г/см$^3$ до верхнего предела семейства белых карликов $\rho_c = 10^{8{,}4}$ г/см$^3$ (см., например, [262]). Свойства белых карликов совершенно не зависят от того, какой вариант уравнения состояния используется в расчетах.

**2) белые карлики**

Свойства нейтронных звезд умеренно зависят от используемого уравнения состояния. Однако все разновидности уравнения состояния приводят к верхнему и нижнему пределам на массу и плотность в центре. Корректные нижние пределы, вероятно, лежат в интервале

$$13{,}4 \leqslant \lg \rho_{c\,\text{мин}} \leqslant 14{,}0, \qquad 0{,}05\, M_\odot \leqslant M_{\text{мин}} \leqslant 0{,}2\, M_\odot, \quad (24.2)$$

**3) нейтронные звезды**

а корректные верхние пределы, вероятно, лежат в интервале

$$15{,}0 \leqslant \lg \rho_{c\,\text{макс}} \leqslant 16{,}0, \qquad 0{,}5\ M_\odot \leqslant M_{\text{макс}} \leqslant 3\ M_\odot \quad (24.3)$$

(см. [290]). Нейтронные звезды обычно имеют радиусы между примерно 6 км и примерно 100 км. Релятивистские отклонения от ньютоновского внутреннего строения велики, иногда они составляют более 50%.

Кажется несомненным, что никакая холодная звездная конфигурация не может иметь массу, превышающую примерно 5 $M_\odot$ [290] (1,2 $M_\odot$ в соответствии с уравнением состояния Гаррисона — Уилера, фиг. 24.2). Любая более массивная звезда должна уменьшить свою массу ниже этого предела, если она не должна исчезнуть в неизвестности, иначе релятивистские гравитационные силы в конечном счете подвергнут ее катастрофическому гравитационному коллапсу, последовательно уменьшая ее радиус ниже радиуса белого карлика и радиуса нейтронной звезды и превращая ее в черную дыру с размерами в несколько километров. (См. часть VII.)

4) черные дыры

## § 24.3. ПУЛЬСАРЫ

Теория предсказывает, что, если звезда с массой, превышающей чандрасекаровский предел 1,2 $M_\odot$, исчерпала ядерное горючее в своем ядре и последнее сжалось до плотностей, характерных для белых карликов, неустойчивость заставит звезду катастрофически коллапсировать. При этом ядро испытывает имплозию [1]) до тех пор, пока нуклон-нуклонное отталкивание не остановит ее. В результате получится нейтронная звезда, если только масса ядра не настолько велика, чтобы тяготение превысило нуклон-нуклонное отталкивание и превратило звезду в черную дыру. Не вся масса звезды должна стать частью нейтронной звезды или черной дыры. Значительная часть ее, возможно даже бóльшая часть, может быть выброшена в межзвездное пространство в результате взрыва, которым сопровождается коллапс,— взрыва, вызванного вспышкой ядерного горения, ударными волнами и переносом энергии нейтрино («динамитная шашка в центре звезды, воспламеняющаяся при коллапсе»).

**Рождение нейтронной звезды в результате звездного коллапса**

Для теории тяготения более интересно коллапсировавшее ядро, чем выброшенная оболочка. Это ядро, наделенное массой, достаточно малой, чтобы избежать судьбы черной дыры, первоначально будет представлять собой горячий, беспорядочно пульсирующий, быстро вращающийся шар из ядерного вещества с сильным вмороженным магнитным полем (см. фиг. 24.3). Пульсации должны быстро затухнуть. Они сопровождаются испусканием гигантского потока гравитационного излучения, а обратная реак-

**Динамика новорожденной нейтронной звезды**

[1]) То есть взрыв внутрь.— *Прим. перев.*

ция этого излучения вызывает затухание пульсаций за характерное время порядка 1 с [291, 292]. Кроме того, пульсации, повышая и понижая ферми-энергии внутри ядра, приводят соответственно к прямым и обратным реакциям между элементарными частицами; при этом происходит превращение энергии пульсаций в тепло приблизительно с той же скоростью, с которой она уносится гравитационным излучением. (См. [293], а также § 11.5 в книге [196], где можно найти подробности и литературу.)

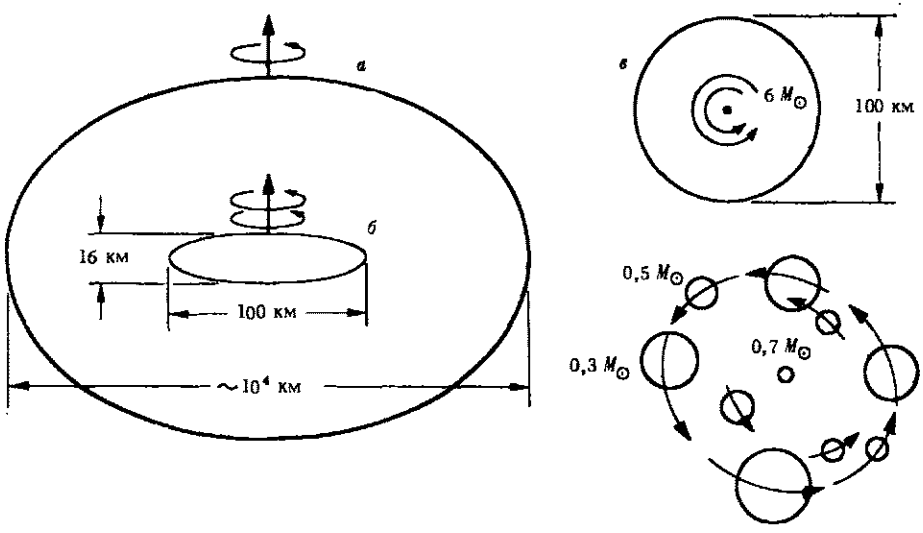
В результате через несколько секунд все пульсации исчезают и получается быстро вращающаяся сплюснутая под действием центробежных сил нейтронная звезда с сильным (вероятно около $10^{12}$ Гс) магнитным полем. Если звезда оказывается неаксиально симметричной (например, из-за действия центробежных сил или несимметричного магнитного поля), то при ее вращении создается непрерывно исходящий поток гравитационных волн, которые уносят вращательную энергию звезды. Независимо от этого процесса вращающееся магнитное поле само излучает электромагнитные волны. Они замедляют вращение и перенос энергии в окружающее взрывающееся газовое облако (туманность). (Основные соображения см. в работах [294—296].)

**Нейтронная звезда как пульсар**

Каким-то образом (детально этот процесс пока не понят) вращающаяся нейтронная звезда испускает в пространство направленный пучок радиоволн и света. Всякий раз, когда луч пересекает Землю, оптические телескопы и радиотелескопы фиксируют импульс излучения. Свет испускается синхронно с радиоволнами, но световые импульсы достигают Земли раньше ($\sim 1$ с для пульсара в Крабовидной туманности), так как радиоволны замедляются при прохождении их через межзвездную плазму. Такова кратко сущность состояния теории пульсаров на 1973 г., принятой большинством астрофизиков.

**Излучение пульсара как средство для изучения нейтронных звезд**

Хотя механизм направленного излучения пульсара не понят, тем не менее оно может служить средством экспериментального изучения нейтронных звезд. Все, что воздействует на скорость вращения звезды даже малейшим образом (относительные изменения до $10^{-9}$), будет обусловливать измеримые нерегулярные импульсы при хронометрировании их на Земле. Если кора и мантия звезды кристаллические, как предсказывает теория на 1973 г., то они могут быть подвержены растрескиванию, смещениям или проскальзыванию («звездотрясение»), а это приводит к изменению момента инерции и, следовательно, скорости вращения. Осколки, падающие в звезду, будут также изменять ее вращение. Какова бы ни была причина возмущения, после него звезда в течение некоторого времени может вращаться иначе; каким образом она вернется к твердотельному вращению, может зависеть от такого явления, как сверхтекучесть глубоко внутри звезды. Таким образом, данные по хронометрированию пульсаров приводят в конечном счете к информации о внутренней области и коре нейтронной звезды и, следовательно (в комбинации с теорией), о ее массе и радиусе.




ФИГ. 24.3.

«Сценарий коллапса, погони и стремительного погружения (схематическое представление, взятое из работы Руффини и Уилера [297].

Медленно вращающаяся звезда с ядром в виде белого карлика (*а*),
эволюционирует прямым астрофизическим путем,
достигает точки гравитационной неустойчивости,
коллапсирует,
превращается в результате в быстровращающуюся блинообразную нейтронную звезду (*б*, *в*).

Затем она фрагментуется (*в*), поскольку обладает слишком большим моментом импульса, чтобы коллапсировать в один устойчивый объект. Если бы вещество блинообразной нейтронной звезды было несжимаемой жидкостью, то фрагментация была бы тесно связана с хорошо известным и часто наблюдаемым явлением («образования капель»). Однако чем массивнее нейтронная звезда, тем она меньше, поэтому понимание фрагментации и последовательных стадий сценария с необходимостью требует поправок или улучшений. На сегодня нельзя гарантировать, что фрагментация вообще имеет место, тем не менее, далее предполагается, что она происходит.

Фрагменты теряют энергию и момент импульса посредством гравитационного излучения.

Вращаясь один за другим, они слипаются («сценарий погони и стремительного погружения»).

При каждом таком стремительном погружении испускается импульс гравитационного излучения.

Осколки фрагментов падают в слившиеся объекты (в зависимости от обстоятельств ими могут быть нейтронные звезды или черные дыры), изменяя их момент импульса.

В конечном счете отдельные нейтронные звезды или черные дыры или и те и другие объединяются в один такой коллапсированный объект, испуская последний импульс гравитационного излучения.

При переходе от одной эволюционирующей звезды к другой детали полного сценария совершенно различны в зависимости от
массы ядра и
момента импульса ядра.

Совершенно иной вид картины нужно рисовать, следовательно, для разных значений этих двух параметров.

Даже для принятых на фигуре значений этих параметров представленная картина в лучшем случае справедлива лишь качественно.

Для любого твердого предсказания хода любого избранного сценария может оказаться существенным подробный численный анализ.

Подробно эти вопросы обсуждаются в обзорной статье Рудермана [298], а также в книге Зельдовича и Новикова [196].

## § 24.4. СВЕРХМАССИВНЫЕ ЗВЕЗДЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЗВЕЗД

Теория устойчивости ньютоновских звезд

Если ньютоновская звезда массы $M$ адиабатически колеблется на основной моде, то изменение ее радиуса $\delta R$ подчиняется уравнению гармонического осциллятора

$$M\delta\ddot{R} = -k\delta R, \tag{24.4}$$

где $k$ —«упругая постоянная», которая зависит от среднего показателя адиабаты звезды $\bar{\Gamma}_1$ [напомним: $\bar{\Gamma}_1 \equiv (n/p)(\partial p/\partial n)_{\text{пост. энтропия}}$], от гравитационной потенциальной энергии $\Omega$, от следа $I = \int \rho r^2 dV$ второго момента распределения массы звезды и от ее массы $M$:

$$k = 3M\,(\bar{\Gamma}_1 - {}^4/_3)\;|\,\Omega\,|\,/I. \tag{24.5}$$

(См. дополнение 24.2.) Если $\bar{\Gamma}_1 > {}^4/_3$, то ньютоновская звезда устойчива и колеблется; если $\bar{\Gamma}_1 < {}^4/_3$, то звезда неустойчива и либо коллапсирует, либо взрывается в зависимости от начальных условий и общей энергетики. Этот результат представляет собой хорошо известную теорему в ньютоновской теории звезд, но она относится только к адиабатическим колебаниям.

В реальной звезде нет чисто адиабатических колебаний. Колебания температуры вызывают соответсвующие колебания непрозрачности звезды и скоростей ядерного горения. А они вкладывают или отбирают энергию от колебаний газа.

Все до сих пор изученные и наблюдаемые звезды главной последовательности имеют массы ниже 60 $M_\odot$. Для таких малых масс теория предсказывает достаточно низкие температуры, так что давление газа доминирует над давлением излучения и показатель адиабаты приблизительно равен показателю адиабаты нерелятивистского газа $\bar{\Gamma}_1 \approx {}^5/_3$. Такие звезды колеблются устойчиво. Результирующее влияние колебаний непрозрачности и скорости горения обычно заключается в откачке энергии от колебаний, которые таким образом затухают. (Известное исключение представляют колебания цефеид.)

Теория устойчивости предсказывает «двигательные колебания» и скорую смерть звезд с $M > 60M_\odot$

Никто еще не видел звезду главной последовательности с массой выше 60 $M_\odot$. Это объясняется следующим образом. Для масс выше 60 $M_\odot$ температура должна быть столь высока, что давление излучения преобладает над газовым давлением и показатель адиабаты $\bar{\Gamma}_1$ лишь немно говыше значения ${}^4/_3$, характерного для чистого излучения. Следовательно, «упругая постоянная» звезды очень мала, хотя и положительна. На такте сжатия температура в центре растет и ядерное горение ускоряется. (Скорость ядерного горения

пропорциональна очень высокой степени температуры в центре; например в массивной звезде HCNO горение освобождает энергию $\varepsilon_{\text{HCNO}}$ со скоростью, пропорциональной $T_c^{11}$.) Поскольку упругая постоянная мала, такт сжатия длится долго и усилившееся ядерное горение создает значительный избыток тепловой энергии и давления. Поэтому в следующем такте, когда вещество звезды движется наружу, звезда расширяется сильнее, чем сжималась («двигатель»). Последующие колебания ведут ко все бóльшим и бóльшим амплитудам. В конечном счете, как подсказывают расчеты, звезда или взрывается, или посредством сильных колебаний сбрасывает достаточное количество массы, так что масса ее падает ниже критического предела $M \sim 60\ M_\odot$. Следовательно, звезды с массами выше $60\ M_\odot$ не живут столь долго, чтобы астрономы могли иметь разумную вероятность обнаружить их.

**Возможное существование сверхмассивных звезд**

Разумеется, что «двигательное действие» не мешает массивным звездам образоваться, прожить короткое время и затем разрушиться. Такая возможность представляется особенно интригующей для *сверхмассивных звезд* [$M$ между $10^3\ M_\odot$ и $10^9\ M_\odot \sim 0{,}01 \times$ (масса галактики)]. Хотя такие звезды, по-видимому, исключительно редки, они могут играть важную роль во Вселенной из-за их огромных масс и гигантскому взрывному освобождению энергии. Кроме того, ясно, что колебания таких звезд, подобно колебаниям цефеид, могут из-за нелинейных процессов затухания поддерживаться долгое время (миллионы лет?) на больших амплитудах.

**Релятивистские неустойчивости в сверхмассивной звезде**

Теория предсказывает, что релятивистские эффекты должны оказывать сильное влияние на колебания сверхмассивной звезды. Увеличение «гравитационной силы» $\delta F_{\text{грав}}$, действующей на оболочку звезды на такте сжатия, и уменьшение ее на такте расширения в общей теории относительности больше, чем в ньютоновской теории. Следовательно, «эффективный показатель» гравитационных сил $\Gamma_{1\,\text{крит}}$ превышает ньютоновское значение $^4/_3$, т. е. мы имеем

$$\left(\begin{array}{l}\text{относительное увеличение}\\ \text{силы тяготения, «подобной}\\ \text{давлению», на единицу отно-}\\ \text{сительного изменения плот-}\\ \text{ности числа барионов}\end{array}\right) \equiv \Gamma_{1\,\text{крит}} = (4/3) + \alpha\,(M/R) + O(M^2/R^2), \quad (24.6)$$

где $\alpha$ — постоянная порядка единицы, которая зависит от внутреннего строения звезды (см. дополнение 26.2). Противостоять тяготению может только упругая сила релятивистского вещества звезды:

$$\left(\begin{array}{l}\text{относительное увеличение}\\ \text{упругой силы, «подобной}\\ \text{давлению», на единицу}\\ \text{относительного изменения}\\ \text{плотности числа барионов}\end{array}\right) = \bar{\Gamma}_1 = \left\langle \frac{p}{n}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_s \right\rangle_{\substack{\text{эффективное}\\ \text{усреднение}\\ \text{по звезде}}}. \quad (24.7)$$

Эффективная упругая постоянная колебаний звезды определяется точно разностью между двумя этими показателями:

$$k = \begin{pmatrix}\text{эффективная}\\ \text{упругая постоянная}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{вклад}\\ \text{«упругих сил»}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{вклад от}\\ \text{тяготения}\end{pmatrix} = 3M\,(\bar{\Gamma}_1 - \Gamma_{1\text{крит}})\,\frac{|\Omega|}{I} \qquad (24.8)$$

(вывод см. в гл. 26). Релятивистское превышение эффективного показателя тяготения над $^4/_3$ [выражение (24.6)] ведет к переходу от устойчивости (положительная постоянная $k$, колебания) к неустойчивости (отрицательная постоянная $k$, взрыв или коллапс) при тех условиях, когда из других соображений обычно ожидается устойчивость. Для сверхмассивных звезд Фаулер и Хойл [299] показали, что

$$\bar{\Gamma}_1 = 4/3 + \zeta\,(M/M_\odot)^{-1/2},$$

где $\zeta$ — постоянная порядка единицы. По мере того как вновь образовавшаяся сверхмассивная звезда сжимается внутрь, нагреваясь (но еще не настолько, чтобы зажечь ядерное горючее), она все ближе и ближе подходит к неустойчивости относительно коллапса. Если горение не останавливает сжатие, то коллапс наступает при радиусе $R_{\text{крит}}$, который определяется выражением

$$\bar{\Gamma}_1 = 4/3 + \zeta\,(M/M_\odot)^{-1/2} = \Gamma_{1\,\text{крит}} = 4/3 + \alpha M/R,$$

т. е.

$$R = (\alpha/2\zeta)\,[(M/M_\odot)^{1/2} \times (\text{шварцшильдовский радиус}) \sim$$
$$\sim 10^4 \times (\text{шварцшильдовский радиус}), \text{ если } M = 10^8 M_\odot.$$

Если звезда очень массивна, то релятивистская неустойчивость наступает при радиусах, значительно превышающих шварцшильдовский. Эффекты общей теории относительности почти не изменяют внутреннее строение звезды, но из-за чувствительного баланса между $\delta\bar{F}_{\text{грав}}$ и $\delta\bar{F}_{\text{выталк}}$ в ньютоновских колебаниях (дополнение 24.2) крошечные релятивистские поправки к этим силам могут решающим образом повлиять на устойчивость.

**Временная стабилизация, обусловленная вращением**

**Возможные сценарии эволюции и смерти сверхмассивной звезды**

На практике история сверхмассивной звезды выглядит гораздо сложнее, чем это было указано здесь. Вращение может на некоторое время стабилизировать ее относительно релятивистского коллапса [1]). Однако, после того как звезда потеряла весь угловой момент свыше критического значения $J_{\text{крит}} = M^2$ («экстремальный керровский предел», см. гл. 33) и сжалась к шварцшильдовскому радиусу, вращение бессильно предотвратить имплозию. В зависимости от ее массы и момента импульса звезда может зажечь свое горючее до или после начала релятивистского коллапса и до или после имплозии через шварцшильдовский радиус. Если горючее зажглось, оно может ослабить разрушение, поскольку да-

[1]) Относительно эволюции сверхмассивной звезды с вращением см. [514]. — *Прим. ред.*

же если звезда в таком случае не испытывает имплозию, ее показатель адиабаты будет близок к критическому и горение может вести ко все большим и большим амплитудам колебаний. Эти процессы настолько сложны, что мы пока (в 1973 г.) не имеем удовлетворительного анализа их, однако обзоры того, что известно и сделано, читатель может найти в работах [30, 196, 300].

Теория звездных пульсаций в общей теории относительности представлена в гл. 26 данной книги для читателей курса 2.

### Дополнение 24.2. КОЛЕБАНИЕ НЬЮТОНОВСКОЙ ЗВЕЗДЫ

Дадим анализ низшей моды радиального колебания. В нем будет использовано усреднение по объему. Такие анализы полезны для понимания качественного поведения и устойчивости звезды. (Обобщение их см. в книге [196].) Однако для получения точных количественных результатов необходимо выполнить более детальный анализ (см., например, [301], а также гл. 26 этой книги).

1. Пусть $M$ — полная масса звезды,
$R$ — радиус звезды,
$\bar{\rho}$ — средняя плотность $= (3/4\pi)\, M/R^3$,
$\bar{p}$ — среднее давление,
$\bar{\Gamma}_1$ — средний показатель адиабаты $= (\bar{n}/\bar{p})\,(\partial\bar{p}/\partial\bar{n})_{\text{ад}} = (\bar{\rho}/\bar{p})\,(\partial\bar{p}/\partial\bar{\rho})_{\text{ад}}$ в ньютоновском пределе, где $\rho = \text{const} \times n$.

2. При равновесии звезды средняя выталкивающая сила $\bar{F}_{\text{выталк}}$ и противодействующая ей гравитационная сила $\bar{F}_{\text{грав}}$ равны

$$\bar{F}_{\text{выталк}} = \bar{p}/R = \bar{F}_{\text{грав}} = \bar{\rho}M/R^2 = (4\pi/3)\,\bar{\rho}^2 R.$$

3. Если колеблющаяся звезда сжалась или расширилась так, что ее радиус стал равным $R + \delta R$, то ее средняя плотность изменилась на величину

$$\bar{\rho} + \delta\bar{\rho} = (3/4\pi)\, M\,[R^{-3} + \delta\,(R^{-3})] = \bar{\rho} - 3\,(\bar{\rho}/R)\,\delta R,$$

а среднее давление будет равно

$$\bar{p} + \delta\bar{p} = \bar{p} + (\bar{p}/\bar{\rho})\,\bar{\Gamma}_1\delta\bar{\rho} = \bar{p} - 3\,(\bar{\Gamma}_1\bar{p}/R)\,\delta R.$$

Соответствующие изменения в силах запишем в виде

$$\delta\bar{F}_{\text{выталк}} = \frac{\delta\bar{p}}{R} - \frac{\bar{p}}{R^2}\,\delta R = -(3\bar{\Gamma}_1 + 1)\,\frac{\bar{p}}{R}\,\frac{\delta R}{R} = -(3\bar{\Gamma}_1 + 1)\,\bar{F}_{\text{выталк}}\left(\frac{\delta R}{R}\right),$$

$$\delta\bar{F}_{\text{грав}} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)(2\bar{\rho}R\delta\bar{\rho} + \bar{\rho}^2\delta R) = \left(\frac{4\pi}{3}\,\bar{\rho}^2 R\right)\left(-5\,\frac{\delta R}{R}\right) = -5F_{\text{грав}}\left(\frac{\delta R}{R}\right).$$

Следовательно, возвращающая сила будет равна (напомним: $\bar{F}_{\text{выталк}} = \bar{F}_{\text{грав}}$)

$$\delta\bar{F}_{\text{грав}} - \delta\bar{F}_{\text{выталк}} = 3\left(\bar{\Gamma}_1 - \frac{4}{3}\right)\bar{F}_{\text{грав}}\,\frac{\delta R}{R}.$$

4. Возвращающая сила вызывает ускорение

$$\delta\vec{F}_{\text{грав}} - \delta\vec{F}_{\text{выталк}} = -\bar{\rho}\delta\ddot{\vec{R}}.$$

Следовательно, уравнение движения для колебаний имеет вид

$$\delta\ddot{R} = -3\,(\bar{\Gamma}_1 - 4/3)\,(4\pi/3)\,\bar{\rho}\delta R,$$

причем угловая частота этих колебаний $\omega$ определяется формулой $\omega^2 = 4\pi\,(\bar{\Gamma}_1 - 4/3)\,\bar{\rho}$, а «упругая постоянная» равна $k = M\omega^2$.

5. Несколько более точный анализ (детали см. в упражнении 39.7, альтернативный вывод см. в дополнении 26.2) приводит к улучшенной формуле для квадрата частоты колебаний

$$\omega^2 = 3\,(\bar{\Gamma}_1 - 4/3)\,|\,\Omega\,|\,/I,$$

$$\Omega = \begin{pmatrix}\text{гравитационная}\\ \text{энергия самой}\\ \text{звезды}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \rho\Phi\, d\mathscr{V} = -\frac{1}{2}\int\int \frac{\rho\rho'}{|x-x'|}\, d\mathscr{V}\, d\mathscr{V}',$$

$$I = \begin{pmatrix}\text{след второго момента}\\ \text{распределения массы}\\ \text{звезды}\end{pmatrix} = \int \rho r^2\, d\mathscr{V}.$$

6. Заметим, что $\bar{\Gamma}_1 > 4/3$ соответствует устойчивым колебаниям; $\bar{\Gamma}_1 < 4/3$ соответствует экспоненциально развивающемуся коллапсу или взрыву.

## § 24.5. КВАЗАРЫ И ВЗРЫВЫ В ГАЛАКТИЧЕСКИХ ЯДРАХ

Сверхмассивные звезды как возможный источник энергии квазаров и галактических ядер

Представление о сверхмассивных звездах впервые выдвинули Хойл и Фаулер [276, 277] для объяснения взрывов в ядрах галактик. Немного спустя, когда были открыты квазары, Хойл и Фаулер совершенно естественно привлекли представление о сверхмассивных звездах для объяснения и этих загадок. Приводят ли сверхмассивные звезды к галактическим взрывам и квазарам, оставалось предметом дебатов в астрономических кругах даже в 1973 г., т. е. когда данная книга была закончена. Поэтому мы не будем излагать здесь этот вопрос и ограничимся следующим замечанием.

Другие возможные источники энергии: плотные звездные скопления, черные дыры

Любой объект, ответственный за квазары и галактические взрывы, должен иметь большую массу ($M \sim 10^6 \div 10^{10}\ M_\odot$) и малый радиус (величина последнего была получена из наблюдений изменения интенсивности радиоизлучения за время пролета света через квазар или галактическое ядро и иногда составляла меньше одних световых суток [1]). Это может быть объект с направленным излучением, т. е. сверхмассивная звезда или плотная смесь большого количества газа и обычных звезд. В действительности две эти возможности могут быть неразделимы. Столкновения звезд в плотном скоплении могут привести к слипанию звезд и посте-

[1]) То есть примерно $3 \cdot 10^{15}$ см, или около 200 астрономических единиц.— *Прим. перев.*

пенному образованию одной или нескольких сверхмассивных звезд [302—304]. Поэтому на одной стадии своей жизни галактическое ядро или квазар могут приводиться в действие за счет столкновений в плотном звездном скоплении; на более поздней стадии они могут приводиться в действие сверхмассивной звездой; на еще более поздней стадии эта сверхмассивная звезда может коллапсировать и превратиться в массивную черную дыру ($10^6$—$10^9\ M_\odot$), которая еще может «жить» и проявлять активность (гл. 33).

## § 24.6. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЗВЕЗДНЫЕ СКОПЛЕНИЯ

**Релятивистские звездные скопления**

Нормальная астрофизическая эволюция галактического ядра, согласно расчетам Сандерса [302] и Спитцера [303], при некоторых обстоятельствах ведет к образованию настолько плотного звездного скопления, что на его строение и эволюцию влияют эффекты общей теории относительности. Теория релятивистских звездных скоплений, как показано в гл. 23, тесно связана с теорией релятивистских звезд. Звезда представляет собой множество молекул газа, которые часто сталкиваются, звездное скопление представляет собой множество звезд, которые сталкиваются редко. Однако в стационарном состоянии частота столкновений относительно неважна. О теории релятивистских звездных скоплений см. в § 25.7 этой книги, работы Зельдовича и Подурца [282], Фекерелля, Ипсера и Торна [305], гл. 12 из книги Зельдовича и Новикова [196] и цитированные там работы. Релятивистское звездное скопление — это скрытый вулкан. У него нет ясного будущего, кроме как эволюции с огромным освобождением энергии в массивную черную дыру или путем прямого коллапса (возможно превращаясь на некоторое время в звезду), или сначала слипаясь в сверхмассивную звезду, которая позже коллапсирует.

# 25. «ЯМА В ПОТЕНЦИАЛЕ» КАК ОСНОВНОЕ НОВОЕ ХАРАКТЕРНОЕ СВОЙСТВО ПОТЕНЦИАЛА, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО ДВИЖЕНИЕ В ШВАРЦШИЛЬДОВСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

*«Эксцентричны, переплетены и наиболее регулярны тогда, когда, они кажутся наиболее нерегулярными, и в их движениях божественная гармония».*

МИЛТОН, 1665 г.[1])

**Эта глава полностью относится к курсу 2, за исключением фиг. 25.2 и 25.6 и дополнений 25.6 и 25.7, с которыми читателям курса 1 следовало бы ознакомиться, чтобы понять и почувствовать вкус к теме. Перед чтением данной главы не нужно изучать какой-либо изложенный ранее материал курса 2.**

**§ 25.2 (симметрии) необходим как подготовительный материал к дополнению 30.2 (перемешанный мир). Оставшаяся часть главы не является существенной для изучения какой-либо из последующих глав, но будет полезна для понимания**

**1) гл. 31—34 (гравитационный коллапс и черные дыры) и**

**2) гл. 40 (эксперименты в Солнечной системе).**

## § 25.1. ОТ ЗАКОНОВ КЕПЛЕРА К ЭФФЕКТИВНОМУ ПОТЕНЦИАЛУ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ В ШВАРЦШИЛЬДОВСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

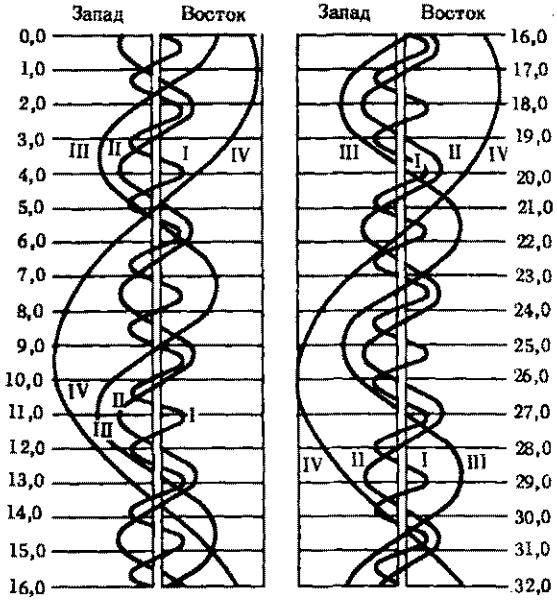
**Обзор данной главы**

Наибольшим триумфом, увенчавшим ньютоновскую теорию тяготения, было объяснение принципиальных особенностей Солнечной системы: линия, соединяющая планету с Солнцем, «заметает» при движении планеты равные площади за равные времена; орбита планеты является эллипсом, в одном из фокусов которого находится Солнце; куб главной полуоси эллипса $a$, умноженный на квадрат средней угловой скорости планеты на орбите ($\omega = 2\pi/\text{период}$), дает число с размерностью длины, одинаковое для всех планет (дополнение 25.1) и равное массе Солнца

$$M = \omega^2 a^3.$$

[1]) Из поэмы [512].

То же самое в точности справедливо для спутников Юпитера (фиг. 25.1) и Земли (дополнение 25.1) и всюду на небесах. Что можно дополнительно ожидать от теории тяготения Эйнштейна, когда она в свою очередь берется разрешать эту вековую тему пробного объекта, движущегося под действием сферически-симметричного центра притяжения? Принципиально новый результат можно сформулировать в одном предложении: поведение частицы определяется «эффективным потенциалом» (фиг. 25.2 и § 25.5, 25.6), который обладает следующими свойствами: а) на больших расстояниях носит характер притяжения — $M/r$, б) на коротких — характер отталкивания (момент импульса)$^2/r^2$, присущий ньютоновской теории тяготения, и в) на еще более ко-




ФИГ. 25.1.
Спутники Юпитера, как это следует из ночных наблюдений за ними с помощью полевого бинокля или телескопа, дают возможность проверить для себя основные идеи гравитационной физики в ньютоновском приближении (расстояния велики по сравнению со шварцшильдовским радиусом). Для практически круговых орбит этих спутников закон Кеплера принимает вид $M^1 = \omega^2 r^3$ («принцип 1—2—3»), а скорость на орбите равна $\beta = \omega r$. Получив из наблюдений значения любых двух величин $\beta$, $M$, $\omega$, $r$, можно найти две другие. (В противоположном предельном случае двух объектов, обладающих равными массами $M$, находящихся на расстоянии $r$ друг от друга и обращающихся вокруг общего центра тяжести, имеем $M = \omega^2 r^3/2$, $\beta = \omega r/2$.) Приведенные здесь пространственные расположения спутников Юпитера I—IV за декабрь 1964 г. (дни 0,0; 1,0; 2,0 и т. д. во «всемирном времени», о котором см. в любом хорошем словаре или энциклопедии) взяты из календаря за 1964 г. [306].

ротких расстояниях имеет *потенциальную яму*. Эта яма 1) захватывает частицы, достаточно близко подходящие, 2) устанавливает критическое расстояние ближайшего подхода для процесса захвата черной дырой, 3) для частицы, которая подходит к критической точке, но не пересекает ее, удлиняет время обращения по сравнению со временем, ожидаемым согласно ньютоновской теории, и тем самым 4) делает время радиального отклонения длиннее периода обращения, 5) вызывает прецессию орбиты, остающейся в остальном кеплеровской, и 6) отклоняет быструю частицу или фотон на бóльшие углы, чем это предсказывает ньютоновская теория.

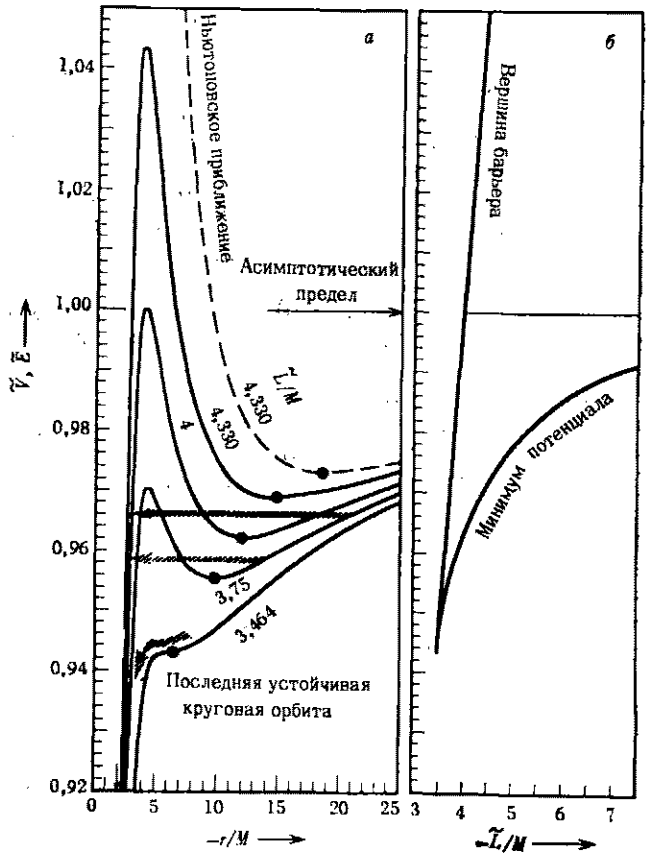
Поскольку *потенциальная яма* является основным новым характерным свойством потенциала, определяющего движение в шварцшильдовской геометрии, и источником главных предсказаний (дополнение 25.2), целесообразно искать наиболее прямой путь к понятию эффективного потенциала, его смыслу и применению. Ближайшим из имеющихся в нашем распоряжении проводников в этом поиске является ньютоновская механика.

Аналитическая механика предлагает несколько способов рассмотрения проблемы движения в поле центральной силы и два из них здесь наиболее уместны:

1. Метод мировой линии, который включает в себя дифференциальные уравнения движения второго порядка (уравнения Лагранжа), поиск постоянных интегрирования, сведение к уравнениям первого порядка и дальнейшее интегрирование весьма различными способами в соответствии с тем, что хотят знать: форму орбиты $\theta = \theta(r)$ или время достижения данной точки на мировой линии $t = t(r)$.

2. Метод волнового гребня, иначе известный как «метод эйконала» или «метод Гамильтона — Якоби», который задает движение с помощью условия «усиливающей интерференции волновых гребней» и делает таким образом единственный скачок от уравнения Гамильтона — Якоби к движению пробного объекта.

Оба метода используются здесь по очереди, поскольку каждый из них дает особое понимание проблемы. Метод Гамильтона — Якоби (дополнение 25.3) быстро ведет к основным интересным результатам (дополнение 25.4) и тесно связан с квантовым принципом. Метод мировой линии (§ 25.2—25.4) исходит из самих уравнений движения по геодезическим. Он дает более привычный способ подхода к предмету для читателя, незнакомого с подходом Гамильтона — Якоби. Кроме того, при попытке решить уравнения движения по геодезическим необходимо анализировать свойства симметрии геометрии — предприятие, которое продолжает платить дивиденты при переходе от шварцшильдовской геометрии к геометрии Керра — Ньюмена (гл. 33) и от космологической модели Фридмана (гл. 27) к более общим космологическим моделям (гл. 30).




ФИГ. 25.2.

Эффективный потенциал, в котором движется пробная частица в шварцшильдовской геометрии с сосредоточенной массой $M$. Энергия частицы в единицах ее массы покоя $\mu$ обозначена $\tilde{E} = E/\mu$, момент импульса $\tilde{L} = L/\mu$. Величина $r$ — шварцшильдовская координата. Эффективный потенциал (также в единицах $\mu$) определяется уравнением (25.16а), или, эквивалентно, уравнением $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \tilde{V}^2(r) = \tilde{E}^2$ (см. также § 25.5) и имеет величину $\tilde{V} = [(1-2M/r)\,(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}$.

Он представляет собой то значение $\tilde{E}$, при котором радиальная кинетическая энергия частицы (в точке $r$) сводится к нулю (значение $\tilde{E}$, при котором точка $r$ становится «точкой поворота»: $\tilde{V}(r) = \tilde{E}$). Заметим, что равным образом эффективным потенциалом можно считать $\tilde{V}^2(r)$ и определить точку поворота условием $V^2 = \tilde{E}^2$. Выбор определения зависит от удобства, от предполагаемого применения, от связи с модельным дифференциальным уравнением $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = E$ и происходит под влиянием желания привести эффективный потенциал в соответствие с эффективным потенциалом ньютоновской теории. Устойчивые круговые орбиты возможны (изображающая точка расположена в минимуме эффективного потенциала) только для значений $\tilde{L}$, превышающих $2\sqrt{3}M$. Для любого такого фиксированного значения $\tilde{L}$ движение незначительно отклоняется от кругового при отклонении энергии от минимума потенциала (см. на диаграмме «а» две сплошные горизонтальные линии для $\tilde{L} = 3{,}75\ M$). В классической физике движение ограничено областью положительной кинетической энергии. В квантовой физике частица может совершить туннельный переход через область, где вычисленная классически кинетическая энергия отрицательна (на фигуре см. заштрихованные горизонтальные линии), и двигаться по направлению к «потенциальной яме» (захват черной дырой). Вероятность такого туннельного перехода пренебрежимо мала, если центр притяжения имеет любые макроскопические

размеры, но в принципе этот туннельный переход становится важным для черной дыры с массой $10^{17}$ г (или $10^{-11}$ см), если такой объект, вообще говоря, может существовать.

Диаграмма «б» дает значения минимума и максимума потенциала в зависимости от момента импульса пробной частицы. Корни $d\tilde{V}/dr$ даны как функции «параметра приведенного момента импульса» $L^\dagger = \tilde{L}/M = L/M\mu$

$$r = \frac{6M}{1+(1-12/L^{\dagger 2})^{1/2}},$$

$$\tilde{E}^2 = \frac{(L^{\dagger 2}+36)+(L^{\dagger 2}-12)\,(1-12/L^{\dagger 2})^{1/2}}{54} =$$

$$[=8/9 \text{ для } L^\dagger=(12)^{1/2};\quad 1 \text{ для } L^\dagger=4;\quad (L^{\dagger 2}/27)+(1/3)\,(1/L^{\dagger 2})+ \\ +\ldots \text{ для } L^\dagger \longrightarrow \infty]$$

(положительный корень для максимума эффективного потенциала, отрицательный корень для минимума; см. упражнение 25.18).

## Дополнение 25.1. МАССА, ВЫЧИСЛЕННАЯ ПО СРЕДНЕЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ И БОЛЬШОЙ ПОЛУОСИ: $M = \omega^2\, a^3$

Применимость ньютоновского анализа определяется малостью массы (или «полурадиусом Шварцшильда», или «протяженностью ямы в потенциале»), приведенной в последнем столбце, по сравнению с большой полуосью $a$, приведенной в предпоследнем столбце. Основные данные взяты из книги Аллена [307].

| Объект | Период *, сут | $\omega$, $см^{-1}$ | $a$, см | $\omega^2 a^3$, см |
|---|---|---|---|---|
| *Планеты* | | | | |
| Меркурий | 87,9686 | $275{,}8\cdot10^{-19}$ | $0{,}5791\cdot10^{13}$ | $1{,}477\cdot10^{5}$ |
| Венера | 224,700 | 107,95 | 1,0821 | 1,477 |
| Земля | 365,257 | 66,41 | 1,4960 | 1,477 |
| Марс | 686,980 | 35,31 | 2,2794 | 1,477 |
| Юпитер | 4332,587 | 5,599 | 7,783 | 1,478 |
| Сатурн | 10759,20 | 2,255 | 14,27 | 1,477 |
| Уран | 30685 | 0,7905 | 28,69 | 1,476 |
| Нептун | 60188 | 0,4030 | 44,98 | 1,478 |
| Плутон | 90700 | $0{,}2674\cdot10^{-19}$ | $59{,}00\cdot10^{13}$ | $1{,}469\cdot10^{5}$ |
| *Главные спутники Юпитера* | | | | |
| Ио | 1,769138 | $13{,}711\cdot10^{-16}$ | $0{,}422\cdot10^{11}$ | 141,3 |
| Европа | 3,551181 | 6,831 | 0,671 | 141,0 |
| Ганимед | 7,154553 | 3,391 | 1,070 | 140,8 |
| Каллисто | 16,689018 | $1{,}454\cdot10^{-16}$ | $1{,}883\cdot10^{11}$ | 141,1 |
| *Два спутника Земли* | | | | |
| ОНО 5** | 95,6 мин | $3{,}65\cdot10^{-14}$ | $6{,}916\cdot10^{8}$ | 0,442 |
| Луна | 27,32 | $0{,}888\cdot10^{-16}$ | $3{,}84\cdot10^{-10}$ | 0,446 |

* Имеется в виду сидерический период: время одного оборота относительно неподвижных звезд.

** Орбитальная научная обсерватория, запущенная 22 января 1969 г. для наблюдения рентгеновского и ультрафиолетового излучения от Солнца. Перигей 531 км, апогей 560 км над Землей.

**Некоторые типичные массы и времена в обычных и геометрических единицах**

Переводной коэффициент для массы $G/c^2 = 0{,}742 \cdot 10^{-28}$ см/г

| Масса | Галактика | Солнце | Юпитер | Земля |
|---|---|---|---|---|
| $M_{\text{обычн}}$, г | $2{,}2 \cdot 10^{44}$ | $1{,}989 \cdot 10^{33}$ | $1{,}899 \cdot 10^{30}$ | $5{,}977 \cdot 10^{27}$ |
| $M$, см | $1{,}6 \cdot 10^{16}$ | $1{,}47 \cdot 10^{5}$ | 112 | 0,444 |

Переводной коэффициент для времени $c = 2{,}998 \cdot 10^{10}$ см/с
1 сидерический год = 365,256 сут или $3{,}1558 \cdot 10^{7}$ с

| Период | 1 с | 1 мин | 1 ч | 1 сут |
|---|---|---|---|---|
| $\omega_{\text{обычн}}$, $с^{-1}$ | 6,28 | $1{,}046 \cdot 10^{-1}$ | $1{,}75 \cdot 10^{-3}$ | $7{,}28 \cdot 10^{-5}$ |
| $\omega$, $см^{-1}$ | $2{,}09 \cdot 10^{-10}$ | $3{,}48 \cdot 10^{-12}$ | $5{,}80 \cdot 10^{-14}$ | $2{,}42 \cdot 10^{-15}$ |

| 1 неделя | 1 месяц | 1 год |
|---|---|---|
| $1{,}04 \cdot 10^{-5}$ | $2{,}39 \cdot 10^{-6}$ | $1{,}99 \cdot 10^{-7}$ |
| $3{,}46 \cdot 10^{-16}$ | $7{,}95 \cdot 10^{-17}$ | $6{,}63 \cdot 10^{-18}$ |

## Дополнение 25.2. ДВИЖЕНИЕ В ШВАРЦШИЛЬДОВСКОЙ ГЕОМЕТРИИ КАК ОСНОВНАЯ ОТПРАВНАЯ ТОЧКА ГЛАВНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ ГЕОМЕТРОДИНАМИКИ

1. Ньютоновское действие Солнца на планеты и Земли на Луну и человека.
2. Искривление света в гравитационном поле Солнца.
3. Красное смещение света, испущенного Солнцем.
4. Прецессия перигелия Меркурия вокруг Солнца.
5. Захват пробного объекта черной дырой как простой тип гравитационного коллапса.
6. Динамика фридмановской Вселенной, выведенная из шварцшильдовской модели «решетчатой Вселенной». Решетчатая Вселенная построена из 120 или некоторого другого магического числа сгустков массы, причем каждая масса помещена в свою пустую ячейку решетки. Каждая ячейка решетки является в действительности многоугольной, но ее можно идеализированно рассматривать (см. приближение Вигнера — Зейтца, используемое в физике твердого тела) как сферическую. Пробный объект, помещенный на границе раздела двух ячеек, падает к центру ячейки (стандартное радиальное движение в шварцшильдовской геометрии; см. обсуждение после уравнения (25.27). Поэтому две массы падают по направлению друг к другу с вычисляемой скоростью. Из этого простого аргумента следует вся динамика замкнутой решетчатой Вселенной с гео-

метрией 3-сферы, что находится в тесном согласии с предсказаниями фридмановской модели [308]).

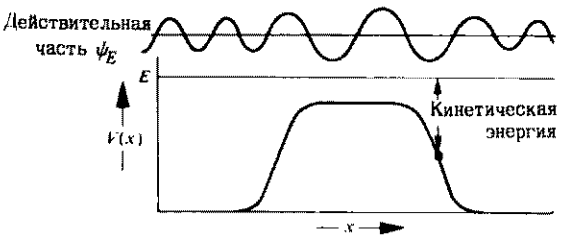
7. Возмущения I шварцшильдовской геометрии. Гравитационные волны падают, рассеиваются и захватываются черной дырой. Волны с длиной волны, меньшей шварцшильдовского радиуса, можно в хорошем приближении анализировать методами геометрической оптики (упражнения 35.15 и 35.16), использованными в этой главе для рассмотрения движений частиц и фотонов. Для более длинных волн важную роль играют физико-оптические поправки к геометрической оптике (см. § 35.8 и упражнения 32.10, 32.11). Аналогичные соображения применимы к электромагнитным волнам и волнам де Бройля.
8. Лептонное число для электрона в наинизшем квантовом состоянии в геометрии черной дыры («гравитационное поле силы») оказывается трансцендентным (захват электрона!) или нетрансцендентным в зависимости от того, велика или мала масса черной дыры по сравнению с определенной критической массой $M_{*e} = M^{*2}/m_e$ ($\sim 10^{17}$ г или $10^{-11}$ см) [309—315]. Аналогично (с другой величиной критической массы) обстоит дело и с сохранением барионного числа [316—318]. Чтобы ответить на вопрос: «трансцендентно оно или нет», необходимо решить квантовомеханические волновые уравнения, классическим пределом которых служит уравнение Гамильтона — Якоби для орбит частицы и фотона. Эти квантовомеханические волновые уравнения содержат эффективные потенциалы, тождественные — если отвлечься от поправок, связанных со спином и длиной волны — эффективным потенциалам, определяющим движение частицы и фотона.
9. Возмущения II шварцшильдовской геометрии. Такие малые изменения в стандартной шварцшильдовской геометрии черной дыры, которые, сохраняя стационарность по времени, отвечают изменениям в «мертвой» черной дыре, превращающим ее в «живую» черную дыру, наделенную как массой, так и угловым моментом (см. гл. 33). Для анализа таких изменений в геометрии черной дыры необходимо вновь решить волновые уравнения, которые в данном случае являются классическими. Снова волновые уравнения тесно связаны с уравнением Гамильтона — Якоби, а их эффективный потенциал — с эффективным потенциалом, определяющим движение частицы.

### Дополнение 25.3. ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ: ЕСТЕСТВЕННОСТЬ ТАКОГО ОПИСАНИЯ РАТИФИЦИРОВАНА КВАНТОВЫМ ПРИНЦИПОМ

1. Чисто классическое (неквантовое).
2. Разработано Вильямом Роуаном Гамильтоном, исходившим из убеждения, что механика по своему характеру аналогична оптике и что механическая «мировая линия частицы» есть идеализация, аналогичная «световому лучу» в геометрической оптике. Локализация энергии светового луча лишь приблизительна. Разброс ее определяется длиной световой волны («геометрическая оптика»). Гамильтон предвосхитил ту же идею для частиц: «квантовая физика до квантовой физики». Разработанный им и Якоби способ рассмотрения движения с помощью функции Гамильтона — Якоби $S(x, t)$ (возьмем пример динамической системы только с одной степенью свободы $x$) представляет собой

самый кратчайший скачок от классических идей к квантовым. Более того, реальный мир — это квантовый мир. Классическая механика не рождается из вакуума. Она — идеализация и приближение к квантовой механике.

3. Ключевая идея состоит в переходе к настолько короткой длине волны частицы, чтобы можно было пренебречь квантовомеханическим разбросом или неопределенностью в положении частицы (или разбросом конфигурационных координат более сложной системы). Лучшего способа соединить дух квантовой механики и точность локализации классической механики найдено не было.
4. Пусть гамильтониан $H(p, x) = p^2/2m + V(x)$, а энергия частицы есть $E$. Тогда не существует способа описания движения частицы в пространстве и времени, сколь-нибудь совместимого с квантовым принципом. Запрещает принцип неопределенности (если точно известно, что энергия $\Delta E \to 0$, то из соотношения $\Delta E\, \Delta t \geqslant \hbar/2$ следует неопределенность $\Delta t \to \infty$; аналогично, если известно, что $\Delta p \to 0$, то из соотношения $\Delta p\, \Delta x \geqslant \hbar/2$ следует $\Delta x \to \infty$). Квантовомеханическая волновая функция размазана по всему пространству.




Из-за этой размазки приходится вводить так называемое полуклассическое приближение или приближение Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна («ВКБ», см., например, [319]) для функции амплитуды вероятности

$$\psi_E(x, t) = \begin{pmatrix}\text{медленно меняющаяся}\\ \text{функция амплитуды}\end{pmatrix} e^{(i/\hbar) S_E(x,t)}. \tag{1}$$

5. Не помогает локализации распределения вероятности и очень малая величина постоянной $\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-27}$ г·см$^2$/с [или $\hbar = (1{,}6 \cdot 10^{-33}$ см$)^2$ в геометрических единицах] по сравнению с «величиной действия» или «величиной функции Гамильтона — Якоби $S$» или «динамической фазой $S$», с которыми сталкиваются в большинстве повседневных приложений.
6. Не помогает локализации распределения вероятности и то, что динамическая фаза подчиняется простому закону распространения Гамильтона — Якоби

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x\right) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x). \tag{2}$$

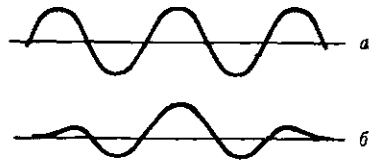
7. Не помогает локализации распределения вероятности то, что решение этого уравнения для частицы с энергией $E$ необычно просто

$$S(x, t) = -Et + \int_{x_0}^{x} \{2m[E - V(x)]\}^{1/2}\, dx + \delta_E \tag{3}$$

($\delta_E$ — произвольная аддитивная фазовая постоянная). Амплитуда вероятности все еще остается размазанной по всему пространству. Нет и малейшего следа чего-нибудь подобного локализованной мировой линии $x = x(t)$.

8. Для локализации частицы построим амплитудно-вероятностный волновой пакет путем суперпозиции моночастотных (моноэнергетических) членов согласно рецепту, заданному в виде

$$\psi(x, t) = \psi_E(x, t) + \psi_{E+\Delta E}(x, t) + \ldots . \qquad (4)$$

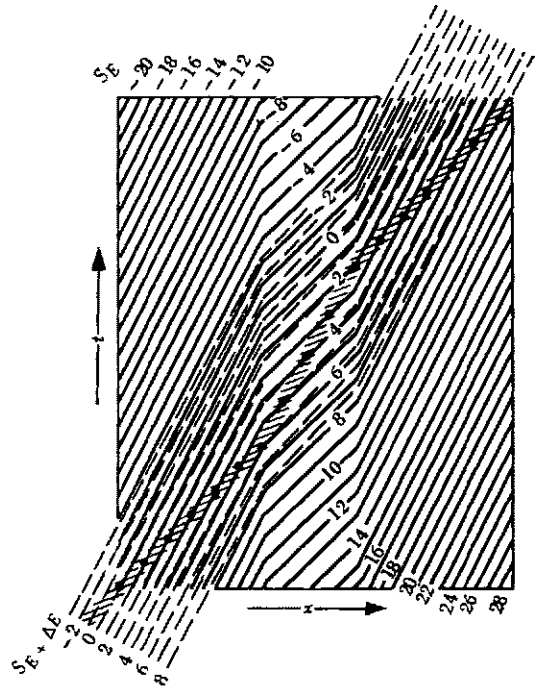



а — моноэнергетическая волна;
б — волновой пакет, полученный в результате наложения моноэнергетических волн.

Почти везде имеет место гасящая интерференция. Волновой пакет концентрируется в области усиливающей интерференции, где фазы различных волн согласованы; поэтому

$$S_E(x, t) = S_{E+\Delta E}(x, t). \qquad (5)$$

Наконец, мы продвинулись от волны, размазанной по всему пространству, к локализованной волне и, следовательно, в пределе бесконечно малой длины волны, к классической мировой линии. Это одно уравнение усиливающей интерференции связывает между собой $x$ и $t$ (геометрическое место точек, соответствующих мировой линии на графике $x$, $t$). Сплошные линии с цифрами —20, —19, —18 и т. д. — волновые гребни $\psi_E$; пунктирные линии — волновые гребни $\psi_{E+\Delta E}$. Затемнена область усиливающей интерференции (волновой пакет). Черные точки отмечают положение классической мировой линии




$$\lim_{\Delta E \to 0} \frac{S_{E+\Delta E}(x, t) - S_E(x, t)}{\Delta E} = 0.$$

9. Если перейти к классическому пределу (постоянная $\hbar$ пренебрежимо мала по сравнению с рассматриваемыми величинами действия; следовательно, пренебрежимо мала длина волны, а значит, пренебрежимо мал также разброс энергий $\Delta E$, что необходимо для построения полностью локализованного волнового пакета), то из условия усиливающей интерференции немедленно получаем ньютоновскую мировую линию в пространстве-времени, т. е.

$$\frac{S_{E+\Delta E}(x, t) - S_E(x, t)}{\Delta E} = 0$$

сводится к условию

$$\frac{\partial S_E(x, t)}{\partial E} = 0.$$

Будучи примененным к выражению (3), это условие в свою очередь дает время, необходимое для движения до точки $x$:

$$-t + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\{(2/m)[E - V(x)]\}^{1/2}} + t_0 = 0,$$

где $t_0$ — сокращенное обозначение величины

$$t_0 = d\delta_E/dE$$

(«производная от базисной величины динамической фазы по энергии»).

10. В этом окончательном ньютоновском результате не содержится никакого следа от квантового действия по простой причине: постоянная $\hbar$ и длина волны считались пренебрежимо малыми. В этом пределе положение волнового «пакета» совпадает с положением гребня волны. Положение волнового гребня — это именно то, что определяется функцией $S_E(x, t)$, а условие «усиливающей интерференции» $\partial S_E(x,t)/\partial E = 0$ без всякого приближения дает положение четко определенной ньютоновской мировой линии $x = x(t)$.
11. Уместно ли такое рассмотрение движения в поле центральной силы? Это самый быстрый из известных путей к понятию эффективного потенциала (дополнение 25.4).

## Дополнение 25.4. АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО ПРИТЯЖЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНОЙ МАССЫ, ПРОВЕДЕННЫЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

### А. Ньютоновская теория тяготения

Гамильтониан

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{p}_r^2}{2} + \frac{\tilde{p}_\theta^2}{2r^2} + \frac{\tilde{p}_\phi^2}{2r^2 \sin^2\theta} - \frac{M}{r} \qquad (1)$$

(здесь и далее величины $E, p$ и т. д., отмеченные тильдой, относятся к пробному объекту единичной массы; пробная частица массы $\mu$ совершает то же движение с энергией $E = \mu\tilde{E}$, импульсом $\mathbf{p} = \mu\tilde{\mathbf{p}}$ и т. д.).

Уравнение Гамильтона — Якоби, описывающее распространение волновых гребней:

$$-\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \phi}\right)^2-\frac{M}{r}. \tag{2}$$

Решается «методом разделения переменных» при условии, что $\sqrt{\tilde{a}^2}\equiv\pm a$:

$$\tilde{S}=-\tilde{E}t+\tilde{p}_\phi\phi+\int^{\theta}\left(\tilde{L}^2-\frac{\tilde{p}_\phi{}^2}{\sin^2\theta}\right)^{1/2}d\theta+\int^{r}\left[2\left(\tilde{E}+\frac{M}{r}-\frac{\tilde{L}^2}{2r^2}\right)\right]^{1/2}dr+\delta_{\tilde{p}_\phi,\,\tilde{L},\,\tilde{E}}. \tag{3}$$

(Проверяется путем подстановки в уравнение Гамильтона — Якоби. Решение в виде *суммы* четырех членов, отвечающих четырем независимым переменным, соответствует выражению для амплитуды вероятности в квантовой механике в виде *произведения* четырех множителей, поскольку $iS/\hbar = i\mu\tilde{S}/\hbar$ стоит в экспоненте приближенного выражения для амплитуды вероятности.)

Усиливающая интерференция волн

1) со слабо различающимися значениями $\tilde{E}$ [наложите «условие усиливающей интерференции» $\partial\tilde{S}_{\tilde{p}_\phi,\,\tilde{L},\,\tilde{E}}(t, r, \theta, \phi)/\partial\tilde{E}=0$] указывает, когда частица достигнет данной точки $r$ (т. е. дает соотношение между $t$ и $r$);
2) со слабо различающимися значениями «параметра полного момента импульса на единицу массы» $L$ [наложите условие усиливающей интерференции $\partial\tilde{S}_{\tilde{p}_\phi,\,\tilde{L},\,\tilde{E}}(t, r, \theta, \phi)/\partial\tilde{L}=0$] дает соотношение между $\theta$ и $r$ (основная характеристика формы орбиты);
3) со слабо различающимися значениями «параметра азимутального момента импульса на единицу массы» $\tilde{p}_\phi$ (наложите условие $\partial\tilde{S}/\partial\tilde{p}_\phi=0$) дает соотношение между $\theta$ и $\phi$:

$$0=\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{p}_\phi}=\phi-\int^{\theta}\frac{(\tilde{p}_\phi/\tilde{L})\,d\theta}{\sin\theta\,(\sin^2\theta-\tilde{p}_\phi{}^2/\tilde{L}^2)^{1/2}}. \tag{4}$$

Плоский характер орбиты.

Можно ли разобраться в последнем интеграле с помощью таблиц интегралов? Быстрее и яснее уловить содержание без вычисления: частица движется в плоскости. Вектор, отвечающий моменту импульса $\tilde{L}$, перпендикулярен этой плоскости. Проекция момента импульса на ось $z$ равна $\tilde{p}_\phi=\tilde{L}\cos\alpha$ (определение орбитального наклонения $\alpha$). Прямая линия, связывающая начало с частицей, пересекает единичную сферу в точке $\mathcal{P}$. С течением времени точка $\mathcal{P}$ прочерчивает большой круг на единичной сфере. Плоскость этого большого круга разрезает экваториальную плоскость по «линии узлов», на которой как бы «подвешены» две плоскости с двухгранным углом $\alpha$ между ними. В декартовой системе координат, в которой $\hat{y}$ изменяется вдоль линии узлов, а $\hat{x}$ лежит в плоскости *орбиты*, орбита точки $\mathcal{P}$ описывается соотношениями $\hat{x}=r\cos\psi$, $\hat{y}=r\sin\psi$, $\hat{z}=0$. В системе координат, в которой $y$ изменяется вдоль линии узлов, а $x$ лежит в плоскости *экватора*, имеем

$$r\cos\theta=z=\hat{z}\cos\alpha+\hat{x}\sin\alpha=r\cos\psi\sin\alpha,$$
$$r\sin\theta\cos\phi=x=-\hat{z}\sin\alpha+\hat{x}\cos\alpha=r\cos\psi\cos\alpha,$$
$$r\sin\theta\sin\phi=y=\hat{y}=r\sin\psi.$$

Исключив декартовы координаты, а также (взяв отношения) $r$, находим уравнение траектории точки $\mathcal{P}$ в параметрической форме

$$\operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}\psi/\cos\alpha$$

и

$$\cos\theta = \cos\psi\sin\alpha.$$

Здесь увеличивающиеся значения $\psi$ соответствуют последовательным точкам на большом круге. Исключая $\psi$ с помощью соотношения

$$\sec^2\psi - \operatorname{tg}^2\psi = 1,$$

находим

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\theta} - \operatorname{tg}^2\phi\cos^2\alpha = 1,$$

или, более кратко,

$$\sec\phi = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta. \tag{5}$$

Проверяем, что угол $\phi$, вычисленный из формулы (5), дает интеграл (4), таким образом в точности подтверждая соотношение между $\theta$ и $\phi$. Кроме того, произвольная постоянная интегрирования, получающаяся из соотношения (4) и опущенная для простоты в (5), легко учитывается там заменой $\phi$ на $\phi - \phi_0$ (поворот линии узлов на новый азимут). Физика, возникающая при рассмотрении соотношения между $\theta$ и $\phi$, связана, очевидно, с элементарной пространственной геометрией и больше ни с чем. Те же геометрические соотношения появляются без каких бы то ни было релятивистских поправок (как могло бы там что-нибудь появиться?!) для движения в шварцшильдовской геометрии. Следовательно, здесь и далее уместно опустить эти усложнения. Пусть частица движется только в направлении увеличивающегося значения $\theta$ и вовсе не движется в направлении увеличивающегося значения $\phi$, т. е. пусть она движется по орбите с нулевым моментом импульса $\tilde{p}_\phi$ (полный момент импульса $L$ составляет с осью $z$ угол $\alpha = \pi/2$). Таким образом, динамическая фаза $S$ (если переходить от классической механики к квантовой, то ее следует поделить на $\hbar$, чтобы получить фазу шредингеровской волновой функции) принимает вид

$$\tilde{S} = -\tilde{E}t + \tilde{L}\theta + \int^r \left[2\left(\tilde{E} + \frac{M}{r} - \frac{\tilde{L}^2}{2r^2}\right)\right]^{1/2} dr + \delta_{\tilde{L},\,\tilde{E}}. \tag{6}$$

Форма орбиты дается выражением

$$0 = \frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{L}} = \theta - \int^r \frac{\tilde{L}\,dr/r^2}{[2(\tilde{E} + M/r - \tilde{L}^2/2r^2)]^{1/2}}, \tag{7}$$

откуда

$$r = \frac{\tilde{L}^2/M}{1 + e\cos\theta}. \tag{8}$$

Здесь $e$ — эксцентриситет орбиты

$$e = (1 + 2\tilde{E}\tilde{L}^2/M^2)^{1/2} \tag{9}$$

($e$ больше 1 для положительных $\tilde{E}$, гиперболическая орбита; $e$ равно 1 для $\tilde{E} = 0$, параболическая орбита; $e$ меньше 1 для отрицательных $\tilde{E}$, эллиптическая орбита). Постоянная интегрирования в (8) для простоты опущена. Ее можно учесть, заменив $\theta$ на $\theta - \theta_0$ (поворот направления главной оси в плоскости орбиты). Другие характеристики орбиты

$$\begin{pmatrix}\text{большая полуось}\\ \text{эллиптической}\\ \text{орбиты}\end{pmatrix} \qquad a = \frac{\tilde{L}^2/M}{1-e^2} = \frac{M}{(-2\tilde{E})}; \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix}\text{малая полуось}\\ \text{эллиптической}\\ \text{орбиты}\end{pmatrix} \qquad b = \frac{\tilde{L}^2/M}{(1-e^2)^{1/2}} = \frac{\tilde{L}}{(-2\tilde{E})^{1/2}}; \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix}\text{«прицельный параметр»}\\ \text{для гиперболической}\\ \text{орбиты или «расстояние}\\ \text{ближайшего подхода» в}\\ \text{отсутствие отклонения}\end{pmatrix} \qquad b = \frac{\text{момент импульса на единицу массы}}{\text{линейный импульс на единицу массы}} =$$

$$= \frac{\tilde{L}}{(2\tilde{E})^{1/2}} \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix}\text{истинное расстояние}\\ \text{ближайшего подхода}\end{pmatrix} \qquad r_{\text{мин}} = \frac{\tilde{L}^2/M}{(1+2\tilde{E}\tilde{L}^2/M^2)^{1/2}+1}; \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix}\text{угол отклонения}\\ \text{для гиперболической}\\ \text{орбиты}\end{pmatrix} \qquad \Theta = \pi - 2\arccos(1/e) = 2\operatorname{arc\,tg}\left[M/(2\tilde{E})^{1/2}\tilde{L}\right] =$$

$$= 2\operatorname{arc\,tg}\left[M/2\tilde{E}b\right]; \tag{14}$$

$$\begin{pmatrix}\text{дифференциальное}\\ \text{эффективное сечение}\\ \text{рассеяния}\end{pmatrix} \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b\,db}{2\pi \sin\Theta\, d\Theta} = \frac{M^2}{(4\tilde{E}\sin^2\Theta/2)^2} \text{ (Резерфорд).} \tag{15}$$

Связь времени с положением находится из соотношения

$$0 = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{E}} = -t + \int^{r} \frac{dr}{\left[2\left(\tilde{E} + \frac{M}{r} - \frac{\tilde{L}^2}{2r^2}\right)\right]^{1/2}}. \tag{16}$$

Для упрощения интегрирования запишем

$$r = \frac{M}{(-2\tilde{E})}(1 - e\cos u). \tag{17}$$

Получим

$$t = \frac{M}{(-2\tilde{E})^{3/2}}(u - e\sin u), \tag{18}$$

$$\begin{pmatrix}\text{средняя круговая}\\ \text{частота}\end{pmatrix} = \frac{2\pi}{(\text{период})} = \omega = \frac{(-2\tilde{E})^{3/2}}{M} = \left(\frac{M}{a^3}\right)^{1/2}. \tag{19}$$

Здесь $u$ — так называемая «средняя аномалия эксцентриситета» (временной параметр Бесселя). Для ряда величин, выраженных через $u$, имеем также

$$\sin u = \frac{(1-e^2)^{1/2}\sin\theta}{1+e\cos\theta};$$

$$\cos u = \frac{\cos\theta + e}{1+e\cos\theta};$$

$$\cos\theta = \frac{\cos u - e}{1-e\cos u};$$

$$\sin\theta = \frac{(1-e^2)^{1/2}\sin u}{1-e\cos u};$$

$$x = r\cos\theta = \frac{M}{(-2\tilde{E})}(\cos u - e); \tag{20}$$

$$y = r\sin\theta = \frac{\tilde{L}}{(-2\tilde{E})^{1/2}}\sin u. \tag{21}$$

Эти формулы удобны для фурье-анализа в гармонических функциях времени с коэффициентами в виде стандартных функций Бесселя:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z\sin u - nu)}\,du; \tag{22}$$

$$x/a = -\frac{3}{2}e + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} k^{-1}J_{k-1}(ke)\cos k\omega t; \tag{23}$$

$$y/a = (1-e^2)^{1/2}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty}{}' k^{-1}J_{k-1}(ke)\sin k\omega t \tag{24}$$

(об этих и других формулах того же типа см., например, [320—322]). Благодаря фурье-анализу мы теперь в состоянии вычислить интенсивность гравитационного излучения, испускаемого на основной круговой частоте $\omega$ и на обертонных частотах (см. гл. 36).

## Б. Геометрическая теория тяготения Эйнштейна

Соотношение между энергией и импульсом пробной частицы с массой покоя $\mu$, движущейся в искривленном пространстве, имеет вид

$$g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + \mu^2 = 0. \tag{25}$$

Тяготение проявляется только в кривизне геометрии, в которой частица движется свободно, т. е. на нее не действует «реальная» сила. Отнесем все величины к единичной массе покоя пробного объекта, считая, что везде $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/\mu$. Запишем также $\tilde{p}_\alpha = \partial\tilde{S}/\partial x^\alpha$. В таком случае уравнение Гамильтона — Якоби, описывающее распространение волновых гребней

в шварцшильдовской геометрии (внешнее поле звезды; § 23.6), принимает вид

$$-\frac{1}{(1-2M/r)}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t}\right)^2+(1-2M/r)\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\phi}\right)^2+1=0. \tag{26}$$

Решим уравнение Гамильтона — Якоби, упрощая вычисление, как и в ньютоновской задаче, путем исключения всякого движения в направлении роста $\phi$. Поэтому, полагая $0=\tilde{p}_\phi=\partial\tilde{S}/\partial\phi$ (динамическая фаза не зависит от $\phi$), получаем

$$\tilde{S}=-\tilde{E}t+\tilde{L}\theta+\int^r[\tilde{E}^2-(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}\frac{dr}{(1-2M/r)}. \tag{27}$$

Форма орбиты находится с помощью «принципа усиливающей интерференции»; таким образом, имеем

$$0=\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{L}}=\theta-\int^r\frac{\tilde{L}\,dr/r^2}{[\tilde{E}^2-(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}} \tag{28}$$

[см. уравнение (25.41) и связанное с ним обсуждение в тексте, а также фиг. 25.6].

Время достижения данного $r$ находится путем рассмотрения «интерференции волновых гребней», принадлежащих волнам со слабо различающимися значениями $\tilde{E}$:

$$0=\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{E}}=-t+\int^r\frac{\tilde{E}}{[\tilde{E}^2-(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}}\frac{dr}{(1-2M/r)}. \tag{29}$$

[См. уравнение (25.32) и связанное с ним обсуждение в тексте, а также фиг. 25.5 и упражнение 25.15.]

## § 25.2. СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

**От симметрии к законам сохранения: 1) лагранжев или гамильтонов подход**

В аналитической механике известно, что симметрии лагранжиана или гамильтониана приводят к законам сохранения. В упражнениях 25.1—25.4 описано, как эти общие принципы используются для вывода из симметрий шварцшильдовского пространства-времени интегралов движения для траекторий (геодезических) свободно падающих частиц во внешнем гравитационном поле звезды. Те же самые интегралы движения получаются на другом языке в дифференциальной геометрии, где стандартным средством описания симметрии является «вектор Киллинга». Прежде чем перейти к шварцшильдовскому пространству-времени, рассмотрим в этом параграфе общие вопросы метрических симметрий.

**2) метод вектора Киллинга**

Пусть компоненты метрики $g_{\mu\nu}$ относительно некоторого координатного базиса $\mathbf{d}\,x^\alpha$ не зависят от одной из координат $x^K$, так что

$$\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\alpha=0 \text{ для } \alpha=K. \tag{25.1}$$

Это соотношение обладает геометрической интерпретацией. Любую кривую $x^\alpha=c^\alpha(\lambda)$ можно сместить путем координатного сдвига

$\Delta x^K = \varepsilon$ в направлении $x^K$ и образовать «конгруэнтную» (эквивалентную) кривую:

$$x^\alpha = c(\lambda) \quad \text{для } \alpha \neq K \text{ и } x^K = c^K(\lambda) + \varepsilon.$$

Пусть параметр $\lambda$ на первоначальной кривой пробегает значения от $\lambda = \lambda_1$ до $\lambda = \lambda_2$ и длина кривой равна

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [g_{\mu\nu}(x(\lambda))\,(dx^\mu/d\lambda)\,(dx^\nu/d\lambda)]^{1/2}\,d\lambda.$$

Тогда смещенная кривая имеет длину

$$L(\varepsilon) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[ \left\{ g_{\mu\nu}(x(\lambda)) + \varepsilon \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^K} \right\} (dx^\mu/d\lambda)\,(dx^\nu/d\lambda) \right]^{1/2} d\lambda.$$

Но коэффициент $\varepsilon$ в подынтегральном выражении равен нулю. Следовательно, длина новой кривой тождественна длине первоначальной кривой: $dL/d\varepsilon = 0$.

**Определение вектора Киллинга $\xi$**

Вектор

$$\xi \equiv d/d\varepsilon = (\partial/\partial x^K) \tag{25.2}$$

описывает эти бесконечно малые «трансляции», сохраняющие длину. Он называется «вектором Киллинга» и удовлетворяет уравнению Киллинга [1])

**Вывод уравнения Киллинга**

$$\xi_{\mu\|\nu} + \xi_{\nu;\,\mu} = 0 \tag{25.3}$$

(необходимое и достаточное условие, налагаемое на векторное поле $\xi$, гарантирующее сохранение всех длин при смещении $\varepsilon\xi$). Уравнение (25.3) выражено в ковариантной форме. Поэтому достаточно установить его в избранной системе координат (25.1), чтобы оно было справедливо в любой системе координат. В избранной системе координат векторное поле, согласно (25.2), имеет компоненты

$$\xi^\mu = \delta^\mu{}_K.$$

Следовательно, ковариантная производная этого векторного поля имеет компоненты

$$\begin{aligned} \xi_{\mu;\nu} = g_{\mu\alpha}\xi^\alpha{}_{;\nu} &= g_{\mu\alpha}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma}\xi^\sigma\right) = \\ &= g_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\nu K} = \Gamma_{\mu\nu K} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu K}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^K} - \frac{\partial g_{\nu K}}{\partial x^\mu}\right) = \\ &= \frac{1}{2}(g_{\mu K,\,\nu} - g_{\nu K,\,\mu}). \end{aligned} \tag{25.4}$$

[1]) *К истории вопроса.* Вильгельм К. Дж. Киллинг родился 10 мая 1847 г. в Барбахе, Вестфалия, умер 11 февраля 1923 г. в Мюнстере, Вестфалия; профессор математики в Мюнстерском университете в период 1892—1920 гг. Ключевая статья, согласно которой рассматриваемый здесь тип изометрий носит название «вектор Киллинга», появилась почти век назад [323].

Откуда видно, что компонента $\xi_{\mu;\nu}$ антисимметрична по индексам $\mu$ и $\nu$, как это утверждается в уравнении Киллинга (25.3).

Геометрическое значение вектора Киллинга разъясняется в дополнении 25.5.

Из уравнения Киллинга $\xi_{(\mu;\nu)} = 0$ и уравнения геодезических $\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p} = 0$ для касательного вектора $\mathbf{p} = d/d\lambda$ к любой геодезической следует важная теорема: *В любой геометрии, обладающей симметрией, описываемой векторным полем Киллинга $\xi$, при движении по любой геодезической скалярное произведение касательного вектора на вектор Киллинга остается постоянным*:

$$p_K = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi} = \text{const}. \tag{25.5}$$

Сохранение $\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}$ при движении по геодезической

Для проверки этого результата вычислим скорость изменения постоянной $p_K$ по ходу типичной геодезической (аффинный параметр $\lambda$; результат поэтому применим как к световым лучам с нулевым промежутком собственного времени, так и к частицам):

$$dp_K/d\lambda = (p^\mu \xi_\mu)_{;\nu} p^\nu = (p^\mu{}_{;\nu} p^\nu)\,\xi_\mu + p^{(\mu} p^{\nu)} \xi_{[\mu;\nu]} = 0. \tag{25.6}$$

Возвратимся от общей системы координат к координатам (25.1), в которых векторное поле Киллинга, описывающее симметрию геометрии, можно записать в виде $\xi = \partial/\partial x^K$. Тогда для скалярного произведения (25.5) имеем $\text{const} \equiv p_\alpha \xi^\alpha = p_\alpha \delta^\alpha{}_K = p_K$. *Симметрия геометрии гарантирует сохранение K-й ковариантной компоненты импульса, вычисленной в координатном базисе.*

На времениподобной геодезической пространства-времени импульс пробной частицы массы $\mu$ имеет вид

$$\mathbf{p} \equiv d/d\lambda = \mu\,\mathbf{u} = \mu\, d/d\tau. \tag{25.7}$$

Таким образом, когда рассматривается частица, аффинный параметр $\lambda$, самым полезным образом использовавшийся в вышеприведенном анализе, правильнее считать равным не собственному времени $\tau$, а отношению $\tau/\mu$.

Если метрика $g_{\mu\nu}$ не зависит от координаты $x^K$, то эта координата, согласно терминологии, заимствованной из нерелятивистской механики, называется циклической, а соответствующая сохраняющаяся величина $p_K$ —«импульсом, сопряженным этой циклической координате».

Терминология: «циклическая координата», «сопряженный импульс»

---

## УПРАЖНЕНИЯ

### 25.1. Интеграл движения, получаемый из принципа Гамильтона

Докажите сформулированную выше теорему о сохранении $p_K \equiv \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}$, воспользовавшись принципом Гамильтона (дополнение 13.3):

$$\delta \int \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}(x)\, (dx^\mu/d\lambda)\, (dx^\nu/d\lambda)\, d\lambda = 0 \tag{25.8}$$

УПРАЖНЕНИЯ

применительно к геодезическим траекториям. Напомним, что в принципе действия компоненты метрики $g_{\mu\nu}$ должны рассматриваться как известные функции положения $x$ вдоль траектории, а сама траектория $x^\mu(\lambda)$ должна варьироваться.

### 25.2. Супергамильтонов формализм для движения по геодезическим

Покажите, что набор дифференциальных уравнений в гамильтоновой форме является результатом независимого варьирования $p_\mu$ и $x^\mu$ в вариационном принципе $\delta I = 0$, где

$$I = \int (p_\mu\, dx^\mu - \mathscr{H}\, d\lambda), \tag{25.9}$$

а

$$\mathscr{H} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(x)\, p_\mu p_\nu. \tag{25.10}$$

Покажите, что «супергамильтониан» $\mathscr{H}$ является интегралом движения, а решения этих уравнений — геодезическим. Что означает выбор $\mathscr{H} = +\frac{1}{2}$, $\mathscr{H} = 0$, $\mathscr{H} = -\frac{1}{2}\mu^2$ или $\mathscr{H} = -\frac{1}{2}$ для геодезических и их параметризации?

### 25.3. Векторы Киллинга в плоском пространстве-времени

Найдите 10 линейно независимых векторов Киллинга в плоском пространстве-времени Минковского. (Ограничьтесь рассмотрением линейных соотношений с постоянными коэффициентами.)

### 25.4. Скобка Пуассона — ключ к интегралам движения

Если $\xi$ — вектор Киллинга, то покажите, что $p_K \equiv \xi^\mu p_\mu$ коммутирует (имеет равную нулю скобку Пуассона) с гамильтонианом $\mathscr{H}$ предыдущей задачи, т. е. $[\mathscr{H}, p_K] = 0$, поэтому $dp_K/d\lambda = 0$. (*Указание*: Воспользуйтесь подходящей системой координат.)

### 25.5. Коммутатор векторов Киллинга есть вектор Киллинга

Рассмотрите два вектора Киллинга $\xi$ и $\eta$, которые не коммутируют [как дифференциальные операторы, т. е. коммутатор уравнений (8.13) не обращается в нуль; конкретно рассмотрите вращения относительно перпендикулярных направлений]:

$$[\xi, \eta] \equiv \zeta \neq 0.$$

а. Покажите, что нельзя одновременно приспособить одну систему координат, например (25.1), к обоим симметриям $\xi$ и $\eta$ (см упражнение 9.9).

**2**

**УПРАЖНЕНИЯ**

б. Пусть $p_\xi = p_\mu \xi^\mu$, $p_\eta = p_\mu \eta^\mu$ и $p_\zeta = p_\mu \zeta^\mu$, выведите для скобки Пуассона $[p_\xi, p_\eta]$ соотношение $[p_\xi, p_\eta] = -p_\zeta$. Покажите, что в геометрии, симметрии которой связаны таким образом, импульс $p_\zeta$ является интегралом движения.

в. В системе координат, в которой $\zeta = (\partial/\partial x^K)$, определите $\mathscr{H}$, как в (25.10), и покажите, что так как $[\mathscr{H}, p_\zeta] = 0$, то $\zeta$ — вектор Киллинга.

*Таким образом, коммутатор двух векторов Киллинга сам есть вектор Киллинга.*

### 25.6. Проблема собственных значений для векторов Киллинга

Покажите, что любой вектор Киллинга удовлетворяет соотношению $\xi^\mu{}_{;\,\mu} = 0$ и является собственным вектором уравнения

$$\xi^{\mu;\,\nu}{}_{;\nu} + R^\mu{}_\nu \xi^\nu = \varkappa \xi^\mu \tag{25.11}$$

с собственным значением $\varkappa = 0$. Найдите вариационный принцип (типа Релея — Ритца) для этого уравнения на собственные значения.

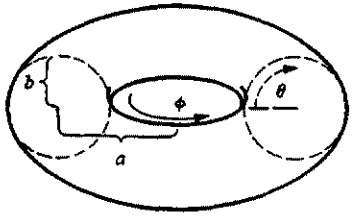
---

**Дополнение 25.5. ВЕКТОРЫ КИЛЛИНГА И ИЗОМЕТРИИ[1])**

А. На данном многообразии (например, в пространстве-времени или на торе, изображенном справа) в данной системе координат компоненты метрики не зависят от определенной координаты $x^K$:

$$ds^2 = b^2\, d\theta^2 + (a - b\cos\theta)^2\, d\phi^2;$$

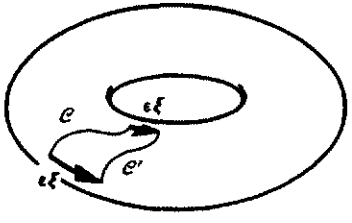
$$g_{\mu\nu} \text{ не зависят от } x^K = \phi.$$




Б. Совершим параллельный перенос произвольной кривой $\mathscr{C}$ на бесконечно малую величину

$$\varepsilon\xi \equiv \varepsilon\,(\partial/\partial x^K) = \varepsilon\,(\partial/\partial\phi), \qquad \varepsilon \ll 1,$$

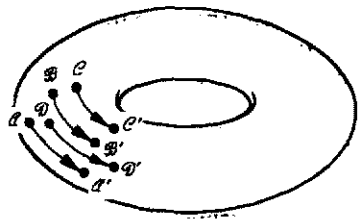
и получим новую кривую $\mathscr{C}'$. Кривая $\mathscr{C}$ определяется координатами $\theta = \theta(\lambda)$, $\phi = \phi(\lambda)$, а кривая $\mathscr{C}'$ — координатами $\theta = \theta(\lambda)$, $\phi = \phi(\lambda) + \varepsilon$. (Параллельный перенос всех точек на $\Delta\phi = \varepsilon$.) Поскольку $\partial g_{\mu\nu}/\partial\phi = 0$, кривые $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$ имеют одинаковую длину (см. текст).




В. Возьмем набор соседних точек $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ и сместим каждую из них на $\varepsilon\xi$, тогда получим

---

[1]) Проиллюстрированы на торе.



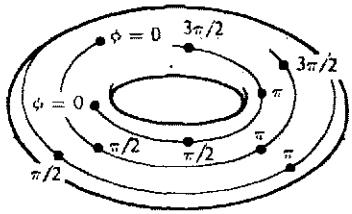

точки $\mathscr{A}'$, $\mathscr{B}'$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{D}'$. Поскольку при этом смещении длина каждой кривой сохраняется, то расстояния между соседними точками также сохраняются

$$\text{(расстояние между } \mathscr{A}' \text{ и } \mathscr{B}') = \text{(расстояние между } \mathscr{A} \text{ и } \mathscr{B}).$$

Но геометрия эквивалентна таблице всех бесконечно малых расстояний (дополнение 13.1), *поэтому геометрия многообразия остается полностью неизменной при смещении всех точек на* $\varepsilon\xi$. (Это координатная форма утверждения $\partial g_{\mu\nu}/\partial\phi = 0$.) Говорят, что $\xi = \partial/\partial\phi$ *есть генератор «изометрии» (или «группы движений») на многообразии.*

Г. В общем случае (см. текст) векторное поле $\xi$ $(\mathscr{P})$ генерирует изометрию тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет уравнению Киллинга $\xi_{(\alpha;\,\beta)} = 0$.

Три различные траектории на торе.




$x^K = \phi$ — параметр траекторий.

Д. Если векторное поле $\xi$ $(\mathscr{P})$ генерирует изометрию (т. е. $\xi$ есть «вектор Киллинга»), тогда кривые

$$\mathscr{P}(x^K, \underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}_{\text{индексы, указывающие, «какая» кривая}})$$

↑ параметр на кривой

к которым вектор $\xi$ касателен $[\xi = (\partial\mathscr{P}/\partial x^K)_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}]$, называются «траекториями изометрии».

Е. Геометрия инвариантна, таким образом, при смещении всех точек многообразия на одинаковую величину $\Delta x^K$ вдоль этих траекторий $[\mathscr{P}(x^K, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to \mathscr{P}(x^K + \Delta x^K, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; построение «конечного движения» из множества «бесконечно малых движений» $\varepsilon\xi]$.

Ж. В физических терминах эта изометрия описывается следующим образом. Разместим по всему многообразию семейство наблюдателей. Каждый наблюдатель сообщает центральному компьютеру 1) о всех аспектах геометрии многообразия вблизи него и 2) расстояниях и направлениях всех соседних наблюдателей (относительно «предпочтительных» направлений, которые определяются анизотропией локальной геометрии). Через положение каждого наблюдателя проходит единственная траектория изометрии. Сдвиг каждого наблюдателя на одинаковое фиксированное $\Delta x^K$ (например, $\Delta x^K = 17$) вдоль этой траектории не изменяет самого многообразия. Каждый наблюдатель тогда сообщает центральному компьютеру ту же самую геометрическую информацию, которая была до сдвига. Поскольку информация, получаемая компьютером после сдвига, тождественна информации до сдвига, то никакими геометрическими измерениями невозможно обнаружить, что происходило движение! В этом значение изометрии.

## § 25.3. СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ В ШВАРЦШИЛЬДОВСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рассмотрим пробную частицу, движущуюся в шварцшильдовской геометрии, которая описывается линейным элементом

$$ds^2 = -(1-2M/r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{(1-2M/r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2). \quad (25.12)$$

Почему мы сосредоточиваем внимание на рассмотрении орбит частиц вокруг черной дыры

Это выражение для геометрии применимо вне любого сферически-симметричного центра притяжения, обладающего полной массой-энергией $M$. Для движения частицы снаружи не имеет значения, какова геометрия внутри звезды, поскольку частица никогда не попадет туда; прежде чем она сможет это сделать, частица столкнется с поверхностью звезды, если центром притяжения является звезда, т. е. жидкая масса, находящаяся в гидростатическом равновесии. В каждой точке такой равновесной конфигурации шварцшильдовская координата $r$ превышает локальное значение величины $2m(r)$; см. § 23.8. Поэтому шварцшильдовская координата поверхности $R$ превышает $2M$. Следовательно, выражение (25.12) применимо вне любой равновесной конфигурации независимо от того, насколько она компактна (неравенство $r > R > 2M$ подразумевает, что нет нужды рассматривать вопрос о «сингулярности» при $r = 2M$). Однако чем более компактна конфигурация, тем большую часть шварцшильдовской геометрии может исследовать пробная частица. Идеальным пределом является не звезда в гидростатическом равновесии, а звезда, подвергшаяся полному гравитационному коллапсу и превратившаяся в черную дыру. В таком случае выражение (25.12) применимо при радиусах $r$, сколь угодно близких к $r = 2M$. Такая идеализация и предполагается здесь («черная дыра»), поскольку в этом случае анализ может охватить максимальную область возможных ситуаций.

Где бы ни лежала пробная частица и как бы быстро она ни двигалась, спроектируем эту точку и эту 3-скорость радиально на сферу некоторого фиксированного радиуса $r$, скажем на единичную сферу $r = 1$. Тогда точка и вектор определяют совместно точку и вектор на поверхности единичной сферы, а они в свою очередь указывают начало и определяют весь большой круг. По мере движения частицы радиальная проекция ее положения будет оставаться на этом большом круге. Отклонение от большого круга в ту или иную сторону означало бы в противоречии с симметрией ситуации, что одна полусфера единичной сферы предпочтительнее другой.

Выбор координат, при котором орбита частицы лежит на «экваторе» $\theta = \pi/2$

Ориентируем полярную систему координат так, чтобы радиальная проекция орбиты совпала с экватором $\theta = \pi/2$ [о сферической тригонометрии более общей ориентации орбиты и последующем сведении ее к полярной орбите (в противоположность рассматриваемой здесь экваториальной орбите) см. дополнение 25.4]. В ориентированной таким образом полярной системе координат частица

имеет сначала и продолжает иметь нулевой импульс в θ-направлении

$$p^\theta = d\theta/d\lambda = 0.$$

**Величины, сохраняющиеся при движении частицы:**

**1) $E$**

**2) $L$**

Выражение (25.12) для линейного элемента показывает, что геометрия не изменяется при трансляциях $t \to t + \Delta t$, $\phi \to \phi + \Delta\phi$. Поэтому координаты $t$ и $\phi$ являются «циклическими» и сопряженные импульсы $p_0 \equiv -E$ и $p_\phi \equiv \pm L$ $(L \geqslant 0)$ сохраняются. Это обстоятельство позволяет немедленно вывести главные особенности движения следующим образом.

Величина 4-вектора энергии-импульса определяется массой покоя частицы

**3) $\mu$**

$$g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta + \mu^2 = g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + \mu^2 = 0, \tag{25.13}$$

или

$$-\frac{E^2}{(1-2M/r)} + \frac{1}{(1-2M/r)}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} + \mu^2 = 0. \tag{25.14}$$

Кроме того, как известно из принципа эквивалентности, пробная частица независимо от ее массы следует одной и той же мировой линии. Поэтому для описания движения частицы важны не сами энергия и момент импульса, а отношения

**4) $\tilde{E} \equiv E/\mu$**

**5) $\tilde{L} \equiv L/\mu$**

$$\tilde{E} = E/\mu = (\text{энергия на единицу массы покоя}),$$
$$\tilde{L} = L/\mu = (\text{момент импульса на единицу массы покоя}). \tag{25.15}$$

Напомним также, что

$$\lambda = \tau/\mu = (\text{собственное время на единицу массы покоя}).$$

Тогда (25.14) принимает вид уравнения для координаты $r$ как функции собственного времени, причем в это уравнение не входит масса покоя:

**Эффективный потенциал $\tilde{V}$ и уравнение орбиты при $\mu \neq 0$**

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - (1-2M/r)\,(1+\tilde{L}^2/r^2) = \tilde{E}^2 - \tilde{V}^2(r). \tag{25.16а}$$

Здесь

$$\tilde{V}(r) = [(1-2M/r)\,(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2} \tag{25.16б}$$

— «эффективный потенциал», упомянутый в § 25.1 и на фиг. 25.2; он будет обсуждаться в § 25.5. Уравнения для двух других относящихся к делу координат как функций собственного времени в случае «прямой» орбиты ($d\phi/d\tau > 0$; $p_\phi = L$, а не $-L$) имеют вид

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{\mu}\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{p^\phi}{\mu} = \frac{g^{\phi\phi}L}{\mu} = \frac{\tilde{L}}{r^2} \tag{25.17}$$

и

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\mu}\frac{dt}{d\lambda} = \frac{p^0}{\mu} = -\frac{g^{00}E}{\mu} = \frac{\tilde{E}}{(1-2M/r)}. \tag{25.18}$$

Определив из уравнения (25.16а) $r$ как функцию $\tau$, найдем из уравнений (25.17) и (25.18) $\phi$ и $t$ как функции $\tau$. Фактически соображения симметрии сводят четыре связанных дифференциальных уравнения второго порядка $p^{\mu}{}_{;\nu}p^{\nu} = 0$ для движения по геодезическим к одному уравнению первого порядка (25.16а).

Для объектов с нулевой массой покоя обращаться к собственному времени не имеет смысла; для них уместно несколько иное рассмотрение (§ 25.6).

Прежде чем рассматривать движения, описываемые уравнениями (25.16) — (25.18) (это сделано в § 25.5), полезно проанализировать физический смысл постоянных $p_0$ и $p_\phi$ и познакомиться с другими физически важными величинами, представляющими интерес при изучении этих орбит. Назовем $E = -p_0$ «энергией на бесконечности», а $L = |p_\phi|$ для экваториальных орбит — «полным моментом импульса». Чтобы оправдать эти названия, сравним их со стандартными величинами, измеряемыми наблюдателем, покоящимся на экваторе шварцшильдовской системы координат, при пролете мимо него пробной частицы, движущейся на орбите. Пусть

Интерпретация $E$ как «энергии на бесконечности» и $L$ как «момента импульса»

$$E_{\text{локальн}} \equiv p^{\hat{0}} \equiv \langle \boldsymbol{\omega}^{\hat{0}}, \mathbf{p} \rangle \equiv \langle |g_{00}|^{1/2}\, \mathbf{d}t, \mathbf{p} \rangle =$$
$$= |g_{00}|^{1/2}\, p^0 = |g_{00}|^{1/2}\, dt/d\lambda = (1 - 2M/r)^{1/2}\, dt/d\lambda \qquad (25.19)$$

— энергия, которую измеряет наблюдатель в собственной системе отсчета, и пусть

$$v_{\hat{\phi}} \equiv \frac{p^{\hat{\phi}}}{p^{\hat{0}}} \equiv \frac{\langle \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}, \mathbf{p} \rangle}{E_{\text{локальн}}} = \frac{\langle |g_{\phi\phi}|^{1/2}\, \mathbf{d}\phi, d/d\lambda \rangle}{E_{\text{локальн}}} =$$
$$= \frac{r\,(d\phi/d\lambda)}{E_{\text{локальн}}} = \frac{p_\phi}{rE_{\text{локальн}}} \qquad (25.20)$$

— измеряемая им тангенциальная компонента обычной скорости.

[*Замечание*: $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\alpha}}$ — базисные 1-формы собственной системы отсчета наблюдателя, см. формулы (23.15а) и (23.15б).] Энергия на бесконечности, выраженная через эти локально измеренные величины, имеет вид

$$E = -p_0 = -g_{00}p^0 = |g_{00}|^{1/2} E_{\text{локальн}} =$$
$$= (1 - 2M/r)^{1/2} E_{\text{локальн}} = \text{const}. \qquad (25.21)$$

Она, следовательно, представляет собой локально измеренную энергию $E_{\text{локальн}}$, умноженную на $|g_{00}|^{1/2}$. Для любой частицы, которая свободно улетает (движение по геодезической) от этого наблюдателя на $r = \infty$, поправочный множитель сводится к единице и энергия $E_{\text{локальн}}$ (измеренная вторым наблюдателем, находящимся в этот момент на бесконечности) становится тождественно равной $E$. Аналогично, момент импульса, входящий в (25.20), равен

$$p_\phi = E_{\text{локальн}} v_{\hat{\phi}} r = \text{const}. \qquad (25.22)$$

Он, подобно $E = -p_0$, представляет собой величину, которая сохраняется и интерпретация которой при $r \to \infty$ для любой орбиты хорошо известна. Наконец, напомним, что полный 4-импульс двух сталкивающихся частиц $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ или $(p_\mu)_1 + (p_\mu)_2$ сохраняется в точечном столкновении (при любом $r$). Поэтому полные $(E)_1 + (E)_2 = (-p_0)_1 + (-p_0)_2$ и $(p_\phi)_1 + (p_\phi)_2$ также сохраняются. Одна из сталкивающихся частиц может находиться на орбите, которая никогда не уходит на $r = \infty$, однако это не имеет значения. Рассмотренный принцип сохранения позволяет и заставляет применять термины, справедливые для орбит, достигающих бесконечности, к орбите, не достигающей бесконечности, а именно: $E$ — «энергия на бесконечности», $L$ — «момент импульса».

---

УПРАЖНЕНИЯ

### 25.7. Радиальная скорость пробной частицы

Получите формулу для радиальной компоненты скорости $v_{\hat{r}}$, которую измерил бы наблюдатель, находящийся в точке $r$ [см. (25.20) для $v_{\hat{\phi}}$]. Выразите $E_{\text{локальн}}$, $v_{\hat{r}}$ и $v_{\hat{\phi}}$ через $r$ и постоянные $E$, $p_\phi$.

### 25.8. Вращательные векторы Киллинга для шварцшильдовской геометрии

а. Покажите, что в изотропных координатах (упражнение 23.1) метрика для шварцшильдовской геометрии принимает вид

$$ds^2 = -(1 - M/2\bar{r})^2 (1 + M/2\bar{r})^{-2}\, dt^2 + (1 + M/2\bar{r})^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2\, d\Omega). \tag{25.23}$$

б. Найдите координатное преобразование, приводящее эту метрику к виду

$$ds^2 = -(1 - M/2\bar{r})^2 (1 + M/2\bar{r})^{-2}\, dt^2 + (1 + M/2\bar{r})^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{25.24}$$

где $\bar{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

в. Покажите, что вектор $\xi_x = y(\partial/\partial z) - z\,(\partial/\partial y)$ и векторы $\xi_y$ и $\xi_z$ являются векторами Киллинга, для этого проверьте (см. упражнение 25.5, п. «в»), равны ли нулю скобки Пуассона $[\mathscr{H}, L_K]$ для каждого $L_K = \mathbf{p} \cdot \xi_K$, где $K = x, y, z$.

г. Покажите, что $\xi_z = (\partial/\partial\phi)_{t,\, r,\, \theta}$ и что для орбит в экваториальной плоскости $L_z = p_\phi$, $L_x = L_y = 0$.

### 25.9. Сохранение полного момента импульса пробной частицы

Докажите путем вычисления скобок Пуассона, что квадрат полного момента импульса $L^2 = p_\theta^2 + (\sin\theta)^{-2} p_\phi^2$ есть интеграл движения для любой шварцшильдовской геодезической.

**25.10. Выбор уравнения посредством выбора варьируемой величины**

Выпишите интеграл $I$, который варьируется в (25.8), для специального случая шварцшильдовской метрики (25.12). Какое уравнение вытекает из требования $\delta I = 0$, если варьируется только $\phi$ ($\lambda$) или если варьируется только $t$ ($\lambda$)?

**25.11. Вывод интегралов движения из супергамильтониана**

Выпишите супергамильтониан (25.10) для специального случая шварцшильдовской метрики. Получите из этой формы, что $p_0$ и $p_\phi$ — интегралы движения. Выведите из этого супергамильтонова формализма уравнения (25.14), (25.17) и (25.18).

---

## § 25.4. ГРАВИТАЦИОННОЕ КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ

Закон «красного смещения энергии» («гравитационное красное смещение»)

Закон сохранения $|g_{00}|^{1/2} E_{\text{локальн}} = \text{const}$ (выражение 25.21), справедливый в этой форме для любой не зависящей от времени метрики с $g_{0j} = 0$ и для частиц как с нулевой, так и с ненулевой массой покоя, иногда называется «законом красного смещения энергии». Он описывает, как изменяется локально измеренная энергия любой частицы или фотона (смещена в «красную» или в «голубую» сторону), если частица (или фотон) выходит из статического гравитационного поля или входит в него. Для частицы с нулевой массой покоя (фотон или нейтрино) локально измеренная энергия $E_{\text{локальн}}$ и длина волны $\lambda_{\text{локальн}}$ (не путать с аффинным параметром!) связаны соотношением

$$E_{\text{локальн}} = h/\lambda_{\text{локальн}},$$

где $h$ — постоянная Планка. Следовательно, закон красного смещения энергии можно переписать в виде

$$\lambda_{\text{локальн}} |g_{00}|^{-1/2} = \text{const}. \tag{25.25}$$

Фотон, испущенный атомом, покоящимся в гравитационном поле на радиусе $r$, и принятый астрономом, покоящимся на бесконечности, смещен в красную сторону на величину

$$z \equiv \Delta\lambda/\lambda = (\lambda_{\text{прин}} - \lambda_{\text{изл}})/\lambda_{\text{изл}} = |g_{00}(r)|^{-1/2} - 1,$$

$$z = (1 - 2M/r)^{-1/2} - 1, \tag{25.26}$$

$$z \approx M/r \text{ в ньютоновском пределе.} \tag{25.26Н}$$

Заметим, что эти выражения справедливы независимо от *того*, движется ли фотон вдоль радиальной геодезической или нет.

УПРАЖНЕНИЕ

**25.12. Вывод выражения для красного смещения с помощью разделенных во времени импульсов**

Выведите выражение (25.26) для красного смещения фотона, рассматривая два импульса света, последовательно испущенные атомом, покоящимся на радиусе $r$. [*Указание*: Если $\Delta\tau_{\text{изл}}$ — собственное время между импульсами, измеренное испускающим атомом, а $\Delta\tau_{\text{прин}}$ — собственное время между импульсами, измеренное наблюдателем на $r = \infty$, тогда можно идеализированно рассматривать $\lambda_{\text{изл}}$ как $\Delta\tau_{\text{изл}}$ и $\lambda_{\text{прин}}$ как $\Delta\tau_{\text{прин}}$.]

## § 25.5. ОРБИТЫ ЧАСТИЦ

Обратимся теперь от красного смещения энергии к рассмотрению орбиты частицы и шварцшильдовской геометрии. Положение как функцию собственного времени можно получить, решив уравнение

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \tilde{V}^2(r) = \tilde{E}^2, \tag{25.16a}$$

где $\tilde{V}$ —«эффективный потенциал», определяемый выражением

$$\tilde{V}^2(r) = (1-2M/r)\,(1 + \tilde{L}^2/r^2) \tag{25.16б}$$

и проиллюстрированный на фиг. 25.2 и в дополнении 25.6. На первой фигуре в дополнении 25.6 дана зависимость $\tilde{V}^2(r)$ от координаты $r$; она имеет смысл даже в «области внутри черной дыры» ($r < 2M$), где $\tilde{V}^2$ — отрицательная величина (см. гл. 31). Потенциал $\tilde{V}(r)$ служит моделью и тесно связан с «эффективным потенциалом» $B^{-2}(r)$, используемым в § 25.6 для анализа фотонных орбит. На третьей фигуре в дополнении 25.6 приведена зависимость самого потенциала $\tilde{V}(r)$ от $r$. Энергетические уровни на этой фигуре или на фиг. 25.2 можно интерпретировать так же, как на любой обычной схеме энергетических уровней. Разность энергий между двумя уровнями представляет собой измеренную на бесконечности энергию фотона, испущенного при переходе с одного уровня на другой. Откладывать $\tilde{V}(r)$ или $\tilde{V}^2(r)$ как функцию $r$ — в значительной степени дело удобства. Важный момент заключается в следующем: значение $r$, при котором $\tilde{V}(r)$ становится равным имеющейся энергии $\tilde{E}$, или $\tilde{V}^2(r)$ становится равным $\tilde{E}^2$, является *точкой поворота*. Частица, которая двигалась к большим значениям $r$, достигнув точки поворота, разворачивается и начинает двигаться к меньшим значениям $r$. Или, если частица, двигаясь к меньшим значениям $r$, подходит к точке поворота, она обращает свое движение и начинает двигаться к бóльшим значениям $r$. Точка поворота

**Качественные свойства орбит, полученные из кривой для эффективного потенциала**

не является равновесной точкой. Брошенный вверх камень в верхней точке полета не находится в равновесии. Однако, когда для $\tilde{E} = \tilde{V}(r)$ или $\tilde{E}^2 = \tilde{V}^2(r)$ вместо единственного корня получается двойной корень, тогда мы имеем дело с точкой равновесия (возможной только потому, что «центробежная сила» уравновешивает тяготение). Если это равновесие достигается на минимуме $\tilde{V}(r)$, оно устойчиво, если на максимуме, то такое равновесие неустойчиво. Таким образом, все основные характерные свойства движения в направлении $r$ можно получить, построив эффективный потенциал как функцию $r$ (кривая зависит от величины $\tilde{L}$) и зная величину $\tilde{E}$ (фиг. 25.2, дальнейшие подробности см. в дополнении 25.6).

Если перейти от качественных характеристик к количественным результатам, то уместно выписать точно собственное время $\Delta\tau$, необходимое частице для увеличения шварцшильдовской координаты на величину $\Delta r$; таким образом (при условии, что квадратный корень может быть отрицательным или положительным, $\sqrt{a^2} \equiv \pm a$) имеем

$$\tau = \int d\tau = \int \frac{dr}{[\tilde{E}^2 - (1-2M/r)\,(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}}. \tag{25.27}$$

Радиальные орбиты:

Интегрирование особенно просто для случая прямолинейно падающей или прямолинейно вылетающей частицы; тогда момент импульса обращается в нуль и интеграл можно записать в элементарной форме, которая применима (с заменой $\tau \to t$) даже в ньютоновской механике:

$$\tau = \int d\tau = \int \frac{dr}{[2M/r - 2M/R]^{1/2}}. \tag{25.27'}$$

Здесь $R \equiv 2M/(1-\tilde{E}^2)$ — радиус, на котором частица имеет нулевую скорость («апоастр»). Движение следует тому же «циклоидному закону», который так полезен в нерелятивистской механике (фиг. 25.3). Поэтому в параметрической форме имеем

$$r = \frac{R}{2}(1+\cos\eta),$$
$$\tau = \frac{R}{2}\left(\frac{R}{2M}\right)^{1/2}(\eta+\sin\eta). \tag{25.28}$$

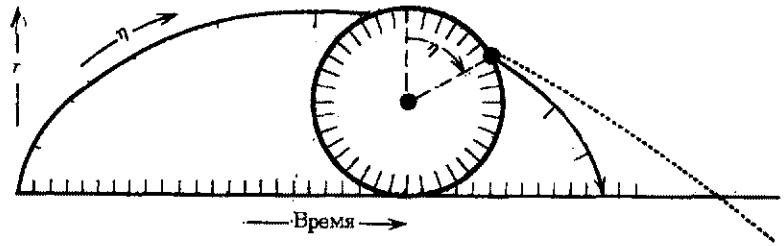
1) «циклоидальная» форма $r(\tau)$ для радиальных связанных орбит

Полное собственное время падения от состояния покоя на $r = R$ в точку $r = 0$ дается выражением

$$\tau = \frac{\pi}{2} R \left(\frac{R}{2M}\right)^{1/2} \tag{25.29}$$

(оно в $\sqrt{2}$ раз меньше времени падения под действием притяжения такой же массы, но распределенной по сфере радиусом $R$, см. пунктирную кривую на фиг. 25.3).

Что можно сказать о шварцшильдовском координатном времени для данного движения? Возьмем уравнение (25.16а) для общего




ФИГ. 25.3.

Зависимость между собственным временем и шварцшильдовской координатой $r$ для пробной частицы, падающей прямо по направлению к центру гравитационного притяжения, имеющему пренебрежимо малые размеры, имеет вид циклоиды. Угол поворота колеса, катящегося по базисной линии и образующего циклоиду, обозначим через $\eta$. В зависимости от параметра $\eta$ имеем

$$r = \frac{R}{2}(1+\cos\eta) \qquad \text{(шварцшильдовская координата } r\text{)},$$

$$\tau = \frac{R}{2}\left(\frac{R}{2M}\right)^{1/2}(\eta+\sin\eta) \qquad \text{(собственное время)}$$

(отметим, что масштабные множители в выражениях для $r$ и $\tau$ разные). Полный промежуток собственного времени падения от $r = R$ до $r = 0$ равен $\tau = (\pi/2)\,(R^3/2M)^{1/2}$. То же циклоидное соотношение и такое же выражение для времени падения справедливо в ньютоновской нерелятивистской теории тяготения, но там собственное время $\tau$ должно быть заменено на обычное время $t$. Если рассматривается ньютоновская теория для случая той же притягивающей массы $M$, однородно распределенной по сфере радиусом $R$, через которую проходит трубка, представляющая собой канал для движущейся пробной частицы, то эта частица будет совершать простые гармонические колебания (пунктирная кривая). Угловая частота этих колебаний $\omega$ должна быть тождественна угловой частоте обращения пробной частицы по окружности, непосредственно касающейся поверхности планеты, и должна определяться кеплеровским законом $M = \omega^2 R^3$. В этом случае время падения в центр будет равно $(\pi/2)\,(R^3/M)^{1/2}$, т. е. в $2^1/_2$ раза больше, чем время падения, когда центр притяжения представляет сосредоточенную массу (в последнем случае имеет место более сильное ускорение и более высокая скорость на последних фазах падения). Выражение для шварцшильдовской координаты времени $t$, требуемого для достижения любой точки $r$ при падении под действием центра притяжения с сосредоточенной массой, имеет сложный вид и не приведено здесь [см. формулу (25.37) и фиг. 25.5].

То же циклоидное соотношение, которое связывает $r$ со временем свободного падения частицы, связывает также радиус «фридмановской пылевидной Вселенной» с временем (см. дополнение 27.1), за исключением того, что циклоидная диаграмма применима там непосредственно без какого-либо различия масштабов двух ключевых переменных:

$$\begin{pmatrix}\text{радиус}\\ \text{3-сферы}\end{pmatrix} = \frac{a}{2}(1-\cos\eta) \approx \frac{a}{4}\eta^2 \quad \text{(для малых } \eta\text{)},$$

$$\begin{pmatrix}\text{координатное время, тождественное}\\ \text{собственному времени, измеренному}\\ \text{на пылевидной частице}\end{pmatrix} = \frac{a}{2}(\eta-\sin\eta) \approx \frac{a}{12}\eta^3$$

(для малых $\eta$).

Начало отсчета $\eta$ отнесено к моменту начала взрыва; дополнительно о корреляции между падением частицы и расширением Вселенной см. в [308].

2

движения (радиального или нерадиального) и там, где появляется производная $dr/d\tau$, заменим ее согласно соотношению

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\tilde{\tau}} = \frac{dr}{dt}\frac{\tilde{E}}{(1-2M/r)} = \tilde{E}\frac{dr^*}{dt}. \qquad (25.30)$$

Здесь $r^*$ — сокращенное обозначение новой «черепашьей координаты»:

$$r^* = \int dr^* = \int \frac{dr}{1-2M/r} = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right), \qquad (25.31)$$

которая была введена Уилером [175] и популяризовалась Редже и Уилером [324]. Таким образом, получаем уравнение

$$\left(\tilde{E}\frac{dr^*}{dt}\right)^2 + \tilde{V}^2 = \tilde{E}^2, \qquad (25.32)$$

2) «черепашья» радиальная координата как функция координатного времени, $r^*(t)$

где эффективный потенциал есть тот же эффективный потенциал, с которым мы имели дело прежде:

$$\tilde{V} = [(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}. \qquad (25.33)$$

Кроме того, энергия $\tilde{E}$ в правой стороне (25.32)— это та же самая энергия $\tilde{E}$, которая появилась ранее в уравнении для $(dr/d\tau)^2$. Следовательно, как и прежде, имеем те же точки поворота и то же качественное описание движения. «Точка поворота есть точка поворота есть точка поворота». Правильно? То, что касается точек поворота правильно, но вывод относительно характера движения ошибочен. История такова, что Ахиллес никогда не сможет догнать черепаху. Как только он достигает места, где она была, черепаха продвигается вперед к новому положению, а когда он там появляется, она уходит еще дальше вперед и т. д. *до бесконечности.* Представьте себе, что путь между Ахиллесом и черепахой направлен влево и ожидаемая точка пересечения лежит на $r = 2M$. Координата $r$ не испытывает препятствий при проходе через значение $r = 2M$. Не так ведет себя «черепашья координата» $r^*$. Она может произвольно далеко пробегать в направлении минус бесконечность (в соответствии с бесконечным числом раз, когда Ахиллес достигает места, где была черепаха) и когда $r$ все еще остается вне $r = 2M$:

3) детали подхода к шварцшильдовскому радиусу ($r = 2M$)

| $r/2M$ | 1,000001 | 1,0001 | 1,01 | 1,278465 | 2 | 5 | 10 | 10000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r^*/2M$ | −12,8155 | −8,2102 | −3,5952 | 0 | 2 | 6,386 | 12,303 | 10009,210 |

Из этого следует, что имеется большое различие между описанием движения в терминах собственного времени $\tau$ часов, расположенных на падающей частице [$r$ проходит весь путь от $r = R$ до

$r = 0$ за конечное собственное время (25.29)], и описанием движения в терминах шварцшильдовского координатного времени $t$, соответствующего бесконечно удаленному наблюдателю ($r^*$ пробегает весь путь от $r^* = R^*$ до $r^* = -\infty$ за бесконечное время $t$; но даже за бесконечное время, за которое $r^*$ уходит на $-\infty$, $r$ лишь асимптотически приближается к $r \sim 2M$). Таким образом, при втором описании движения упускается без всякой альтернативы целая область значений $r$ от $r = 2M$ до нуля: идеально хорошая физика, та физика, которую собирается видеть и исследовать падающая частица и которую никогда не увидит и не сможет увидеть удаленный наблюдатель. Если бы черепашья координата не существовала, ее следовало бы выдумать. При рассмотрении этой координаты интересна область вблизи $r = 2M$, т. е. каждый множитель 10, позволяющий к ней приблизиться. Черепашья координата соразмерна с количеством шварцшильдовского координатного времени, имеющегося у удаленного наблюдателя для более и более детального изучения этих более и более микроскопических количеств движения.

На фиг. 25.4 эффективный потенциал $\tilde{V}$, определяемый формулой (25.33) и уже показанный на фиг. 25.2, представлен как функция черепашьей координаты. Приближение $\tilde{V}$ к нулю при $r = 2M$ носит экспоненциальный характер при стремлении $r^*$ к $-\infty$. Поэтому при движении «к черной дыре» ($r = 2M$, $r^* = -\infty$), описываемом в координатном времени $t$, частица вскоре перестает испытывать сколь-нибудь эффективное влияние любого потенциала и по существу движется свободно к уменьшающимся значениям $r^*$ в соответствии с уравнением

$$\left(\tilde{E}\frac{dr^*}{dt}\right)^2 \approx \tilde{E}^2, \tag{25.34}$$

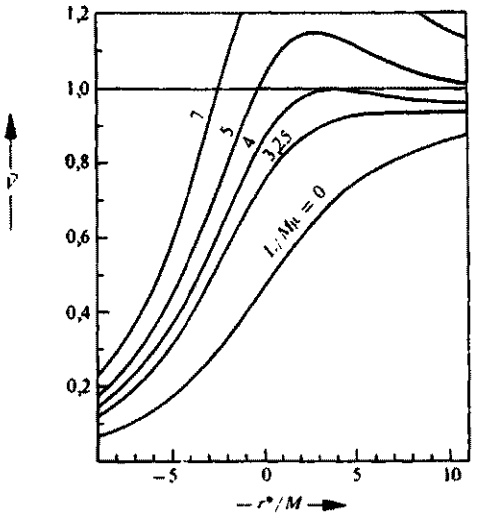
т.е. «со скоростью света» ($dr^*/dt \approx -1$). Эта зависимость $r^*$ от $t$ одновременно подразумевает асимптотическую зависимость самой координаты $r$ от шварцшильдовского координатного времени $t$, т. е.

$$r = 2M + (\text{const} \times e^{-t/2M}). \tag{25.35}$$

Результат (25.35) не зависит от момента импульса частицы, а также от ее энергии, если только энергия $\tilde{E}$ (на единицу массы) вполне достаточна для преодоления барьера (фиг. 25.4) эффективного потенциала $\tilde{V}$ (на единицу массы). (Дополнительно о подходе к $r = 2M$ будет говориться в гл. 32, посвященной гравитационному коллапсу.)

Для замены асимптотической формулы (25.35) полной формулой требуется проинтегрировать (25.32):

$$t = \int dt = \int \frac{\tilde{E}\,dr^*}{[\tilde{E}^2 - \tilde{V}^2]^{1/2}} = \int \frac{\tilde{E}}{[\tilde{E}^2 - (1-2M/r)\,(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}} \frac{dr}{(1-2M/r)}. \tag{25.36}$$




ФИГ. 25.4.
**Зависимость эффективного потенциала при движении в шварцшильдовской геометрии от черепашьей координаты для выбранных значений момента импульса пробной частицы. Момент импульса $L$ выражен в единицах $M\mu$, где $M$ — масса черной дыры, а $\mu$ — масса пробной частицы. Эффективный потенциал (включающий массу покоя) выражен в единицах $\mu$; таким образом, $\tilde{V} = V/\mu$. Черепашья координата $r^* = r + 2M \ln(r/2M - 1)$ дана в единицах $M$.**

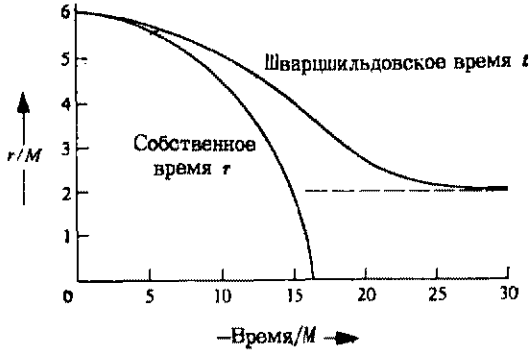
Даже для случая радиального движения ($\tilde{L} = 0$) интегрировать здесь нелегко, как это видно из полученного сложного выражения [325] [1]):

$$t = \left[\left(\frac{R}{2} + 2M\right)\left(\frac{R}{2M} - 1\right)^{1/2}\right]\eta + \frac{R}{2}\left(\frac{R}{2M} - 1\right)^{1/2}\sin\eta + \\ + 2M \ln\left|\frac{(R/2M-1)^{1/2} + \operatorname{tg}(\eta/2)}{(R/2M-1)^{1/2} - \operatorname{tg}(\eta/2)}\right|. \qquad (25.37)$$

Здесь $\eta$ — тот же самый циклоидный параметр, который появляется в формуле (25.28) и дан на фиг. 25.3 (на фиг. 25.5 представлена зависимость $r$ от $t$, иллюстрирующая асимптотическое приближение к $r = 2M$). Почему трудно проинтегрировать время $t$ и легко проинтегрировать время $\tau$, определяемое формулой (25.28), объясняется просто. При $\tilde{L} = 0$ в (25.27′) есть только две особые точки: начальная точка $r = R$, в которой скорость обращается в нуль, и точка $r = 0$, где скорость $dr/d\tau$ становится бесконечной. В противоположность этому формула (25.36), переписанная в виде

$$t = \int dt = \int \frac{[1 - 2M/R]^{1/2}}{[2M/r - 2M/R]^{1/2}} \frac{dr}{(1 - 2M/r)}, \qquad (25.36')$$

[1]) Выкладки приведены в книге [308].




ФИГ. 25.5.
Падение в шварцшильдовскую черную дыру, описанное сопутствующим наблюдателем (собственное время $\tau$) и удаленным наблюдателем (шварцшильдовское координатное время $t$). При одном описании точка $r = 0$ достигается, причем быстро [см. формулу (25.28)]. При другом описании точка $r = 0$ никогда не достигается и даже точка $r = 2M$ достигается только асимптотически [формулы (25.35) и (25.37)]. О качественных особенностях движения в обоих случаях легче всего судить, рассматривая зависимость «эффективного потенциала на единицу массы» $\tilde{V}$ от $r$ (фиг. 25.2), если интерес представляет собственное время, или зависимость того же эффективного потенциала $\tilde{V}$ от «черепашьей координаты» $r^*$ [фиг. 25.4 и уравнение (25.31)], если интерес предоставляет шварцшильдовское координатное время $t$.

содержит три особые точки: $r = R$, $r = 0$ и дополнительную точку $r = 2M$ с совершенно новой физикой. Учет момента импульса увеличивает количество особых точек, и интегрирование можно выполнить лишь численно или качественно (с помощью потенциальной кривой на фиг. 25.4) или выразить результат через эллиптические функции [326].

4) свободное падение от $r = \infty$

Часто удобно абстрагироваться от точного значения $r = R$ в начале коллапса. В этом случае рассматривают предел $R \to \infty$. Удобно сместить нуль собственного времени к моменту окончательной катастрофы. В этом пределе имеем

$$\tau/2M = -(2/3)\,(r/2M)^{3/2},$$

$$t/2M = -(2/3)\,(r/2M)^{3/2} - 2\,(r/2M)^{1/2} + \ln\frac{(r/2M)^{1/2}+1}{(r/2M)^{1/2}-1}. \quad (25.38)$$

При очень большом отрицательном времени частица находится далеко и приближается очень медленно. Тогда можно записать

$$r = (9M\tau^2/2)^{1/3} \approx (9Mt^2/2)^{1/3}; \quad (25.39a)$$

при этом не играет роли, обращаемся ли мы к координатному или собственному времени. Однако конечные стадии падения вновь сильно отличаются в зависимости от того, выражены ли они через собственное время ($\tau \to 0$, $r \to 0$) или через шварцшиль-

довское координатное время

$$r/2M = 1 + 4e^{-3/3}e^{-t/2M}. \qquad (25.39б)$$

Переходя от чисто радиального движения к движению с моментом импульса, рассмотрим ситуацию, когда основные характеристики движения (компоненты смещения, скорость и ускорение) обычно представляют в виде рядов Фурье (в шварцшильдовском координатном времени), которые так удобны в ньютоновском пределе при рассмотрении излучения и возмущений одной орбиты другой и возмущений самой движущейся частицы приливным действием центра притяжения. Любой точный расчет этих коэффициентов выглядит трудным. На сегодня значение фурье-амплитуд кажется лучше всего выводится путем последовательных приближений, стартующих от ньютоновского анализа (см. дополнение 25.4 и цитированные там работы).

Неравдиальные орбиты:

1) фурье-анализ

В связи с любым таким фурье-анализом уместно напомнить, что когда движение происходит по точно круговой орбите (предел чисто радиального движения с $\tilde{L} = 0$), то появляется одна фундаментальная частота, а все высшие гармоники имеют нулевую амплитуду. Поэтому интересно отметить (упражнение 25.19), что круговая частота этого движения $\omega$, измеренная удаленным наблюдателем, связана со шварцшильдовской координатой $r$ орбиты кеплеровской формулой нерелятивистской физики

$$\omega^2 r^3 = M \quad \text{(точно; в общей теории относительности)}. \qquad (25.40)$$

2) детали движения с моментом импульса

Обратимся теперь от соотношения между $r$ и временем к соотношению между $r$ и углом обращения [здесь он обозначен через $\phi$, а в методе Гамильтона — Якоби (см. дополнение 25.4) — через $\theta$, однако в последующем изложении такое расхождение в обозначениях не имеет значения]. Вернемся к уравнению (25.16)

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \tilde{V}^2(r) = \tilde{E}^2$$

и вспомним также уравнение (25.17)

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2}.$$

Решая второе уравнение относительно $d\tau$ и подставляя в первое, находим

$$\left(\frac{\tilde{L}\,dr}{r^2\,d\phi}\right)^2 + \tilde{V}^2(r) = \tilde{E}^2, \qquad (25.41)$$

или, эквивалентно, полагая $u = M/r$ и $L^\dagger = \tilde{L}/M = L/M\mu$, имеем

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2 - (1-2u)(1+L^{\dagger 2}u^2)}{L^{\dagger 2}}. \qquad (25.42)$$

В упражнении 25.16 представлено видоизмененное дифференциальное уравнение (25.42); оно используется для получения следу-

ющего выражения для угла, заметаемого между двумя последовательными точками ближайшего подхода к звезде линией, соединяющей с центром частицу (или планету), движущуюся по почти круговой орбите:

3) почти круговые орбиты: сдвиг перигастра

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{(1-6M/r_0)^{1/2}}. \tag{25.43}$$

Радиально движущаяся частица изменяет направление своего движения на противоположное, если величина $\tilde{E}^2 - \tilde{V}^2(r)$ или $\tilde{E} - \tilde{V}(r)$ как функция $r$ меняет знак; из формулы (25.43) между $r$ и $\phi$ это так же ясно видно, как из ранее рассмотренного соотношения между $r$ и временем. Напомним вновь кривые зависимости $\tilde{V}(r)$ от $r$ для выбранных значений $\tilde{L}$ (см. фиг. 25.2). По этим кривым можно определить (без расчета вообще) главные характерные свойства типичных орбит (дополнение 25.6), полученных путем численного расчета. Перечислим эти характерные свойства:

4) качественные свойства движения для ряда значений момента импульса

1) круговая орбита, если $\tilde{E}$ совпадает с минимумом эффективного потенциала $\tilde{V}(r)$,

2) прецессия, если $\tilde{E}$ немного больше $\tilde{V}_{\text{мин}}$,

3) временное «обращение» (много раз вокруг центра притяжения), если $\tilde{E}$ близко к $\tilde{V}_{\text{макс}}$,

4) «захват в черную дыру», если $\tilde{E}$ превышает $\tilde{V}_{\text{макс}}$.

Более подробный анализ проведен в дополнении 25.6. (Точный аналитический расчет орбит в шварцшильдовской геометрии см. в работах [326—329].)

Рассеяние падающих частиц:

Для орбит с положительной энергией не известно лучшей характеристики силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, чем формула рассеяния Резерфорда. Она дает «эффективную величину площади мишени», представляющей собой центр притяжения, для частиц, рассеянных под углом $\Theta$ внутрь телесного угла $d\Omega$ и зарегистрированных удаленным приемником:

1) резерфордовское (нерелятивистское) эффективное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{M^2}{[4(\tilde{E}-1)\sin^2\Theta/2]^2} \quad \begin{matrix}[\text{резерфордовское (нерелятивистское)} \\ \text{эффективное сечение рассеяния}]\end{matrix} \tag{25.44}$$

[вывод см. в дополнении 25.4, уравнения (8)—(15)]. Переходя от ньютоновского анализа к общерелятивистскому рассмотрению, находим два новых удивительных свойства рассеяния, связанных с движением по орбите.

2) новые свойства, обусловленные релятивистской гравитацией

1. В приемник поступают не только те частицы, которые были отклонены от первоначального направления движения на угол $\Theta$ (единственный вклад в резерфордовское рассеяние), но также и те, которые были отклонены на углы $\Theta + 2\pi$, $\Theta + 4\pi$ и т. д. (бесконечный ряд вкладов).

2. Несмотря на то что эти дополнительные вклады конечны по величине и даже конечны по величине «на единичный интервал $\Theta$»,

они становятся бесконечными, если их отнести к единице телесного угла $d\Omega = 2\pi \sin\Theta d\Theta$ в прямом ($\Theta = 0$) или в обратном ($\Theta = \pi$) направлениях.

Это обстоятельство не вызывает эффективных изменений для рассеяния вперед: эффективное сечение рассеяния бесконечно уже в нерелятивистском приближении (бесконечность в резерфордовском значении $d\sigma/d\Omega$ при стремлении $\Theta$ к нулю возникает от вклада частиц, пролетающих с большими прицельными параметрами и испытывающих малые отклонения, см. упражнение 25.21). В противоположность этому эффективное сечение рассеяния назад, конечное в резерфордовском анализе, становится также бесконечным

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Theta\sim\pi} \sim \frac{\text{const}}{\sin\Theta}. \tag{25.45}$$

Эта концентрация рассеянного назад излучения известна как «ореол». Эффект легче всего видеть, наблюдая очень яркое свечение вокруг тени самолета на расположенных значительно ниже облаках (рассеяние светового луча на 180° в водяной капле). Он также ясно виден, если наблюдать рассеяние атомов на атомах на $\Theta \approx 180°$. Белый карлик или даже нейтронная звезда недостаточно компактны, чтобы заставить быстро движущуюся частицу совершить поворот на 180°. Такой эффект может вызвать только черная дыра.

С другими интересными особенностями движения в шварцшильдовской геометрии можно познакомиться в приведенных ниже упражнениях.

---

## УПРАЖНЕНИЯ

### 25.13. Качественные формы орбит частиц

Проверьте утверждения об орбитах частиц, сделанные в части В дополнения 25.6.

### 25.14. Прицельный параметр

Для рассеянной орбиты (т. е. несвязанной орбиты) покажите, что $\tilde{L} = \tilde{E} v_\infty b$, где $b$ — прицельный параметр, а $v_\infty$ — асимптотическое значение обычной скорости; покажите также, что

$$b = \tilde{L}/(\tilde{E}^2 - 1)^{1/2}. \tag{25.46}$$

Нарисуйте картину, иллюстрирующую физическую сущность прицельного параметра.

### 25.15. Время падения к $r = 2M$

Покажите, исходя из уравнения (25.16) и первой фигуры дополнения 25.6, что орбиты (с любым значением $\tilde{L}$!) приближаются к $r = 2M$ за конечное собственное время, но бесконечное координатное

УПРАЖНЕНИЯ

время $t$ [уравнение (25.32)]. Для равновесных звезд, которые должны иметь радиус $R > 2M$, координатное время $t$ падения к поверхности $r = 2M$, разумеется, конечно.

### 25.16. Сдвиг периастра для почти круговых орбит

Перепишите уравнение (25.42) в виде

$$(du/d\phi)^2 + (1-6u_0)(u-u_0)^2 - 2(u-u_0)^3 = (\tilde{E}^2 - \tilde{E}_0^2)/\tilde{L}^2. \quad (25.47)$$

Выразите постоянную $u_0 \equiv M/r_0$ через $\tilde{L}/M$, а величину $\tilde{E}_0$ через $u_0$. Покажите, что для почти круговой орбиты радиусом $r_0$ угол, заметаемый между двумя последовательными периастрами (точками ближайшего подхода к звезде) линией, соединяющей частицу с центром, равен

$$\Delta\phi = 2\pi(1-6M/r_0)^{-1/2}. \quad (25.48)$$

Изобразите схематически форму орбиты для $r_0 = 8M$.

### 25.17. Угловое движение во время падения

Выведите, исходя из уравнения (25.42), что полный угол $\Delta\phi$, описываемый траекторией частицы, падающей в $r = 0$, конечен. Расчет простой, однако если принять во внимание поведение $t$ ($\lambda$) на той же траектории [уравнение (25.32) и упражнение 25.15], то интерпретация не так проста. Интерпретация будет рассмотрена в гл. 31.

### 25.18. Максимум и минимум эффективного потенциала

Получите приведенные в подписи к фиг. 25.2 выражения для положений максимума и минимума эффективного потенциала как функции момента импульса. Определите также предельную форму зависимости высоты барьера от момента импульса в пределе, когда момент $\tilde{L}$ очень велик по сравнению с $M$.

### 25.19. Справедливость закона Кеплера для круговых орбит

Из уравнения (25.17) для $d\phi/d\tau$ и уравнения (25.18) для $dt/d\tau$ выведите выражения для круговой частоты обращения, фиксируемой удаленным наблюдателем, и, используя результаты упражнения 25.18 (или как-то иначе), покажите, что круговая частота обращения точно удовлетворяет кеплеровскому сообщению

$$\omega^2 r^3 = M$$

для любой устойчивой (минимум потенциала) или неустойчивой (максимум потенциала) круговой орбиты со шварцшильдовской координатой $r$.

2

УПРАЖНЕНИЯ

### 25.20. Функция Гамильтона — Якоби

На плоскости $r$, $\theta$ постройте геометрическое место точек постоянной динамической фазы $\tilde{S}(t, r, \theta) = 0$ для $t = 0$ и для значений $\tilde{L} = 4M$, $\tilde{E} = 1$ (или для $\tilde{L} = 2\sqrt{3}M$, $\tilde{E} = (8/9)^{1/2}$, или для некоторых других столь же простых наборов значений этих двух параметров). Покажите, что полный набор поверхностей постоянной фазы $\tilde{S}$ можно получить, поворачивая вышеупомянутое геометрическое место точек на один угол, затем на другой и т. д., перекопируя или повторяя. Дайте физическую интерпретацию основных особенностей получающейся картины кривых.

### 25.21. Сопоставление отклонений, вызываемых гравитационной и электрической силами

Пробная частица пролетает мимо массы $M$ с произвольной скоростью $\beta$ и с таким большим прицельным параметром $b$, что отклонение мало. Покажите, что отклонение равно

$$\theta = \frac{2M}{b\beta^2}[(1+\beta^2). \tag{25.49}$$

Следуя ньютоновской механике, получите величину отклонения для частицы, движущейся со скоростью света. Покажите, что в пределе при $\beta \to 1$ отклонение (25.49) равно удвоенному ньютоновскому отклонению. Для сравнения выведите также (в плоском пространстве-времени) формулу для отклонения ядром с зарядом $Ze$ быстрой частицы с массой покоя $\mu$ и зарядом $e$:

$$\theta = \frac{2Ze^2}{\mu b\beta^2}(1-\beta^2)^{1/2}. \tag{25.50}$$

Как можно исключить «векторную» теорию тяготения (см., например, [330]), построенную по аналогии с теорией электромагнетизма, наблюдая искривление света Солнцем? [*Указание*: Для упрощения математического анализа вернитесь к уравнению (25.42). Оно представляет собой уравнение второго порядка относительно производной по $\phi$. Перенесите в левую часть все члены, которые были бы там в отсутствие тяготения, а в правой части оставьте все те члены, которые получаются после дифференцирования по $\phi$ из слагаемого $-2u$ (тяготение), входящего в коэффициент $(1-2u)$. Пренебрегая правой стороной, решите уравнение точно (движение по прямой линии). Вычислите возмущающий член справа как функцию $\phi$, подставляя в него невозмущенное выражение для $u(\phi)$. Вновь решите получающееся уравнение и найдите отклонение.]

УПРАЖНЕНИЯ

### 25.22. Захват черной дырой

Кроме рассеяния частиц черной дырой, происходит прямой захват в черную дыру. Покажите, что эффективное сечение захвата равно $\pi b_{\text{крит}}^2$, где критический прицельный параметр $b_{\text{крит}}$ дается выражением $L_{\text{крит}}/(E^2-\mu^2)^{1/2}$. Исходя из формулы, приведенной в подписи к фиг. 25.2 (или как-нибудь иначе), покажите, что для частиц высокой энергии эффективное сечение захвата изменяется с энергией следующим образом:

$$\sigma_{\text{захв}} = 27\pi M^2\left(1+\frac{2}{3\tilde{E}^2}+\dots\right) \tag{25.51}$$

(фотонный предел для $\tilde{E}\to\infty$), а для частиц низкой энергии как

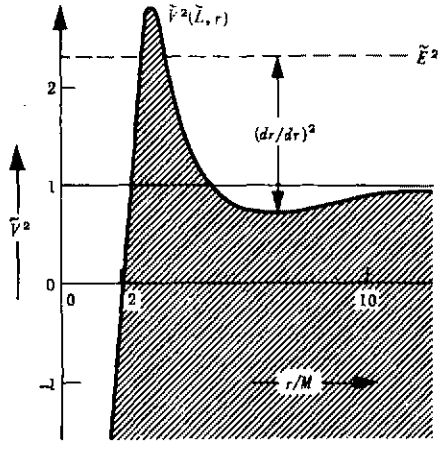
$$\sigma_{\text{захв}} = 16\pi M^2/\beta^2, \tag{25.52}$$

где $\beta$ — отношение скорости частицы к скорости света [331].

---

## Дополнение 25.6. КАЧЕСТВЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОРБИТЫ ЧАСТИЦЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ШВАРЦШИЛЬДОВСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

### А. Уравнения, определяющие орбиту [1]




«Точки поворота» орбиты представляют собой пересечения горизонтальной линии высотой $\tilde{E}^2$ с кривой $\tilde{V}^2$.

1. Уравнение для радиальной части движения:

$$(dr/d\tau)^2 + \tilde{V}^2(\tilde{L}, r) = \tilde{E}^2$$

с эффективным потенциалом

$$\tilde{V}^2(\tilde{L}, r) = (1-2M/r)\,(1+\tilde{L}^2/r^2),$$

$\tilde{E}$ — энергия на бесконечности на единицу массы покоя,

$\tilde{L}$ — момент импульса на единицу массы покоя.

2. Дополнительные уравнения для угловой и временной частей движения в случае «прямой» орбиты $\partial\phi/\partial\tau > 0$:

$$d\phi/d\tau = \tilde{L}/r^2,$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\tilde{E}}{1-2M/r}.$$

---

[1] Вывод см. в тексте.

**Б. Ньютоновский предел** $|\tilde{E}-1| \ll 1$, $M/r \ll 1$, $\tilde{L}/r \ll 1$

1. Говорим не об «энергии на бесконечности на единицу массы покоя» $\tilde{E}=E/\mu = (1-v_\infty^2)^{-1/2}$, а о «нерелятивистской энергии на единицу массы покоя»:

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{2}(\tilde{E}^2-1) \approx \tilde{E}-1 \approx \frac{1}{2}v_\infty^2.$$

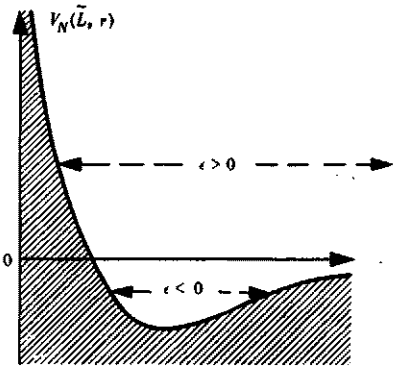
2. Говорим не о $\tilde{V}^2(\tilde{L}, r)$, а о ньютоновском эффективном потенциале

$$V_N(\tilde{L}, r) \equiv \frac{1}{2}(\tilde{V}^2-1) \approx -\frac{M}{r}+\frac{\tilde{L}^2}{2r^2}.$$

3. Переписываем уравнение с эффективным потенциалом в виде

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_N(\tilde{L}, r) = \varepsilon.$$

4. Из зависимости эффективного потенциала от $r$ и вспомогательного уравнения $\partial\phi/\partial\tau = \tilde{L}/r^2$ делаем выводы:
   а. Частицы с $\varepsilon \geqslant 0$ $(\tilde{E} \geqslant 1)$ приходят от $r=\infty$ по гиперболическим или параболическим орбитам, отражаются эффективным потенциалом в точке $\varepsilon = V_N$ $[\tilde{E}^2=\tilde{V}^2$; «точка поворота»; $(dr/d\tau)^2=0]$ и возвращаются к $r=\infty$.
   б. Частицы с $\varepsilon < 0$ $(\tilde{E}<1)$ движутся взад и вперед в эффективной потенциальной яме между периастром (внутренняя точка поворота эллиптической орбиты) и апоастром (внешняя точка поворота).




**В. Релятивистские орбиты**

Для получения качественных особенностей орбит используем зависимость эффективного потенциала от $r$, представленную на фигуре в п. А, а здесь (воспроизведенную для различных $\tilde{L}$) так же, как мы использовали зависимость эффективного потенциала от $r$ в ньютоновском пределе (п.Б). Сформулируем основные выводы.

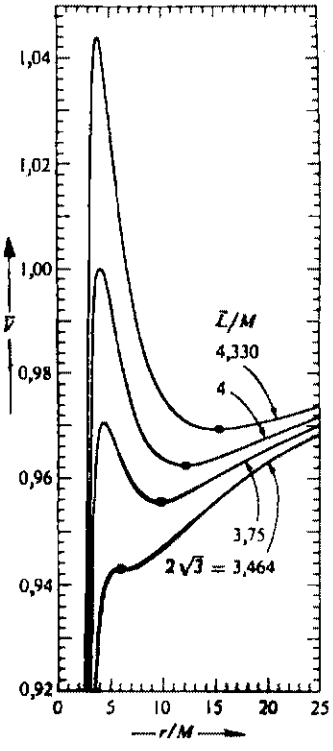
1. Орбиты с периастрами при $r \gg M$ являются кеплеровскими по форме, за исключением сдвига периастра (упражнение 25.16; § 40.5), известного для Меркурия.
2. Орбиты с периастрами при $r \leqslant 10M$ заметно отличаются от кеплеровских.
3. Если $\tilde{L}/M \leqslant 2\sqrt{3}$, то периастр отсутствует и любая падающая частица с необходимостью затягивается в $r=2M$.
4. Если $2\sqrt{3} < \tilde{L}/M < 4$, то имеются связанные орбиты, по которым частица движется внутрь и наружу между периастром и апоастром, однако любая

частица, приходящая из $r = \infty$ (несвязанная; $\tilde{E}^2 \geqslant 1$), с необходимостью затягивается в $r = 2M$.

5. Если $L^\dagger = \tilde{L}/M > 4$, то имеются связанные орбиты; частицы, приходящие от $r = \infty$ с

$$\tilde{E}^2 < \tilde{V}^2_{\text{макс}} = (1 - 2u_m)(1 + L^{\dagger 2}u_m^2), \qquad u_m \equiv \frac{1+\sqrt{1-12/L^{\dagger 2}}}{6},$$

достигают периастров и возвращаются затем к $r = \infty$; однако частицы, пришедшие от $r = \infty$ с $\tilde{E}^2 > \tilde{V}^2_{\text{макс}}$, затягиваются в $r = 2M$.




6. В минимуме эффективного потенциала имеются устойчивые круговые орбиты; минимум движется внутрь от $r = \infty$ для $\tilde{L} = \infty$ к $r = 6M$ для $L^\dagger = \tilde{L}/M = 2\sqrt{3}$. Наиболее сильно связанная устойчивая круговая орбита ($\tilde{L}/M = 2\sqrt{3}$, $r = 6M$) имеет относительную энергию связи

$$\frac{\mu - E}{\mu} = 1 - \tilde{E} = 1 - \sqrt{8/9} = 0{,}0572.$$

7. В максимуме эффективного потенциала имеются неустойчивые круговые орбиты; максимум движется наружу от $r = 3M$ для $\tilde{L} = \infty$ до $r = 6M$ для $\tilde{L}/M = 2\sqrt{3}$. Если частицу, движущуюся по такой круговой орбите, подтолкнуть внутрь, то она будет падать по спирали к $r = 2M$. Если частицу подтолкнуть наружу и она имеет $\tilde{E}^2 > 1$, то она уйдет к $r = \infty$, а если частица имеет $\tilde{E}^2 < 1$, то она или достигнет апоастра и затем перейдет на спиральную орбиту, упав, в конечном счете, на звезду (например, при $\delta\tilde{E} > 0$), с неизменным моментом импульса, или будет двигаться наружу и внутрь между апоастром и периастром по устойчивой связанной орбите (например, при $\delta\tilde{E} < 0$ снова с неизменным моментом импульса).

## § 25.6. ОРБИТА ФОТОНА, НЕЙТРИНО ИЛИ ГРАВИТОНА В ШВАРЦШИЛЬДОВСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

**Орбиты частиц с нулевой массой покоя:**

Понятия «энергия на единицу массы покоя» и «момент импульса на единицу массы покоя» теряют смысл для объекта с нулевой массой покоя (фотона, нейтрино, даже гравитона, исследуемого в упражнении 35.16). Однако можно рассмотреть движение частицы с конечной массой покоя $\mu$ и перейти к пределу $\mu \to 0$. В этом пределе величины

$$\tilde{E} = E/\mu$$

и

$$\tilde{L} = L/\mu$$

по отдельности стремятся к бесконечности, однако отношение

$$\begin{pmatrix}\text{прицельный}\\ \text{параметр}\end{pmatrix} = b = \frac{\begin{pmatrix}\text{момент}\\ \text{импульса}\end{pmatrix}}{(\text{импульс})} = \frac{L}{(E^2-\mu^2)^{1/2}} = \frac{\tilde{L}}{(\tilde{E}^2-1)^{1/2}} \quad (25.53)$$

1) определение прицельного параметра

стремится к конечной величине

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{\tilde{L}}{\tilde{E}} = b. \quad (25.54)$$

В этом пределе уравнение (25.41), определяющее форму орбиты, немедленно принимает простой вид

2) форма орбиты

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{1-2M/r}{r^2} = \frac{1}{b^2}, \quad (25.55)$$

или

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + B^{-2}(r) = b^{-2}, \quad (25.56)$$

или

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2(1-2u) = \left(\frac{M}{b}\right)^2 \equiv \frac{1}{\tilde{b}^2}. \quad (25.57)$$

Каким бы образом не записывалось дифференциальное уравнение, определяющее форму орбиты, один член в нем зависит от выбора орбиты (член $1/b^2$), другой — от свойств шварцшильдовской геометрии, но не от выбора орбиты. Этот второй член определяет вид эффективного потенциала

$$\begin{pmatrix}\text{«эффективный потенциал}\\ \text{для фотона»}\end{pmatrix} \equiv B^{-2}(r) \equiv \frac{1-2M/r}{r^2}. \quad (25.58)$$

3) эффективный потенциал

Здесь мы не пытаемся извлечь корень квадратный, как это было сделано в случае частицы с конечной массой покоя. Там корень извлекался для того, чтобы получить величину, которая в нерелятивистском пределе сводится к ньютоновскому эффективному потенциалу (плюс масса покоя), но для света ($v = 1$) нет нерелятивистского предела. Поэтому в дополнении 25.7 представлена непосредственно зависимость от $r$ эффективного потенциала (25.58), который используется там для анализа некоторых принципиальных особенностей орбит фотона в шварцшильдовской геометрии.

Иногда оказывается полезным построить зависимоть от $r$ не «эффективного потенциала» (25.58), а «потенциального прицельного параметра $B(r)$», вычисленного из формулы (25.58) (см., например, [196, 332]). Этот потенциальный прицельный параметр имеет следующую интерпретацию. Чтобы луч достиг точки $r$, он должен иметь прицельный параметр $b$, равный или меньший

$B(r)$:

$$b \leqslant B(r) \quad \text{(«условие достижимости»).} \tag{25.59}$$

4) критический прицельный параметр

Луч с нулевым прицельным параметром (лобовое столкновение) или с любым прицельным параметром, меньшим $b_{\text{крит}} = \min[B(r)] = 3\sqrt{3}M$, может достичь любого значения $r$.

Замечательно простой «эффективный потенциал» (25.58) используется в уравнении (25.56) для определения формы орбиты, т. е. того азимута $\phi$, который имеет фотон, достигнувший данного значения $r$. В другой связи в равной степени интересно знать, когда, или при каком значении шварцшильдовского координатного времени, фотон достигнет данного значения $r$. Более широко, геодезическая фотона, для которой собственное время не имеет смысла, позволяет (в противоположность методу первоначального рассмотрения частицы с конечной массой покоя и последующего перехода к пределу $\mu \to 0$) провести анализ из первых принципов с помощью аффинного параметра $\lambda$.

5) аффинный параметр

Вернемся к формулировке законов сохранения (25.17) и (25.18), в которой используется аффинный параметр $\lambda$, а не масса покоя $\mu$; так,

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2} \tag{25.60}$$

и

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{1-2M/r}. \tag{25.61}$$

Напомним, что поведение фотона в гравитационном поле определяется его направлением, а не его энергией. Поэтому не рассматривают $E$ и $L$ отдельно, а рассматривают лишь их отношение, т. е. прицельный параметр $b = L/E$ [см. (25.54) и упражнение 25.14]. Это обстоятельство позволяет заменить аффинный параметр $\lambda$ новым аффинным параметром

$$\lambda_{\text{нов}} = L\lambda, \tag{25.62}$$

который также постоянен вдоль мировой линии фотона. Используя такое обозначение (индекс «нов» далее опускаем), перепишем законы сохранения в виде

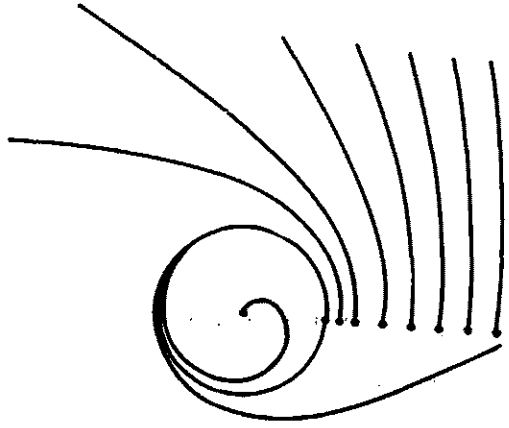
6) уравнения орбиты

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{1}{r^2}, \tag{25.63}$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{b(1-2M/r)}. \tag{25.64}$$

Утверждение, что мировая линия фотона есть линия нулевого промежутка собственного времени

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \tag{25.65}$$



ФИГ. 25.6.
Орбиты фотона в «экваториальной плоскости» черной дыры, изображенные в шварцшильдовских координатах $r$ и $\phi$, для избранных значений точки поворота орбиты $r_{т.п}/M = 2{,}99$; 3,00 (неустойчивая круговая орбита); 3,01; 3,5; 4,5; 6; 7; 8; 9. Прицельный параметр дается формулой $b = r_{т.п}\,(1 - 2M/r_{т.п})$. Ни в одном из показанных случаев, даже для обрывающейся внутрь спирали, прицельный параметр не становится меньше $b_{крит} = (27)^{1/2}\,M$ и никакая из этих орбит не может пересечь окружность $r = 3M$. Это происходит только для орбит с параметром $b$, меньшим $b_{крит}$. Для таких орбит точка поворота отсутствует, фотон приходит из бесконечности и попадает в $r = 0$, причем для $b = 0$ (лобовое столкновение) непосредственно, а для $b/M = (27)^{1/2} - \varepsilon$, где $\varepsilon$ — очень малая величина,— лишь после многих витков вблизи $r = 3M$. Мы признательны проф. Дике, позволившему опубликовать эти кривые; он рассчитал их на вычислительной машине и непосредственно изобразил согласно формуле $d^2u/d\phi^2 = 3u^2 - u$, где $u = M/r$.

ведет к «радиальному уравнению»

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + B^{-2}(r) = b^{-2}. \tag{25.66}$$

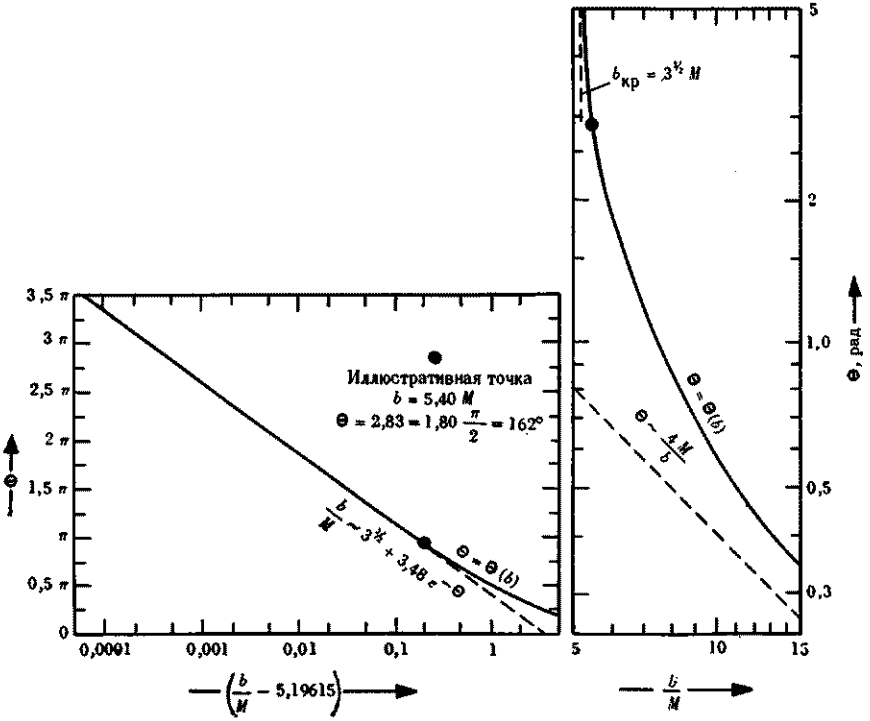
Здесь мы вновь сталкиваемся с «эффективным потенциалом» $B^{-2}(r)$, определяемым формулой (25.58). Весь этот полный набор уравнений для геодезической фотона имеет то преимущество, что позволяет перейти от пространственного описания к описанию мировой линии в пространстве-времени.

Вернемся к пространству! На фиг. 25.6 показаны типичные орбиты фотона в шварцшильдовской геометрии. На фиг. 25.7 показана кривая зависимости угла отклонения от прицельного параметра. Из информации, содержащейся в этой кривой, можно оценить вклады в дифференциальное эффективное сечение рассеяния

7) эффективное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{\text{«ветви»}} \left| \frac{2\pi b\,db}{2\pi \sin\Theta\,d\Theta} \right| \tag{25.67}$$

от различных «ветвей» кривой расстояния (один оборот вокруг центра притяжения, два оборота и т. д.; дополнительно об этих




ФИГ. 25.7.

**Отклонение фотона шварцшильдовской черной дырой или любым другим сферически симметричным центром притяжения, достаточно малым, чтобы не преграждать траекторию фотона. Точные расчеты (сплошные кривые) можно сравнить с формулами (пунктирные кривые), справедливыми асимптотически в двух предельных случаях, когда прицельный параметр $b$ 1) очень близок к $b_{\text{крит}} = 3^{3/2}M$ (много оборотов вокруг центра притяжения) и 2) велик по сравнению с $b_{\text{крит}}$ (малое отклонение). Дадим алгоритм точного расчета отклонения (причем все расстояния приводятся для простоты в единицах массы $M$):**

**1. Выбираем значение $r = R$ для шварцшильдовской координаты точки ближайшего подхода.**

**2. Вычисляем прицельный параметр $b$ из формулы $b^2 = R^3/(R - 2)$.**

**3. Вычисляем $Q$ из формулы $Q^2 = (R - 2)(R + 6)$.**

**4. Определяем модуль «эллиптического интеграла первого рода» $k$ из формулы $\sin^2\theta = k^2 = (Q - R + 6)/2Q$.**

**5. Определяем так называемую амплитуду $\phi = \phi_{\text{мин}}$ той же эллиптической функции из соотношения**

$$\operatorname{sn}^2 u_{\text{мин}} = \sin^2 \phi_{\text{мин}} = (2 + Q - R)/(6 + Q - R).$$

**6. Тогда полное отклонение будет равно**

$$\Theta = 4\,(R/Q)^{1/2}\,[F\,(\pi/2,\ \theta) - F\,(\phi_{\text{мин}},\ \theta)] - \pi.$$

**Отложенные здесь величины были любезно вычислены Джеймсом Айзенбергом на основе работы Дарвина [327, 328].**

ветвях и центральной роли функции отклонения $\Theta = \Theta(b)$ в анализе рассеяния см., напрмер, [333, 334]). Для малых углов преобладает «резерфордовская» часть рассеяния. Основная часть рассеяния на малые углы (а в пределе $\Theta \to 0$ и все рассеяние) происходит от фотонов с большими прицельными параметрами, для которых имеем

$$\Theta = \frac{4M}{b} \tag{25.68}$$

(см. упражнения 25.21 и 25.24). Отсюда для эффективного сечения рассеяния получаем предельное выражение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{4M}{\Theta^2}\right)^2 \quad \text{(малые } \Theta\text{)}. \tag{25.69}$$

Кроме того, при $\Theta = \pi$ дифференциальное эффективное сечение рассеяния обладает сингулярностью, имеющей характер ореола [см. обсуждение после формулы (25.44)]. Выписывая вклады в дифференциальное эффективное сечение от нескольких ветвей функции рассеяния и суммируя их, вблизи $\Theta = \pi$ имеем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{M^2}{\pi - \Theta}(1{,}75 + 0{,}0029 + 0{,}0000055 + \ldots) = 1{,}75\,\frac{M^2}{\pi - \Theta}. \tag{25.70}$$

Таким образом, если посветить мощным источником света в черную дыру, то несколько фотонов вернется прямо назад. Формула (25.70) позволяет вычислить интенсивность возвращенного света (см. упражнение 25.26).

8) эффект гравитационной линзы

Если источник освещения находится не на стороне наблюдателя, а на противоположной стороне черной дыры, тогда вдобавок к «эффекту линзы», испытываемому фотонами, пролетающими с большими прицельными параметрами (литература по этому вопросу слишком обширна, чтобы ее процитировать здесь, однако см., например, [156]), для которых справедлива формула (25.68), имеется освещенность типа ореола (интенсивность $\sim 1/\sin\Theta$, однако теперь отклонение $\Theta$ близко к нулю), получающаяся от фотонов, испытавших отклонения на $\Theta = 2\pi, 4\pi, \ldots$. Эта освещенность идет от «колец яркости», локализованных на прицельных параметрах, определяемых формулой $b/M - 3^{3/2} = 0{,}0065;\ 0{,}000012, \ldots$. Интересно, что, хотя все эти оптические эффекты в принципе важны, среди всех способов наблюдения черной дыры они являются наихудшими; подробное обсуждение см. в части VI, и. В дополнения 33.3.

---

### 25.23. Качественные особенности фотонных орбит

УПРАЖНЕНИЯ

Проверьте все утверждения об орбитах частиц с нулевой массой покоя, сделанные в дополнении 25.7.

УПРАЖНЕНИЯ

### 25.24. Отклонение света

Используя вместо $r$ безразмерную переменную $u = M/r$, а вместо прицельного параметра величину $u_b = M/b$, преобразуйте уравнение (25.55) в уравнение первого порядка

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + (1-2u)\,u^2 = u_b^2, \tag{25.71}$$

а отсюда посредством дифференцирования в уравнение

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3u^2. \tag{25.72}$$

а. Покажите, что в приближении большого прицельного параметра или малого $u$, при котором можно пренебречь членом справа, решение уравнения (25.72) описывает элементарное прямолинейное движение (нулевое отклонение).

б. Подставьте это решение нулевого порядка в возмущающий член $3u^2$ в правой стороне (25.72) и вновь найдите $u$ («прямолинейное движение плюс поправка первого порядка»). Проверьте таким способом формулу для искривления света Солнцем, получающуюся из (25.49) при $\beta = 1$.

### 25.25. Захват света черной дырой

Покажите, что эффективное сечение захвата света шварцшильдовской черной дырой равно $\sigma_{\text{захв}} = 27\pi M^2$.

### 25.26. Возвращение света от черной дыры

Покажите, что освещение черной дыры мощным импульсом света приводит в принципе к возвращению света от колец яркости, локализованных на $b/M - 3^{3/2} = 0{,}151;\ 0{,}00028, \ldots$.
Как можно оценить разницу во временных задержках этих четко различающихся вспышек, приходящих от черной дыры? Покажите, что интенсивность $I$ отдачи (эрг/см$^2$) как функция энергии $E_0$ (эрг/стерад) первоначального импульса, массы $M$ (см) черной дыры, расстояния $R$ до нее и горизонтального расстояния $r$ от «вспышки света» до приемника излучения отдачи равна

$$I = \frac{E_0}{R^3 r} \sum_{\Theta=(2N+1)\pi} \left|\frac{2b\,db}{d\Theta}\right| = \frac{E_0 M^2}{R^3 r}(1{,}75 + 0{,}0029 + 0{,}0000055 + \ldots)$$

в условиях, когда дифракцией можно пренебречь.

## Дополнение 25.7. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ОРБИТ ФОТОНА В ШВАРЦШИЛЬДОВСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

### А. Уравнения, определяющие орбиту

1. Уравнение для радиальной части движения:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + B^{-2}(r) = b^{-2}$$

с эффективным потенциалом

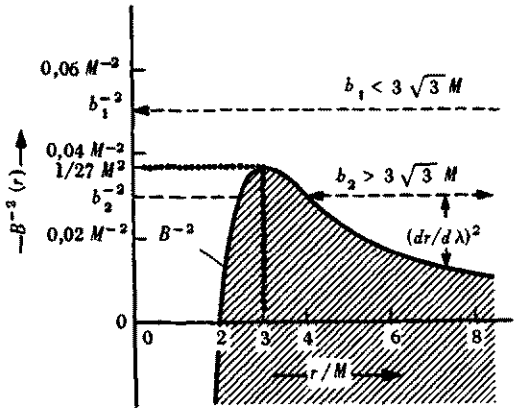
$$B^{-2}(r) = r^{-2}(1 - 2M/r),$$

$b$ — прицельный параметр.

2. Дополнительные уравнения для угловой и временной частей движения:

$$d\phi/d\lambda = 1/r^2,$$

$$dt/d\lambda = b^{-1}(1 - 2M/r)^{-1}.$$




### Б. Качественные особенности орбит [1])

1. Частица с нулевой массой покоя с $b > 3\sqrt{3}M$ падает от $r = \infty$, «отражается от потенциального барьера» (периастр $b = B$; $dr/d\lambda = 0$) и возвращается к $r = \infty$.
   а. Для $b \gg 3\sqrt{3}M$ орбита представляет собой почти прямую линию со слабым отклонением на угол $4M/b$ (упражнение 25.21; § 40.3).
   б. Для $0 < b - 3\sqrt{3}M \ll M$, прежде чем улететь назад к $r = \infty$, частица совершает много оборотов вокруг звезды на $r \approx 3M$ («неустойчивая круговая орбита»).
2. Частица с нулевой массой покоя с $b < 3\sqrt{3}M$, прилетающая из бесконечности, падает к $r = 2M$ (периастр отсутствует).
3. Частица с нулевой массой покоя, испущенная вблизи $r = 2M$, уходит на бесконечность, если только она имеет прицельный параметр $b < 3\sqrt{3}M$; в противном случае она достигает апоастра и затем затягивается назад к $r = 2M$.

### В. Уход на бесконечность (в противоположность захвату) как функция направления распространения

Наблюдатель, покоящийся в шварцшильдовском гравитационном поле, измеряет обычную скорость частицы с нулевой массой покоя относительно своей ортонормальной системы отсчета [равенства (23.15)]

$$v_{\hat{r}} = \frac{|g_{rr}|^{1/2}\, dr/d\lambda}{|g_{00}|^{1/2}\, dt/d\lambda} = \pm(1 - b^2/B^2)^{1/2};$$

$$v_{\hat{\phi}} = \frac{|g_{\phi\phi}|^{1/2}\, d\phi/d\lambda}{|g_{00}|^{1/2}\, dt/d\lambda} = b/B;$$

$$(v_{\hat{r}})^2 + (v_{\hat{\phi}})^2 = 1;$$

[1]) Получены из зависимости эффективного потенциала от $r$.

$\delta \equiv \begin{pmatrix}\text{угол между направлением распространения}\\ \text{и радиальным направлением}\end{pmatrix} = \arccos v_{\hat{r}} = \arcsin v_{\hat{\phi}}$.

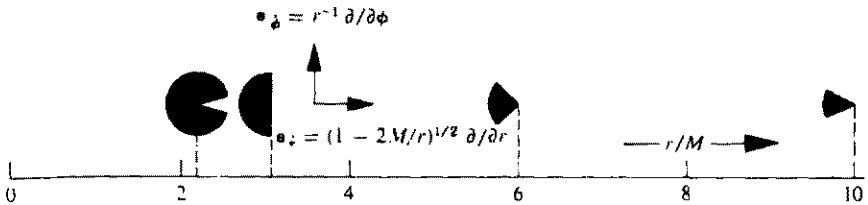
Чтобы преодолеть потенциальный барьер, частица должна иметь прицельный параметр $b < 3\sqrt{3}M$ или $v_{\hat{\phi}}^2 B^2 < 27M^2$, или $\sin^2\delta < 27M^2/B^2$. Переформулируем этот результат:

1. *Частица с нулевой массой покоя, находящаяся на $r < 3M$, уйдет в конечном счете на бесконечность, а не захватится черной дырой на $r = 2M$ тогда и только тогда, когда $v_r$ — положительная величина и*

$$\sin\delta < 3\sqrt{3}MB^{-1}(r).$$

2. *Частица с нулевой массой покоя, находящаяся на $r > 3M$, уйдет в конечном счете на бесконечность тогда и только тогда, когда* 1) *$v_r$ — положительная величина или* 2) *$v_r$ — отрицательная величина, а*

$$\sin\delta > 3\sqrt{3}MB^{-1}(r).$$




Светлая часть круга — освобождение; черная часть — черная дыра; направления в собственной системе отсчета.

## § 25.7. СФЕРИЧЕСКИЕ ЗВЕЗДНЫЕ СКОПЛЕНИЯ

Объединяя развитую в этой главе теорию орбит с развитой в § 22.6 кинетической теорией в искривленном пространстве-времени, можно сформулировать теорию релятивистских звездных скоплений.

**Статические сферические звездные скопления:**

Рассмотрим для простоты сферически симметричное скопление звезд (например, шаровое скопление, но настолько плотное, чтобы были существенны релятивистские гравитационные эффекты). Потребуем, чтобы скопление было статическим, т. е. плотность числа звезд в фазовом пространстве $\mathcal{N}$ не зависела от времени. (Новые звезды, движущиеся по геодезическим орбитам, входят в заданную область фазового пространства с той же скоростью, с которой из нее выходят «старые» звезды.) Столкновениями и близкими сближениями звезд пренебрегаем, т. е. рассматриваем каждую звездную орбиту как геодезическую в сферически симметричном пространстве-времени скопления как целого.

С принятыми идеализациями можно выписать необходимый набор уравнений, описывающих структуру скопления [1]). Поскольку

[1]) Эти уравнения были впервые выведены и исследованы Зельдовичем и Подурцом [282].

скопление статическое и сферическое, то таким же должно быть и его гравитационное поле. Следовательно, можно ввести систему координат того же типа («шварцшильдовские координаты»), которая была использована в гл. 23 для статической сферической звезды

1) основы анализа

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2 d\Omega^2; \quad \Phi = \Phi(r); \quad \Lambda = \Lambda(r). \tag{25.73}$$

В касательном пространстве в каждом событии пространства-времени имеются векторы импульсов движущихся звезд. Для координат в этом касательном пространстве («импульсное пространство») удобно использовать физические компоненты 4-импульса $p^{\hat{\alpha}}$, т. е. компоненты в ортонормальном базисе

$$\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} = e^{\Phi}\,\mathbf{d}t, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{r}} = e^{\Lambda}\,\mathbf{d}r, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} = r\,\mathbf{d}\theta, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\varphi}} = r\sin\theta\,\mathbf{d}\phi. \tag{25.74}$$

Тогда плотность звезд в фазовом пространстве есть сферически-симметричная статическая функция

$$\mathscr{N} = \mathscr{N}[r, p^{\hat{0}}, p^{\hat{r}}, (p^{\hat{\theta}2} + p^{\hat{\varphi}2})^{1/2}]. \tag{25.75}$$

[$\mathscr{N}$ не зависит от $t$, поскольку скопление статично, и не зависит от $\theta$, $\phi$ и угла $\Theta = \operatorname{arc\,tg}(p^{\hat{\varphi}}/p^{\hat{\theta}})$ в силу сферической симметрии.]

Функции $\Phi$, $\Lambda$ и $\mathscr{N}$, описывающие структуру скопления, определяются кинетическим уравнением (§ 22.6) (называемым также уравнением Власова)

$d\mathscr{N}/d\lambda = 0$, т. е. $\mathscr{N}$ сохраняется вдоль орбиты каждой звезды в фазовом пространстве, (25.76а)

и эйнштейновскими уравнениями поля

$$G^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 8\pi T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 8\pi \int (\mathscr{N} p^{\hat{\alpha}} p^{\hat{\beta}})\,\mu^{-1}\,dp^{\hat{0}}\,dp^{\hat{r}}\,dp^{\hat{\theta}}\,dp^{\hat{\varphi}}. \tag{25.76б}$$

(Уравнение Власова для ньютоновских звездных скоплений рассмотрено Огородниковым [335]. Вышеприведенное выражение для тензора энергии-импульса множества частиц (звезд) было выведено в упражнении 22.18. Здесь, как и в упражнении 22.18, *не* предполагается, что все частицы (звезды) имеют одинаковую массу покоя. Отметим, что масса покоя в этой главе обозначена $\mu$, а в гл. 22 она обозначалась $m$.)

Чтобы решить уравнение Власова, необходимо только заметить, что $\mathscr{N}$ сохраняется вдоль звездных орбит и поэтому должна быть функцией интегралов орбитального движения. В статическом сферическом пространстве-времени скопления имеется интеграл движения, соответствующий каждому вектору Киллинга (см. упражнение 25.8):

2) решение уравнения Власова

$$\begin{aligned}
E &= \text{«энергия на бесконечности»} = -\mathbf{p}\cdot(\partial/\partial t) = -p_0,\\
L_z &= \text{«}z\text{-компонента момента импульса»} = p\cdot\boldsymbol{\xi}_z = p\cdot(\partial/\partial\phi) = p_\phi,\\
L_y &= \text{«}y\text{-компонента момента импульса»} = p\cdot\boldsymbol{\xi}_y,\\
L_x &= \text{«}x\text{-компонента момента импульса»} = p\cdot\boldsymbol{\xi}_x.
\end{aligned} \tag{25.77а}$$

Вдобавок интегралом движения является масса покоя каждой звезды

$$\mu = (p^{\hat{0}2} - p^{\hat{r}2} - p^{\hat{\theta}2} - p^{\hat{\phi}2})^{1/2}. \tag{25.77б}$$

Общее решение уравнения Власова в таком случае имеет вид

$$\mathscr{N} = H\,(E,\ L_x,\ L_y,\ L_z,\ \mu).$$

Однако это общее решение не сферически симметрично. Например, функция распределения

$$\mathscr{N} = H\,(E,\ \mu,\ L_z)\delta(L_y)\delta(L_x)$$

соответствует скоплению звезд, все орбиты которых лежат в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ ($L_y = L_x = 0$ для всех звезд в скоплении). Чтобы функция распределения скопления была сферически симметричной, она должна зависеть только от величины момента импульса

$$L = (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2)^{1/2},$$

а не от его направления (не от ориентации орбитальной плоскости звезды). Поэтому общее сферическое решение уравнения Власова в статическом, сферическом пространстве должно иметь вид

$$\mathscr{N} = F\,(E,\ L,\ \mu). \tag{25.78}$$

Чтобы использовать это общее решение, необходимо снова выразить интегралы движения $E$, $L$, $\mu$ через соответствующие координаты фазового пространства $(t, r, \theta, \phi, p^{\hat{0}}, p^{\hat{r}}, p^{\hat{\theta}}, p^{\hat{\phi}})$. Масса покоя звезды дается формулой (25.77б). Энергия на бесконечности получается из локально измеренной энергии, умноженной на коэффициент, учитывающий красное смещение:

$$E = -p_0 = e^{\Phi} p^{\hat{0}}. \tag{25.79а}$$

Для орбиты в экваториальной плоскости ($p_\theta = p^\theta = p^{\hat{\theta}} = 0$; $L_x = L_y = 0$) полный момент импульса имеет вид

$$L = |L_z| = |p_\phi| = |rp^{\hat{\phi}}| = r \times \begin{pmatrix}\text{«тангенциальная»}\\ \text{компонента 4-импульса}\end{pmatrix}.$$

В силу симметрии формула $L = r \times$ («тангенциальная» компонента $\mathbf{p}$) должна быть справедливой также для орбит в других плоскостях; она должна быть совершенно общей:

$$L = rp^{\hat{T}}, \tag{25.79б}$$

$$p^{\hat{T}} \equiv (\text{тангенциальная компонента 4-импульса}) = \\ = [(p^{\hat{\theta}})^2 + (p^{\hat{\phi}})^2]^{1/2} \tag{25.80}$$

(см. упражнение 25.9).

Прежде чем решать эйнштейновские уравнения поля, полезно свести тензор энергии-импульса (25.76б) к более явной форме. Все недиагональные компоненты $T^{\hat{0}\hat{j}}$ и $T^{\hat{j}\hat{k}}$ ($j \neq k$) исчезают,

3) «сглаженный» тензор энергии-импульса звезд

так как их подынтегральные выражения являются четными функциями $p^{\hat{\gamma}}$. Подынтегральные выражения для диагональных компонент $T^{\hat{0}\hat{0}}$, $T^{\hat{r}\hat{r}}$ и $\frac{1}{2}(T^{\hat{\theta}\hat{\theta}} + T^{\hat{\phi}\hat{\phi}})$ не зависят от угла $\Theta = \operatorname{arctg}(p^{\hat{\phi}}/p^{\hat{\theta}})$ в плоскости импульсного пространства, поэтому элемент объема в импульсном пространстве можно записать в виде

$$dp^{\hat{0}}\,dp^{\hat{r}}\,dp^{\hat{\theta}}\,dp^{\hat{\phi}} \to 2\pi p^{\hat{r}}\,dp^{\hat{r}}\,dp^{\hat{0}}.$$

Производя замену переменных $(p^{\hat{r}},\ p^{\hat{r}},\ p^{\hat{0}})$ на $(p^{\hat{r}},\ \mu,\ p^{\hat{0}})$, где

$$\mu = [(p^{\hat{0}})^2 - (p^{\hat{r}})^2 - (p^{\hat{r}})^2]^{1/2},$$

и обнаруживая, что каждому значению $\mu$ соответствуют два значения $p^{\hat{r}}$ $(\pm p^{\hat{r}})$, приводим элемент объема к виду

$$2\pi p^{\hat{r}} dp^{\hat{r}}\,dp^{\hat{r}}\,dp^{\hat{0}} \to 4\pi\,(p^{\hat{r}}\mu/p^{\hat{r}})\,dp^{\hat{r}}\,dp^{\hat{0}}\,d\mu.$$

Диагональные компоненты $\mathbf{T}$ [уравнение (25.76б)] тогда принимают форму

$$\rho \equiv T^{\hat{0}\hat{0}} = (\text{полная плотность массы-энергии}) =$$

$$= 4\pi \int F(e^{\Phi}p^{\hat{0}},\ rp^{\hat{r}},\ \mu)\,(p^{\hat{0}2}p^{\hat{r}}/p^{\hat{r}})\,dp^{\hat{r}}\,dp^{\hat{0}}\,d\mu, \qquad (25.81\text{а})$$

$$P_T \equiv \frac{1}{2}(T^{\hat{\theta}\hat{\theta}} + T^{\hat{\phi}\hat{\phi}}) = T^{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T^{\hat{\phi}\hat{\phi}} = (\text{тангенциальное давление}) =$$

в силу сферической симметрии

$$= 2\pi \int F(e^{\Phi}p^{\hat{0}},\ rp^{\hat{r}},\ \mu)\,[(p^{\hat{r}})^3/p^{\hat{r}}]\,dp^{\hat{r}}\,dp^{\hat{0}}\,d\mu, \qquad (25.81\text{б})$$

$$P_r \equiv T^{\hat{r}\hat{r}} = (\text{радиальное давление}) =$$

$$= 4\pi \int F(e^{\Phi}p^{\hat{0}},\ rp^{\hat{r}},\ \mu)\,(p^{\hat{r}}p^{\hat{r}})\,dp^{\hat{r}}\,dp^{\hat{0}}\,d\mu. \qquad (25.81\text{в})$$

При вычислении этих интегралов следует выразить $p^{\hat{r}}$ через переменные интегрирования

$$p^{\hat{r}} = [(p^{\hat{0}})^2 - (p^{\hat{r}})^2 - \mu^2]^{1/2}. \qquad (25.81\text{г})$$

4) решение уравнений поля

Эйнштейновские уравнения поля для этого тензора энергии-импульса и метрики (25.73) после подстановки выражения (14.43) для $G^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ и выполнения операций, аналогичных проведенным для сферической звезды (§ 23.5), принимают вид

$$e^{2\Lambda} = (1 - 2m/r)^{-1}, \quad m = \int_0^r 4\pi r^2 \rho\,dr, \qquad (25.82\text{а})$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r-2m)}. \qquad (25.82\text{б})$$

Эти уравнения вместе с предполагаемой формой функции распределения $F(E, L, \mu)$ и интегралами (25.81) для $\rho$, $P_r$ и $P_T$ определяют структуру скопления. В дополнении 25.8 дан общий обзор этих уравнений внутреннего строения и конкретизация их на случай изотропного распределения скоростей. В дополнении 25.9 представлены и обсуждаются решения уравнения для изотермического звездного скопления (обрезанное максвелловское распределение скоростей).

---

УПРАЖНЕНИЯ

### 25.27. Изотропное звездное скопление

Для скопления с функцией распределения, не зависящей от момента импульса, получите свойства Б1—Б6 из дополнения 25.8.

### 25.28. Автомодельное скопление (см. [336, 337])

а. Найдите решение уравнений внутреннего строения сферической звезды с бесконечной центральной плотностью и уравнением состояния $P = \gamma\rho$, где $\gamma$ — постоянная $(0 < \gamma < {}^1/_3)$.

б. Найдите изотропную функцию распределения $F(E, \mu)$, которая приводит к звездному скоплению с теми же распределениями $\rho$, $P$, $m$ и $\Phi$, что и в газовой сфере из п. «а» (см. дополнение 25.8). [*Ответ*:

$$P = \gamma\rho = \frac{\gamma^2}{1+6\gamma+\gamma^2}\,\frac{1}{2\pi r^2},$$

$$e^{2\Lambda} = (1-2m/r)^{-1} = (1+6\gamma+\gamma^2)/(1+\gamma)^2,$$

$$e^{2\Phi} = Br^{4\gamma/(1+\gamma)}, \quad B = \text{const},$$

$$F = A\,(E/B^{1/2})^{-(1+\gamma)/\gamma}\,\delta(\mu-\mu_0) = Ar^{-2}\,(E_{\text{локальн}})^{-(1+\gamma)/\gamma}, \quad A = \text{const}.]$$

### 25.29. Скопление с круговыми орбитами

Какова должна быть форма функции распределения, чтобы гарантировать, что все звезды движутся по круговым орбитам? Выпишите уравнения внутреннего строения в этом случае. Исследуйте устойчивость орбит отдельных звезд в скоплении, используя зависимость эффективного потенциала от $r$. Каким условиям должна удовлетворять функция распределения, чтобы все орбиты были устойчивыми? (См. [338, 339].)

---

## Дополнение 25.8. УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННЕГО СТРОЕНИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОГО ЗВЕЗДНОГО СКОПЛЕНИЯ

**А. Чтобы построить модель звездного скопления, поступим следующим образом:**

1. Определим функцию распределения $\mathcal{N} = F(E, L, \mu)$, где

$E$ — энергия звезды на бесконечности,
$L$ — момент импульса звезды,
$\mu$ — масса покоя звезды.

2. Решим следующие два интегродифференциальных уравнения для метрических функций $m = \frac{1}{2} r (1 - e^{-2\Lambda})$ и $\Phi$ с линейным элементом $ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2$:

$$m = \int_0^r 4\pi r^2 \rho \, dr,$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)},$$

где

$$\rho = 4\pi \int F(e^{\Phi} p^{\hat{0}}, r p^{\hat{T}}, \mu) [(p^{\hat{0}})^2 p^{\hat{T}} / p^{\hat{r}}] \, dp^{\hat{T}} \, dp^{\hat{0}} \, d\mu,$$

$$P_T = 2\pi \int F(e^{\Phi} p^{\hat{0}}, r p^{\hat{T}}, \mu) [(p^{\hat{T}})^3 / p^{\hat{r}}] \, dp^{\hat{T}} \, dp^{\hat{0}} \, d\mu,$$

$$P_r = 4\pi \int F(e^{\Phi} p^{\hat{0}}, r p^{\hat{T}}, \mu) (p^{\hat{r}} q^{\hat{T}}) \, dp^{\hat{T}} \, dp^{\hat{0}} \, d\mu,$$

$$p^{\hat{r}} = [(p^{\hat{0}})^2 - (p^{\hat{T}})^2 - \mu^2]^{1/2}.$$

В подынтегральных выражениях для $\rho$, $P_T$ и $P_r$ величины $p^{\hat{T}}$, $p^{\hat{0}}$, $\mu$ пробегают все положительные значения, для которых $(p^{\hat{0}})^2 - (p^{\hat{T}})^2 - \mu^2 \geqslant 0$.

**Б. Если функция распределения не зависит от момента импульса, то**

1. $F = F(E, \mu)$.
2. Распределение скоростей звезд в каждой точке скопления изотропно.
3. $\rho = 4\pi \int F(e^{\Phi} p^{\hat{0}}, \mu) [(p^{\hat{0}})^2 - \mu^2]^{1/2} (p^{\hat{0}})^2 \, dp^{\hat{0}} \, d\mu.$
4. Давление изотропно

$$P_r = P_T \equiv P \equiv \frac{4\pi}{3} \int F(e^{\Phi} p^{\hat{0}}, \mu) (p^{\hat{0}2} - \mu^2)^{3/2} \, dp^{\hat{0}} \, d\mu.$$

5. Полная плотность массы-энергии $\rho$, давление $P$ и метрические функции $\Phi$ и $m = \frac{1}{2} r (1 - e^{-2\Lambda})$ удовлетворяют уравнениям внутреннего строения

газовой сферы («звезды»)

$$m = \int 4\pi r^2 \rho \, dr, \qquad \frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r-2m)},$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r-2m)}.$$

6. Таким образом, каждому статическому сферическому звездному скоплению с изотропным распределением скорости соответствует единственная газовая сфера с такими же распределениями $\rho$, $P$, $m$ и $\Phi$.
7. Обратно [340], задавшись газовой сферой (решение уравнений внутреннего строения звезды для $\rho$, $P$, $m$ и $\Phi$), можно всегда найти функцию распределения $F(E, \mu)$, которая описывает скопление с теми же самыми $\rho$, $P$, $m$ и $\Phi$. Однако для некоторых газовых сфер функция $F$ оказывается обязательно отрицательной в части фазового пространства и, таким образом, нефизичной.

### Дополнение 25.9. ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ ЗВЕЗДНЫЕ СКОПЛЕНИЯ

#### А. Функция распределения

1. Можно ожидать, что в любом релятивистском звездном скоплении близкие случайные столкновения между звездами будут «термализовать» звездную функцию распределения. Это предполагает изучение изотропных сферических скоплений с функцией распределения Больцмана (она считается равной нулю для $p^{\hat{0}} = Ee^{-\Phi} < \mu_0$)

$$\mathscr{N} = F(E, L, \mu) = Ke^{-E/T} \delta(\mu - \mu_0). \tag{1}$$

Здесь $K$ — нормировочная постоянная, $T$ — постоянная «температура», и предполагается, что все звезды имеют одинаковую массу покоя $\mu_0$.

2. В таком скоплении наблюдатель, расположенный на радиусе $r$, видит, что звезда с энергией на бесконечности $E$ имеет локально измеренную энергию

$$p^{\hat{0}} = (\text{масса-энергия покоя}) + (\text{кинетическая энергия}) = \frac{\mu_0}{(1-v^2)^{1/2}} = Ee^{-\Phi(r)}. \tag{2}$$

Следовательно, звезды в его окрестности имеют больцмановское распределение

$$\frac{dN}{d^3\hat{p}\, d^3\hat{x}\, d\mu} = \mathscr{N} = K \exp(-p^{\hat{0}}/T_{\text{локальн}}) \delta(\mu - \mu_0) \tag{3}$$

с локально измеренной температурой

$$T_{\text{локальн}}(r) = Te^{-\Phi(r)}. \tag{4}$$

Таким образом, температура в скоплении испытывает тождественно то же самое красное или голубое смещение, что и фотоны, частицы и звезды, которые движутся в скоплении. (Вывод этого закона красного смещения температуры для газа в тепловом равновесии см. в части «д» упражнения 22.7.)

3. В действительности больцмановское распределение (1) может никогда не до-

стигаться. Звезды с $E > \mu_0$ гравитационно не связаны и будут уходить из скопления. В больцмановском распределении подразумевается, что функция распределения остается неизменной, если число звезд с теми же энергиями, уходящих к $r = \infty$, равно числу звезд, приходящих от $r = \infty$. Ясно, что такая ситуация нереалистична. Вместо этого следует ожидать, что в результате ухода звезд функция распределения обрезается на некоторой энергии $E_{\text{макс}}$, несколько меньшей $\mu_0$. Таким образом, в идеализированном виде имеем «обрезанное распределение Больцмана»

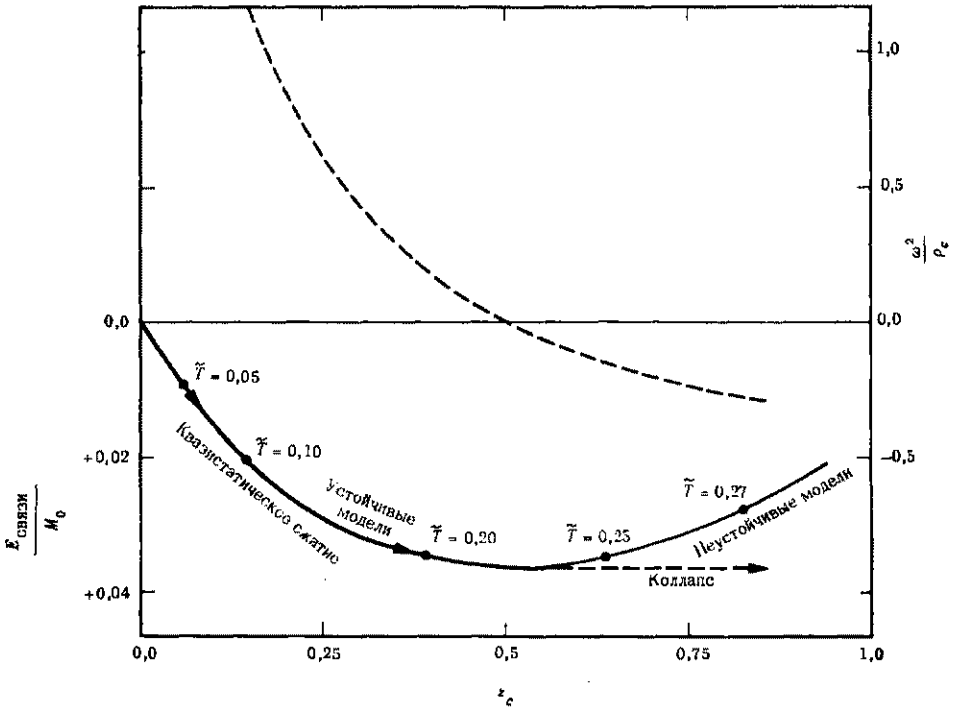
$$\mathcal{N} = F(E, L, \mu) = \begin{cases} Ke^{-E/T}\delta(\mu - \mu_0), & E < E_{\text{макс}}, \\ 0, & E > E_{\text{макс}}. \end{cases} \tag{5}$$

**Б. Структура и устойчивость моделей скоплений**

1. Модели звездных скоплений с обрезанными больцмановскими распределениями построили Зельдович и Подурец [282], Факерелл [341] и Ипсер [283]; они использовали процедуру, описанную в дополнении 25.8. Ипсер рассмотрел бесстолкновительные радиальные колебания таких скоплений.
2. В общем случае эти скопления образуют 4-параметрическое семейство ($K$, $T$, $\mu_0$, $E_{\text{макс}}$). Заменим параметр $K$ на полную массу покоя скопления $M_0 = \mu_0 N$, где $N$ — полное число звезд, температуру $T$ — на температуру на единицу массы покоя $\tilde{T} = T/\mu_0$, а энергию $E_{\text{макс}}$ — на максимальную энергию на единицу массы покоя $\tilde{E}_{\text{макс}} = E_{\text{макс}}/\mu_0$. Тогда скопления будут характеризоваться следующим набором параметров: $[M_0, \tilde{T}, \mu_0, \tilde{E}_{\text{макс}}]$. Если теперь удвоить $\mu_0$, удерживая $M_0$, $\tilde{T}$, $\tilde{E}_{\text{макс}}$ фиксированными (и, таким образом, сократить число звезд), то все макроскопические свойства скопления останутся неизменными. В этом смысле $\mu_0$ является «тривиальным параметром», и впредь его можно игнорировать или произвольно изменять. Полную массу покоя скопления $M_0$ можно рассматривать как «масштабный множитель»; все безразмерные характеристики скопления не зависят от него. Например, если $\rho_c$ — центральная плотность массы-энергии [равенство (25.81а) при $r = 0$], тогда $\rho_c M_0^2$ — безразмерная величина и, таким образом, не зависит от $M_0$; это означает, что $\rho_c \sim M_0^{-2}$. Остаются только два нетривиальных параметра: $\tilde{T}$ и $\tilde{E}_{\text{макс}}$.
3. Рассмотрим поучительный специальный случай [282] однопараметрического семейства с $\tilde{E}_{\text{макс}} = 1 - \frac{1}{2}\tilde{T}$. На фигуре (см. стр. 358), рассчитанной Ипсером [283], нанесены относительная энергия связи для этого семейства

$$E_{\text{связи}}/M_0 \equiv (M_0 - M)/M_0 \tag{6}$$

(здесь $M$ — полная масса-энергия), квадрат угловой частоты для бесстолкновительных колебаний (амплитуда колебаний $\sim e^{-i\omega t}$), деленный на плотность в центре массы-энергии, т. е. $\omega^2/\rho_c$, в зависимости от красного смещения $z_c$ фотонов, испущенных из центра скопления и принятых на бесконечности. Все эти величины безразмерны и зависят только от выбора $\tilde{T} = T/\mu_0$.
4. Отметим, что все модели вне точки максимальной энергии связи ($z_c \gtrsim 0{,}5$) неустойчивы относительно бесстолкновительных радиальных возмущений ($\omega$ — мнимая амплитуда возмущений $\sim e^{|\omega| t}$). При слабом возмущении




такие скопления должны коллапсировать, образуя черные дыры. (Анализ аналогичной неустойчивости в звездах см. в гл. 26.)

5. Эти результаты позволяют дать идеализированную историю эволюции сферического скопления [282, 305]. Скопление будет квазистатически эволюционировать вдоль последовательности сферических равновесных конфигураций типа изображенных на фигуре. Эволюция будет сопровождаться звездными столкновениями и испарением звезд. Если две звезды сталкиваются и сливаются, они увеличивают массу покоя скопления и, следовательно, его относительную энергию связи. Если в результате таких столкновений звезда приобретает достаточное для испарения количество энергии, она уносит избыток кинетической энергии, а скопление остается еще более компактно связанным. Таким образом, как столкновения, так и испарение должны вести скопление ко все более и более компактно связанным состояниям. Когда, двигаясь по этой последовательности, скопление достигает точки максимальной относительной энергии связи, оно не сможет больше эволюционировать квазистатически. Наступает релятивистский гравитационный коллапс: звезды по спирали падают, проходя гравитационный радиус скопления, к центру скопления, образуется черная дыра и, возможно, несколько оставшихся, обращающихся вокруг нее звезд.

Соблазнительно предположить, что взрывные события в ядрах некоторых галактик и в квазарах могут быть связаны с началом такого коллапса или со столкновениями между уже коллапсировавшим скоплением (черной дырой) и окружающими звездами.

# 26. ЗВЕЗДНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ [1)]

**Эта глава полностью относится к курсу 2. Она не зависит ни от одной главы и не служит подготовительным материалом к какой-либо другой главе.**

## § 26.1. ОБОСНОВАНИЕ

В релятивистской астрофизике, как и в других разделах физики, большинство проблем, представляющих глубокий физический интерес, слишком трудны и сложны, и их нельзя решить точно. Их можно решить только с помощью приближенных методов. Из всех приближенных методов самую широкую область применимости имеет теория возмущений.

Причины «быть» этой главе

Расчеты по теории возмущений обычно длинны, утомительны и содержат сложные математические выражения. Поэтому они не уместны в учебнике такого типа, как эта книга. Тем не менее для тех астрофизиков, которые хотят знать, как правильно поставить задачу и выполнить расчеты по теории возмущений в общей теории относительности, авторы выбрали один пример и детально его разобрали.

Выбранный пример — это анализ адиабатических радиальных пульсаций невращающейся релятивистской звезды. Стоит отметить его две характерные черты: 1) пример достаточно сложен, чтобы стать инструктивным, но достаточно прост, чтобы быть презентабельным; 2) в результатах расчета можно ясно различить и количественно определить релятивистскую неустойчивость, которая так важна для современной астрофизики (см. гл. 24).

В представленном здесь расчете мы следуем Чандрасекару [278, 279], который впервые обнаружил релятивистскую неустойчивость. О другом варианте расчета, основанном на понятии

---

[1)] Авторы глубоко признательны Карлтону М. Кейвсу, нашедшему и исправившему много ошибок в этой и других главах.

«экстремальной энергии», см. в приложении к книге Гаррисона, Торна, Вакано и Уилера [287], а о расчете, основанном на понятии экстремальной энтропии, см. в [342].

## § 26.2. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Что необходимо для анализа звездных пульсаций?

Рассматриваемая система представляет собой сферу идеальной жидкости, пульсирующую радиально с очень малой амплитудой. Для анализа пульсаций необходимы: а) точные уравнения, описывающие равновесную конфигурацию, относительно которой пульсирует сфера, б) система координат для колеблющейся сферы, сводящаяся при нулевой амплитуде пульсаций к стандартной системе шварцшильдовских координат для равновесной сферы, в) набор малых функций, которые описывают пульсации (радиальное смещение и скорость, возмущения давления и плотности, изменения первого порядка в метрических коэффициентах) и по которым происходит линеаризация, г) набор уравнений, определяющих эволюцию этих «функций возмущения».

### а. Равновесная конфигурация

Равновесная конфигурация звезды

Уравнения внутреннего строения для равновесной сферы приведены в § 23.7. Полезно переписать их здесь с некоторыми изменениями обозначений (используя индекс «$o$» для обозначения «невозмущенной конфигурации», величину $\Lambda = -\frac{1}{2}\ln(1-2m/r)$ вместо $m$ во всех уравнениях и штрих для обозначения производных по $r$):

$$ds^2 = -e^{2\Phi_o}\,dt^2 + e^{2\Lambda_o}\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2), \tag{26.1а}$$

$$\Lambda_o' = \frac{1}{2r}(1 - e^{2\Lambda_o}) + 4\pi r\rho_o e^{2\Lambda_o}, \tag{26.1б}$$

$$p_o' = -(\rho_o + p_o)\,\Phi_o', \tag{26.1в}$$

$$\Phi_o' = -\frac{1}{2r}(1 - e^{2\Lambda_o}) + 4\pi r p_o e^{2\Lambda_o}. \tag{26.1г}$$

### б. Координаты для возмущенной конфигурации

Газовая сфера пульсирует радиально, т. е. сферически симметричным образом. Следовательно, ее пространственно-временная геометрия должна быть сферической. В дополнении 23.3 показано, что для любого динамического или статического сферического пространства-времени можно ввести шварцшильдовские координаты с линейным элементом

Координаты для возмущенной конфигурации

$$ds^2 = -e^{2\Phi}\,dt^2 + e^{2\Lambda}\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2), \tag{26.2}$$

$$\Phi = \Phi(t, r), \quad \Lambda = \Lambda(t, r).$$

Эти координаты используются для пульсирующей сферы, поскольку они сводятся к невозмущенным координатам, если пульсации имеют нулевую амплитуду.

### в. Функции возмущения

Когда пульсации имеют очень малую амплитуду, метрические коэффициенты $\Phi$, $\Lambda$ и термодинамические переменные $p$, $\rho$ и $n$, измеренные в системе отсчета, покоящейся относительно жидкости, очень мало отличаются от своих невозмущенных значений. Пусть $\delta\Phi$, $\delta\Lambda$, $\delta p$, $\delta\rho$ и $\delta n$ — возмущения, налагаемые на невозмущенную конфигурацию:

Функции возмущения

$$\Phi(t, r) = \Phi_0(r) + \delta\Phi(t, r), \quad \Lambda(t, r) = \Lambda_0(r) + \delta\Lambda(t, r),$$
$$p(t, r) = p_0(r) + \delta p(t, r), \quad \rho(t, r) = \rho_0(r) + \delta\rho(t, r), \quad (26.3а)$$
$$n(t, r) = n_0(r) + \delta n(t, r).$$

Кроме $\delta\Phi$, $\delta\Lambda$, $\delta p$, $\delta\rho$ и $\delta n$, для описания пульсации необходима еще одна функция возмущения — радиальное смещение $\xi$ жидкости от своего равновесного положения:

> Жидкий элемент, локализованный на координатном радиусе $r$ в невозмущенной конфигурации, смещается к координатному радиусу $r + \xi(r, t)$ (26.3б) за координатное время $t$ в колеблющейся конфигурации.

Чтобы облегчить анализ пульсаций, все уравнения следует линеаризовать по функциям возмущения $\xi$, $\delta\Phi$, $\delta\Lambda$, $\delta p$, $\delta\rho$ и $\delta n$.

### г. Уравнения эволюции

Как вывести уравнения, определяющие функции возмущения

Эволюция функций возмущения со временем определяется эйнштейновскими уравнениями поля, локальным законом сохранения энергии-импульса $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ и законами термодинамики, линеаризованными соответствующим образом. Дальнейший анализ сводится лишь к приведению этих уравнений к «послушному виду». Конечно, эта процедура проводится наиболее эффективно, если наперед известен искомый вид уравнений. Цель этого расчета и большинства аналогичных расчетов проста — получить 1) набор *динамических уравнений* для истинных динамических степеней свободы (лишь смещение жидкости $\xi$ в данном случае; смещение жидкости и амплитуды гравитационных волн в несферическом случае, где возможны волны); 2) набор *уравнений на начальные значения*, выражающих оставшиеся функции возмущения ($\delta\Phi$, $\delta\Lambda$, $\delta p$, $\delta\rho$ и $\delta n$ в данном случае) через динамические степени свободы ($\xi$).

## § 26.3. СРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРОВЫХ И ЛАГРАНЖЕВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Определение эйлеровых возмущений

Определение лагранжевых возмущений

Прежде чем выводить динамические уравнения и уравнения для начальных значений, полезно ввести новое понятие: «лагранжево возмущение» термодинамической переменной. Возмущения $\delta p$, $\delta\rho$ и $\delta n$ в равенствах (26.3) — это *эйлеровы возмущения* $p$, $\rho$ и $n$, т. е. изменения, измеренные наблюдателем, постоянно находящимся в фиксированной точке $(t, r, \theta, \phi)$ координатной сетки. В противоположность этому *лагранжевы возмущения*, обозначаемые $\Delta p$, $\Delta\rho$ и $\Delta n$,— это изменения, измеренные наблюдателем, движущимся с жидкостью, т. е. наблюдателем, который находится на радиусе $r$ в невозмущенной конфигурации, а в возмущенной конфигурации находится на радиусе $r + \xi(t, r)$:

Связь между эйлеровыми и лагранжевыми возмущениями

$$\Delta p(t, r) = p[t, r+\xi(t, r)] - p_0(r) \approx \delta p + p_0'\xi, \tag{26.4а}$$

$$\Delta\rho(t, r) = \rho_1[t, r+\xi(t, r)] - \rho_0(r) \approx \delta\rho + \rho_0'\xi, \tag{26.4б}$$

$$\Delta n(t, r) = n[(t, r+\xi(t, r)] - n_0(r) \approx \delta n + n_0'\xi. \tag{26.4в}$$

## § 26.4. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

### а. Сохранение барионов

Вывод уравнений для начальных значений: 1) для возмущений барионного числа $\Delta n$ и $\delta n$

Закон сохранения барионов $\nabla\cdot(n\mathbf{u}) = 0$ (§ 22.2) определяет эволюцию возмущений барионного числа $\Delta n$ и $\delta n$. Применяя к дивергенции цепное правило и используя соотношение $\mathbf{u}\cdot\nabla n = \nabla_{\mathbf{u}} n = dn/d\tau$, закон сохранения можно переписать в виде

$$dn/d\tau = -n(\nabla\cdot\mathbf{u}).$$

($d/d\tau$ — производная от $n$ вдоль мировой линии жидкого элемента)

Это уравнение можно записать через $\Delta n$ — возмущение, измеренное наблюдателем, движущимся с жидкостью:

$$\frac{d\Delta n}{d\tau} = -n(\nabla\cdot\mathbf{u}). \tag{26.5}$$

Для дальнейшего преобразования уравнения (26.5) необходимо иметь выражение для 4-скорости жидкости. Оно легко выводится из соотношений

$$\frac{u^r}{u^t} = \left(\frac{dr/d\tau}{dt/d\tau}\right) = \left(\frac{dr}{dt}\right)_{\substack{\text{вдоль}\\ \text{мировой линии}}} = \frac{\partial\xi}{\partial t} \equiv \dot{\xi},$$

$$(u^t)^2 e^{2\Phi} - (u^r)^2 e^{2\Lambda} = 1.$$

В результате в первом порядке по $\xi$, $\delta\Lambda$ и $\delta\Phi$ имеем

$$u^t = e^{-\Phi} = e^{-\Phi_0}(1 - \delta\Phi), \quad u^r = \dot{\xi}e^{-\Phi_0}. \tag{26.6}$$

Подставляя эти компоненты в уравнение (26.5) и используя соотношения

$$\frac{d}{d\tau} = \mathbf{u} = u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g}\, u^\alpha)_{,\alpha}$$

и метрику (26.2), учитывающую колебания, приводим уравнение (26.5) к соотношению, интеграл по времени от которого равен

$$\Delta n = -n_0 [r^{-2} e^{-\Lambda_0} (r^2 e^{\Lambda_0} \xi)' + \delta\Lambda]. \tag{26.7}$$

*Это уравнение на начальные значения для возмущения* $\Delta n$ как функции динамической переменной $\xi$. Уравнение на начальные значения для $\delta n$, которое дальше не понадобится, получается путем комбинации уравнений (26.7) и (26.4в).

### б. Адиабатичность

Для адиабатических колебаний (перенос тепла между соседними жидкими элементами пренебрежимо мал) лагранжевы изменения плотности числа частиц и давления связаны соотношением

2) для возмущений давления $\Delta p$ и $\delta p$

$$\left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln n}\right)_s \equiv \Gamma_1 = \frac{n}{p}\frac{\Delta p}{\Delta n}. \tag{26.8}$$

↑ определение показателя адиабаты $\Gamma_1$

Комбинируя это адиабатическое соотношение с уравнением (26.7) для $\Delta n$ и уравнением (26.4а) для $\delta p$ как функции $\Delta p$, получаем следующее *уравнение на начальные значения для* $\delta p$:

$$\delta p = -\Gamma_1 p_0 [r^{-2} e^{-\Lambda_0} (r^2 e^{\Lambda_0} \xi)' + \delta\Lambda] - \xi p_0'. \tag{26.9}$$

### в. Сохранение энергии

Локальный закон сохранения энергии [первый закон термодинамики $\mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) = 0$; см. § 22.2 и 22.3] гласит, что

3) для возмущений плотности $\Delta\rho$ и $\delta\rho$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{\rho + p}{n}\frac{dn}{d\tau}.$$

Будучи переписанным через лагранжевы возмущения (напомним, что $d/d\tau$ — это производная по времени, измеренная наблюдателем, движущимся с жидкостью) — локальный закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{d\Delta\rho}{d\tau} = \frac{\rho + p}{n}\frac{d\Delta n}{d\tau},$$

а после интегрирования по времени (в первом порядке) имеем

$$\Delta\rho = \frac{\rho_0 + p_0}{n_0}\Delta n. \tag{26.10}$$

(Постоянная интегрирования равна нулю, поскольку при $\Delta n = 0$ $\Delta\rho$ также должно обращаться в нуль.) Комбинируя это уравнение с уравнением (26.7) для $\Delta n$ и уравнением (26.4б) для $\delta\rho$ как функции $\Delta\rho$, получаем следующее *уравнение на начальные значения для* $\delta\rho$:

$$\delta\rho = -(\rho_o + p_o)\,[r^{-2}e^{-\Lambda_o}(r^2 e^{\Lambda_o}\xi)' + \delta\Lambda] - \xi\rho_o'. \qquad (26.11)$$

### г. Эйнштейновские уравнения поля

4) для возмущений метрики $\delta\Lambda$ и $\delta\Phi$

Два уравнения из системы эйнштейновских уравнений поля сводятся после линеаризации к уравнениям на начальные значения для возмущений метрики $\delta\Lambda$ и $\delta\Phi$. Необходимыми уравнениями, выраженными в ортонормальной системе отсчета

$$\omega^{\hat{t}} = e^{\Phi}\,\mathbf{d}t, \quad \omega^{\hat{r}} = e^{\Lambda}\,\mathbf{d}r, \quad \omega^{\hat{\theta}} = r\,\mathbf{d}\theta, \quad \omega^{\hat{\phi}} = r\sin\theta\,\mathbf{d}\phi, \qquad (26.12)$$

являются уравнения

$$G_{\hat{r}\hat{t}} = 8\pi T_{\hat{r}\hat{t}} \quad \text{и} \quad G_{\hat{r}\hat{r}} = 8\pi T_{\hat{r}\hat{r}}.$$

Компоненты тензора Эйнштейна в этой ортонормальной системе отсчета были вычислены в упражнении 14.16:

$$G_{\hat{r}\hat{t}} = 2\,(\dot{\Lambda}/r)\,e^{-(\Lambda+\Phi)} = 2r^{-1}e^{-(\Lambda_o+\Phi_o)}\delta\dot{\Lambda}, \qquad (26.13а)$$

(↑ линеаризовано)

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = 2\,(\Phi'/r)\,e^{-2\Lambda} + r^{-2}\,(e^{-2\Lambda} - 1) =$$

$$= (G_{\hat{r}\hat{r}})_o + 2r^{-1}e^{-2\Lambda_o}\,\delta\Phi' - 2e^{-2\Lambda_o}\,(2r^{-1}\Phi_o' + r^{-2})\,\delta\Lambda. \qquad (26.13б)$$

(↑ линеаризовано)

Компоненты тензора энергии-импульса $T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = (\rho + p)\,u_{\hat{\alpha}}u_{\hat{\beta}} + p\eta_{\alpha\beta}$, если при их вычислении использовались 4-скорость (26.6) [преобразованная к виду $u_{\hat{o}} = -1$, $u_{\hat{r}} = \dot{\xi}e^{\Lambda_o - \Phi_o}$] и выражения (26.3а) для $\rho$ и $p$, можно записать следующим образом:

$$T_{\hat{r}\hat{t}} = -(\rho_o + p_o)\,e^{\Lambda_o - \Phi_o}\dot{\xi}, \quad T_{\hat{r}\hat{r}} = p_o + \delta p. \qquad (26.14)$$

В результате после интегрирования по времени и выбора постоянной интегрирования так, чтобы $\delta\Lambda = 0$ при $\xi = 0$, уравнение поля $G_{\hat{r}\hat{t}} = 8\pi T_{\hat{r}\hat{t}}$ сводится к уравнению

$$\delta\Lambda = -4\pi\,(\rho_o + p_o)\,re^{2\Lambda_o}\xi = -(\Lambda_o' + \Phi_o')\,\xi. \qquad (26.15)$$

*Это уравнение на начальные значения для* $\delta\Lambda$. Уравнение поля $G_{\hat{r}\hat{r}} = 8\pi T_{\hat{r}\hat{r}}$ после использования (26.15) для исключения $\delta\Lambda$,

(26.9) для исключения $\delta p$ и (26.1в) для исключения $\Phi_0'$ принимает вид

$$\delta\Phi' = -4\pi\Gamma_1 p_0 r^{-1} e^{2\Lambda_0+\Phi_0}(r^2 e^{-\Phi_0}\xi)' + [4\pi p_0' r - 4\pi(\rho_0+p_0)]\, e^{2\Lambda_0}\xi. \tag{26.16}$$

*Это уравнение на начальные значения для* $\delta\Phi$.

## § 26.5. ДИНАМИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Вывод уравнения движения для смещения жидкости $\xi$

Динамическая эволюция смещения жидкости $\boldsymbol{\xi}(t, r)$ определяется уравнением Эйлера (22.13):

$$(\rho+p)\times(\text{4-ускорение}) = -(\text{проекция } \nabla p, \text{ ортогональная } \mathbf{u}). \tag{26.17}$$

4-ускорение $\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$, соответствующее 4-скорости (26.6) в метрике (26.2), имеет единственную, отличную от нуля, линеаризованную ковариантную компоненту:

$$a_r = \Phi_0' + \delta\Phi' + e^{2(\Lambda_0-\Phi_0)}\ddot{\xi}.$$

[Компонента $a_t$ тривиальна в том смысле, что она ведет к уравнению Эйлера, дублирующему (26.1в).] Комбинируя это выражение для $a_r$ с $\rho + p = \rho_0 + p_0 + \delta\rho + \delta p$, с радиальной компонентой $p_0' + \delta p'$ для проекции $\nabla p$ и с уравнением гидростатического равновесия (26.1в) в нулевом приближении, получаем уравнение Эйлера

$$(\rho_0+p_0)\, e^{2(\Lambda_0-\Phi_0)}\ddot{\xi} = -\delta p' - (\delta\rho+\delta p)\,\Phi_0' - (\rho_0+p_0)\,\delta\Phi'. \tag{26.18}$$

Уравнение движения (26.18) приводится к наиболее удобному виду, если сначала использовать уравнения (26 9), (26.11) и (26.16) на начальные значения, выражающие $\delta p$, $\delta\rho$ и $\delta\Phi'$ через $\xi$, а затем после перестановки членов — уравнения внутреннего строения (26.1) в нулевом порядке. В результате найдем

$$W\ddot{\zeta} = (P\zeta')' + Q\zeta, \tag{26.19}$$

где $\zeta$ — «перенормированная функция смещения», а $W$, $P$, $Q$ — функции радиуса, определяемые внутренним строением равновесной звезды:

$$\zeta \equiv r^2 e^{-\Phi_0}\xi, \tag{26.20}$$

$$W \equiv (\rho_0+p_0)\, r^{-2} e^{3\Lambda_0+\Phi_0}, \tag{26.21а}$$

$$P \equiv \Gamma_1 p_0 r^{-2} e^{\Lambda_0+3\Phi_0}, \tag{26.21б}$$

$$Q \equiv e^{\Lambda_0+3\Phi_0}\left[\frac{(p_0')^2}{\rho_0+p_0}\, r^{-2} - 4p_0' r^{-3} - 8\pi(\rho_0+p_0)\, p_0 r^{-2} e^{2\Lambda_0}\right]. \tag{26.21в}$$

*Уравнение* (26.19) *представляет собой динамическое уравнение, описывающее звездные пульсации.* [Это уравнение можно переписать в других формах; например, его можно умножить на $W^{-1}$ или на любой другой отличный от нуля множитель и перегруппировать члены. Форма (26.19) предпочтительна, поскольку она приводит к самосопряженной задаче на собственные значения для частот колебаний, как это указано в дополнении 26.1.]

**Граничные условия, налагаемые на смещение жидкости**

Не все решения динамического уравнения приемлемы. Чтобы быть физически приемлемой, функция смещения должна вызывать конечные возмущения плотности и давления ($\delta\rho$ и $\delta p$) в центре сферы; это означает, что

$$\xi/r \text{ конечно или равно нулю в пределе при } r \to 0 \tag{26.22а}$$

[см. (26.9) и (26.11)]; функция смещения должна также оставлять равным нулю давление на поверхности звезды; это означает, что

$$\Delta p = -\Gamma_1 p_0 r^{-2} e^{\Phi_0} (r^2 e^{-\Phi_0}\xi)' \to 0 \text{ при } r \to R \tag{26.22б}$$

($R$: радиус поверхности)

[см. (26.7), (26.8) и (26.15)].

## Дополнение 26.1. ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ МОД ПУЛЬСАЦИЙ ЗВЕЗДЫ

Предположим, что перенормированная функция смещения (26.20) имеет синусоидальную зависимость от времени

$$\zeta = \zeta(r)\, e^{-i\omega t}.$$

Тогда динамическое уравнение (26.19) и граничные условия (26.22) сводятся к задаче на собственные значения для угловой частоты $\omega$ и амплитуды $\zeta(r)$:

$$(P\zeta')' + Q\zeta + \omega^2 W\zeta = 0, \tag{1}$$

$$\zeta/r^3 \text{ конечно или равно нулю при } r \to 0, \tag{2а}$$

$$\Gamma_1 p_0 r^{-2} e^{\Phi_0}\zeta' \to 0 \text{ при } r \to R. \tag{2б}$$

Методы решения этой задачи на собственные значения перечислены и обсуждены Бардином, Торном и Мельтцером [343]. Одним из методов (*нелучшим*, однако, для численных расчетов) служит вариационный принцип

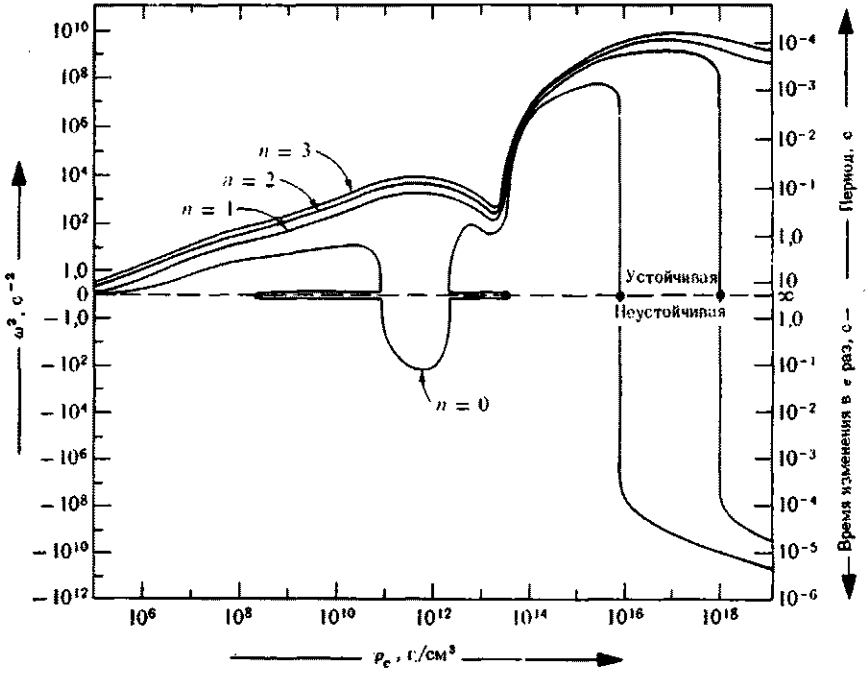
$$\omega^2 = \text{экстремальное значение} \left\{ \frac{\int_0^R (P\zeta'^2 - Q\zeta^2)\, dr}{\int_0^R W\zeta^2\, dr} \right\}, \tag{3}$$

где $\zeta$ изменяется так, что удовлетворяет граничным условиям (2). (Обсуждение эквивалентности между этим вариационным принципом и первоначальной задачей на собственные значения см., например, в § 12.3 книги Мэтьюса и Уолкера [344].)

Абсолютный минимум выражения (3) дает квадрат частоты основной моды пульсаций. Если он отрицателен, то звезда неустойчива ($e^{-i\omega t}$ экспоненциально растет со временем). Если он положителен, то звезда устойчива относительно адиабатических радиальных возмущений. Следовательно, поскольку знаменатель выражения (3) положительно определенный,

$$\left[\begin{array}{l}\text{устойчивость}\\ \text{относительно}\\ \text{адиабатических ра-}\\ \text{диальных возмущений}\end{array}\right] \leftrightarrow \left[\int_0^R (P\zeta'^2 - Q\zeta^2)\,dr > 0 \text{ для всех функций } \zeta, \text{ удовлетворяющих (2)}\right]. \quad (4)$$

Путем численного решения уравнения (1) на собственные значения были определены частоты пульсаций для широкого класса моделей нейтронных и сверхмассивных звезд. *Пример*: На приведенной здесь фигуре нанесена частота пульсаций




как функция плотности в центре для наинизших четырех нормальных мод моделей Гаррисона — Вакано — Уилера в конечной точке звездной эволюции. (Проведите детальное сравнение с фиг. 24.2.) Эти кривые основаны на расчетах Мельтцера и Торна [345] с учетом [262] поправок для основной моды массивных белых карликов.

## § 26.6. КРАТКАЯ СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ

**Резюме теории звездных пульсаций**

Если на начальное смещение жидкости $\xi\ (t = 0,\ r)$ наложить граничные условия (26.22), тогда последующую эволюцию смещения $\xi\ (t,\ r)$ можно вычислить, интегрируя динамическое уравнение (26.19), а зная $\xi\ (t,\ r)$, можно найти выражения для давления, плотности и возмущений метрики из уравнений (26.9), (26.11), (26.15) и (26.16) на начальные значения.

Некоторые важные следствия этих результатов рассмотрены в дополнениях 26.1 и 26.2.

---

УПРАЖНЕНИЕ

### 26.1. Увлечение инерциальных систем отсчета медленно вращающейся звездой

Жидкая сфера очень медленно вращается. Проанализируйте вращение сферы, используя теорию возмущений и принимая во внимание только эффекты и члены, *линейные* по угловой скорости вращения. [*Указания*:

1. Центробежные силы имеют второй порядок по угловой скорости. Следовательно, в первом порядке звезда не деформируется, распределения ее плотности и давления остаются сферическими и невозмущенными.

2. Покажите, используя аргументы, связанные с симметрией и обращением времени, что можно ввести координаты, в которых

$$ds^2 = -e^{2\Phi}\,dt^2 + e^{2\Lambda}\,dr^2 + r^2\,[d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2] - \\ - 2\,(r^2\sin^2\theta)\,\omega\,d\phi\,dt, \tag{26.23}$$

где

$$\Phi = \Phi\,(r), \quad \Lambda = \Lambda\,(r) \quad \text{и} \quad \omega = \omega\,(r,\ \theta). \tag{26.24}$$

Покажите, что в первом порядке по угловой скорости $\Phi = \Phi_0$ и $\Lambda = \Lambda_0$ (возмущения отсутствуют!).

3. Примите следующее точное определение угловой скорости $\Omega\ (r,\ \theta)$:

$$\Omega \equiv u^\phi/u^t = (d\phi/dt)_{\substack{\text{движение с} \\ \text{жидкостью}}} \tag{26.25}$$

Предполагая, что $u^r = u^\theta = 0$ (т. е. что вращение происходит в направлении $\phi$), вычислите 4-скорость жидкости.

4. Используя эйнштейновские уравнения поля, выведите дифференциальное уравнение для возмущения метрики $\omega$ как функции угловой скорости $\Omega$.

5. Решите полученное дифференциальное уравнение вне звезды в элементарных функциях и выразите решение для $\omega\ (r,\ \theta)$ через полный момент импульса $\boldsymbol{S}$, измеренный удаленными гироскопами (см. гл. 19). Первоначальные рассмотрения этой проблемы и связанных с ней вопросов можно найти в работах [180, 349—355].

---

## Дополнение 26.2. КРИТИЧЕСКИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ АДИАБАТЫ ДЛЯ ПОЧТИ НЬЮТОНОВСКИХ ЗВЕЗД

### А. Полностью ньютоновские звезды

1. Для синусоидально пульсирующей ньютоновской звезды $\xi = \xi(r)\, e^{-i\omega t}$ динамическое уравнение (26.19) сводится к уравнению

$$[\Gamma_1 p_o r(\xi/r)']' + 3(\Gamma_1 p_o \xi/r)' - 4p_o'\xi/r + \omega^2 \rho_o \xi = 0. \tag{1}$$

2. Если по всей звезде $\Gamma_1 = {}^4/_3$, то физически приемлемое решение [решение, удовлетворяющее граничным условиям (26.22)] для основной моды колебаний (мода с наинизшим значением $\omega^2$) имеет вид

$$\omega^2 = 0, \quad \xi = \varepsilon r, \quad \varepsilon = \text{const}. \tag{2}$$

Таким образом, для $\Gamma_1 = {}^4/_3$ основная мода «нейтрально устойчива» и имеет «гомологичную» функцию смещения, не зависящую от уравнения состояния или строения звезды.

3. Если допустить, что $\Gamma_1$ зависит от $r$, причем незначительно отличается от ${}^4/_3$, то тогда смещение $\xi(r)$ будет иметь форму, незначительно отличающуюся от гомологичной:

$$\xi = \varepsilon r\,[1 + \text{зависящие от } r \text{ поправки порядка } (\Gamma_1 - {}^4/_3)].$$

Следовательно, если в вариационном принципе дополнения 26.1 в качестве пробной функции использовать гомологичное выражение $\xi = \varepsilon r$, то получим $\omega^2$ с точностью $O[(\Gamma_1 - {}^4/_3)^2]$. (Напомним, что ошибки первого порядка в пробной функции приводят в вариационном выражении к погрешностям второго порядка.) В ньютоновском пределе с гомологической пробной функцией вариационное выражение [формула (3) дополнения 26.1] принимает вид

$$\omega^2 = (3\overline{\Gamma}_1 - 4)\frac{\int_0^R 3p_o r^2\, dr}{\int_0^R \rho_o r^4\, dr} + O[(3\overline{\Gamma}_1 - 4)^2], \tag{3}$$

где $\overline{\Gamma}_1$ — усредненный по давлению показатель адиабаты

$$\overline{\Gamma}_1 = \frac{\int_0^R \Gamma_1 p_o 4\pi r^2\, dr}{\int_0^R p_o 4\pi r^2\, dr}. \tag{4}$$

Используя ньютоновскую вириальную теорему для непульсирующей звезды [формула (39.21б) или упражнение 23.7], можно преобразовать выражение (3) к виду

$$\omega^2 = (3\overline{\Gamma}_1 - 4)\,|\,\Omega\,|/I, \tag{5}$$

где $\Omega$ — гравитационная энергия звезды, а $I = \int (\rho_o r^2) 4\pi r^2 dr$ — след второго момента распределения массы (см. дополнение 24.2 и упражнение 39.6).

## Б. Почти ньютоновские звезды

1. Если учесть релятивистские поправки первого порядка (поправки порядка $M/R$), но игнорировать поправки высшего порядка, то вариационное выражение [формула (3) дополнения 26.1] можно переписать в виде

$$\omega^2 = \frac{\int_0^R p_0 [\Gamma_1 r^4 \eta'^2 + (3\Gamma_1 - 4)(r^3\eta^2)'](1 + \Lambda_0 + 3\Phi_0)\,dr - \int_0^R F_0 \eta^2\,dr}{\int_0^R \rho_0 r^4 (1 + 3\Lambda_0 + \Phi_0 + p_0/\rho_0)\,\eta^2\,dr}, \tag{6}$$

где

$$F_0 \equiv 8\pi r^4 p_0 \rho_0 + 8 r m_0 p_0 + \rho_0 m_0^2, \quad \eta = \zeta/r^3 = (\xi/r)(1 - \Phi_0), \tag{7}$$

а $m_0(r)$ — равновесная масса, содержащаяся внутри радиуса $r$.

2. Для релятивистской звезды с поправкой $\Gamma_1 - {}^4/_3$ порядка $M/R$ и $M/R \ll 1$ гомологичная пробная функция $\xi = \varepsilon r$ будет еще очень точной. Такой же точной и удобной для работы будет функция $\xi = \varepsilon r e^{\Phi_0} \approx \varepsilon r (1 + \Phi_0)$, которая соответствует $\eta = \varepsilon = \text{const}$. Относительные ошибки в пробной функции будут порядка $M/r$, а ошибки в вариационном выражении $\omega^2$ будут порядка $(M/R)^2$. Подставляя эту пробную функцию в вариационное выражение (6) и удерживая только релятивистские поправки порядка $M/R$, получаем

$$\omega^2 = 3(\bar{\Gamma}_1 - \Gamma_{1\,\text{крит}})\,|\Omega|/I. \tag{8}$$

Здесь $\bar{\Gamma}_1$ — усредненный по давлению показатель адиабаты, а критическое значение показателя адиабаты $\Gamma_{1\,\text{крит}}$ равно

$$\Gamma_{1\,\text{крит}} = \frac{4}{3} + \alpha M/R, \tag{9}$$

где $\alpha$ — положительная постоянная порядка единицы, которая определяется формулой

$$\alpha = \frac{1}{3}\frac{R}{M|\Omega|}\int_0^R \left(3\rho_0 \frac{m_0^2}{r^2} + 4p_0 \frac{m_0}{r}\right) 4\pi r^2\,dr. \tag{10}$$

Выражение (8) для частоты пульсации и выражение (9) для показателя адиабаты играют важную роль в теории сверхмассивных звезд (§ 24.4).

3. Об альтернативных выводах вышеприведенного результата см. [278, 279, 300, 346—348].

ЧАСТЬ VI

# ВСЕЛЕННАЯ

*Здесь читатель, охваченный радостью после покорения звезд, пытается установить господство над всей Вселенной и становится в тупик перед непостижимой тайной — Начальной Сингулярностью*

# 27. ИДЕАЛИЗОВАННЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ [1]

*С моей точки зрения, без использования принципов общей теории относительности невозможно достичь теоретическим путем каких-либо, хоть в какой-то мере надежных, результатов в области космологии.*

АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН, 1949 г.[2]

## § 27.1. ОДНОРОДНОСТЬ И ИЗОТРОПИЯ ВСЕЛЕННОЙ

**Вселенная: мелкомасштабные конденсации на фоне крупномасштабной однородности**

Астрономические наблюдения показывают, что в больших масштабах $\sim 10^8$ и более световых лет Вселенная однородна и изотропна. В малых масштабах $\sim 1$ св. год, $\sim 10^6$ св. лет и $3 \cdot 10^7$ св. лет наблюдается конденсация вещества соответственно в звезды, галактики и скопления галактик. В больших масштабах не наблюдается заметного различия между элементарным объемом Вселенной со стороной порядка $10^8$ св. лет, центр которого находится на Земле, и элементарными объемами такого же размера, локализованными где-нибудь в другом месте.

Простейшая космологическая модель, кратко изложенная в дополнении 27.1, рассматривается как первое приближение с крупномасштабной точки зрения; мелкомасштабная структура появляется во втором приближении как возмущение гладкого крупномасштабного фона. В данной главе подробно рассматривается крупномасштабное однородное приближение. Гл. 28 посвящена таким мелкомасштабным явлениям, как первичное образование элементов и конденсация галактик из первичной плазмы при расширении Вселенной. В гл. 29 обсуждается наблюдательная космология.

**Свидетельства в пользу крупномасштабной однородности и изотропии Вселенной**

В пользу крупномасштабной однородности и изотропии Вселенной свидетельствуют следующие данные наблюдений.

1. Распределение галактик на небе и распределение их видимых величин и красных смещений (см., например, [356—359] и статьи,

[1] Подробное освещение вопросов, которые рассматриваются в гл. 27—30, читатель может найти в монографии Зельдовича и Новикова [238], где изложена теоретическая космология и дан обзор важнейших наблюдательных данных.— *Прим. ред.*

[2] Из ответа на критику, помещенного в книге [90], стр. 684.

указывающие на «иерархические» отклонения от однородности, которые цитирует и критикует Сэндейдж [358]).

2. Изотропное распределение радиоисточников на небе (см., например, [360, 361]).

3. Замечательная изотропия космического микроволнового излучения (см., например, [362]). Обзор большинства данных наблюдений можно найти в гл. 2 книги Пиблса [363].

## Дополнение 27.1. КОСМОЛОГИЯ ВКРАТЦЕ

*Однородная плотность.* Предположим, что звезды и атомы рассеяны, подобно пыли, по небу с постоянной эффективной средней плотностью массы-энергии $\rho$.

*Однородная и изотропная геометрия.* Предположим также, что кривизна пространства-времени везде одинакова.

*Замкнутость.* Примем, что термин «геометрическая теория тяготения Эйнштейна» включает в себя не только уравнение поля $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$, но также и граничное условие замкнутости, наложенное на любое решение этого уравнения [1]).

| Сферы выбранной размерности | Сферы можно наглядно представить себе погруженными в евклидово пространство на единицу большей размерности* | Преобразование от декартовых координат к полярным | Метрика на $S^n$, записанная в полярных координатах |
|---|---|---|---|
| $S^1$ | $x^2+y^2=a^2$ | $x=a\cos\phi$<br>$y=a\sin\phi$ | $ds^2=a^2d\phi^2$ |
| $S^2$ | $x^2+y^2+z^2=a^2$ | $x=a\sin\theta\cos\phi$<br>$y=a\sin\theta\sin\phi$<br>$z=a\cos\theta$ | $ds^2=a^2\,(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)$ |
| $S^3$ | $x^2+y^2+z^2+w^2=a^2$ | $x=a\sin\chi\sin\theta\cos\phi$<br>$y=a\sin\chi\sin\theta\sin\phi$<br>$z=a\sin\chi\cos\theta$<br>$w=a\cos\theta$ | $ds^2=a^2\,[d\chi^2+\sin^2\chi\,(d\theta^2+$<br>$+\sin^2\theta d\phi^2)]$ |

* Выход за пределы сферы физически бессмыслен и запрещен. Лишнее измерение добавлено не для того, чтобы помочь путешественнику в путешествии, а для того, чтобы помочь разуму в размышлении. Оно не имеет никакого отношения ко времени.

*Трехмерная сфера* удовлетворяет трем требованиям — однородности, изотропии и замкнутости — и представляет собой естественное обобщение метрики на окружности и двумерной сфере.

[1]) «Так, например, мы можем выдвинуть следующие аргументы против концепции пространственно-бесконечной Вселенной в пользу концепции пространственно-ограниченной Вселенной.

1. С точки зрения теории относительности условие замкнутости поверхности намного проще соответствующего граничного условия на бесконечности Вселенной с квазиевклидовой структурой.

2. В первом приближении уравнения теории относительности содержат в себе идею Маха о том, что инерция зависит от взаимодействия тел... Но идея Маха соответствует только конечной, ограниченной в пространстве Вселенной и не согласуется с квазиевклидовой бесконечной Вселенной» (из работы [10], стр. 107, 108).

Многие, работающие в области космологии, скептически относятся к эйнштейновскому граничному условию замкнутости Вселенной и не изменят своего мнения до тех пор, пока астрономические наблюдения не подтвердят это условие.

*Геометрия пространства-времени* описывается метрикой

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]. \qquad (1)$$

Динамика геометрии полностью известна, если известен радиус $a$ как функция времени $t$.

*Уравнение поля Эйнштейна* (удвоенное для удобства) $2\mathbf{G} = 16\pi\mathbf{T}$ полностью исчерпывается его $\hat{0}\hat{0}$ (или $\hat{t}\hat{t}$)-компонентой

$$\frac{6}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{6}{a^2} = 16\pi\rho \qquad (2)$$

уравнение (5а) дополнения 14.5]. Эта компонента эйнштейновского уравнения, подобно компоненте $\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho$ уравнений Максвелла, представляет собой основное уравнение. Оно описано в курсе 2 в гл. 21 как «уравнение для начальных значений» геометродинамики. Двум членам в левой части уравнения (2) даны специальные названия: «второй инвариант внешней кривизны пространственноподобного сечения» 4-геометрии (показывающий, насколько быстро растягиваются со временем все линейные размеры) и «внутренняя кривизна» или «скалярный инвариант трехмерной кривизны ${}^{(3)}R$ пространственноподобного сечения» (здесь 3-сфера), взятый в данный момент времени.

*Масса-энергия во Вселенной* изменяется со временем в соответствии с работой, производимой давлением при расширении

$$d\left[\begin{pmatrix}\text{плотность}\\ \text{массы-энергии}\end{pmatrix} \times (\text{объем})\right] = -(\text{давление})\,d\,(\text{объем}). \qquad (3)$$

Давление излучения на сегодняшний момент пренебрежимо мало по сравнению с плотностью массы-энергии, поэтому правой частью уравнения (3) («производимая работа») можно пренебречь. Оценки показывают, что это было справедливо и в прошлом вплоть до момента, когда линейные размеры были приблизительно в 1000 раз меньше современных. В течение этой фазы расширения Вселенной преобладает вещество, и произведение

$$(\text{плотность массы-энергии}) \times (\text{объем})$$

остается постоянным:

$$\rho \cdot 2\pi^2 a^3 = M. \qquad (4)$$

Буквой $M$ здесь обозначена величина, похожая на массу вещества, ее даже можно назвать массой; однако вновь следует напомнить (см. § 19.4), что понятие полной массы-энергии замкнутой Вселенной абсолютно не имеет какого бы то ни было разумно определенного значения по крайней мере потому, что вне Вселенной нет «платформы», стоя на которой, можно было бы измерить ее притяжение, определяя периоды кеплеровских орбит или любым другим образом. Более удобна, чем $M$, и более важна в последующем величина $a_{\text{макс}}$ («радиус Вселенной в фазе максимального расширения»), определяемая формулой

$$a_{\text{макс}} = 4M/3\pi. \qquad (5)$$

*Основную компоненту эйнштейновского уравнения поля* можно выразить через $a_{\text{макс}}$:

$$\frac{6}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{6}{a^2} = \frac{6a_{\text{макс}}}{a^3},$$

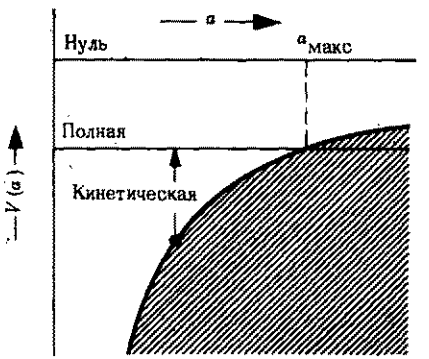
или

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{a_{\text{макс}}}{a} = -1. \tag{6}$$

В уравнении (6) первый член качественно подобен «кинетической энергии» в элементарной задаче ньютоновской механики, а второй член — «потенциальной энергии»

$$V(a) = -\frac{a_{\text{макс}}}{a},$$

определяемой ньютоновской силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния (см. фиг. 1). По аналогии мы отождествим «—1» в правой стороне уравнения (6) с полной энергией в ньютоновской задаче. Качественный характер динамики следует из рассмотрения фиг. 1. Значения радиуса Вселенной $a$, превышающие $a_{\text{макс}}$, невозможны. Если бы $a$ превысило $a_{\text{макс}}$, то «потенциальная энергия» превысила бы полную «энергию», а «кинетическая энергия» расширения стала бы отрицательной, что невозможно. Следовательно, геометродинамическая система никогда не может расшириться до размеров, превышающих $a = a_{\text{макс}}$. Стартуя из состояния с малым $a$ ($a \ll a_{\text{макс}}$) и расширяясь, Вселенная имеет для каждого значения $a$ совершенно определенное значение $da/dt$. По мере расширения скорость расширения $da/dt$ уменьшается и в точке поворота $a = a_{\text{макс}}$ обращается в нуль, после чего система начинает сжиматься.




ФИГ. 1.

*Отсутствие свободы выбора* — поразительная особенность динамики Вселенной. Если мы задались определенным количеством вещества [определенное значение $M$ в формуле (5)], то в нашем распоряжении нет никакого свободного параметра. Величина $a_{\text{макс}}$ однозначно определяется только имеющимся количеством вещества. В отличие от традиционной задачи ньютоновской механики здесь нет «свободно выбираемого параметра энергии». Там, где этот параметр мог появиться в уравнении (6), стоит фиксированное число «—1». Эта фиксация является решающей особенностью замкнутой системы. Если бы мы рассматривали груду камней в пространстве, то у нас был бы выбор в отношении количества динамита, которое следует поместить в их центр. При небольшом заряде взрывчатого вещества камни отлетели бы только на ограниченное расстояние, прежде чем тяготение остановило бы их и заставило вновь собраться вместе. При большей движущей силе они бы разлетелись со скоростью выше параболической и никогда бы не вернулись. Однако при наложении эйнштейновского условия замкнутости такой выбор отсутствует: если замкнуто, то навсегда. Коллапс Вселенной универсален. Это вкратце и есть простая космология.

*Эйнштейн был глубоко несчастен*, получив этот результат. В то время, когда он создал общую теорию относительности, постоянство Вселенной было неизменным пунктом веры в западной философии: «Небеса длятся из вечности в вечность». Вдобавок, соображения, которые привели Эйнштейна к определенному уравнению,

не позволяли естественным образом изменить это уравнение или его фантастическое предсказание. Поэтому Эйнштейн [103] почти против своей воли ввел наименее неестественное изменение, которое можно было представить себе — так называемый космологический член (§ 27.11); основное назначение последнего — избежать расширения Вселенной. 10 лет спустя Хаббл [364] обнаружил предсказанное расширение. Вследствие этого Эйнштейн отказался от космологического члена назвав его «самой грубой ошибкой своей жизни» [1]). Так завершился первый большой цикл кажущегося противоречия общей теории относительности, проверки и драматической реабилитации. Проникнем ли мы в тайну мироздания? Нет более вдохновляющего свидетельства того, что в один прекрасный день ответом на этот вопрос будет «да», чем способность человека предсказать правильно, предсказать против всех ожиданий такое фантастическое явление как расширение Вселенной.

*«Ньютоновская космология»* содержит в себе «уравнение энергии», аналогичное уравнению эйнштейновской космологии, но не способна дать какое-либо ясное или решающее доказательство замкнутости Вселенной или наличия единственной постоянной «—1». В ньютоновской космологии рассматривается масса в любой элементарной сферической области пространства с мгновенным радиусом $r$, а гравитационное ускорение пробной частицы на границе этой сферы, направленное к центру сферы, дается выражением

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{(\text{масса})}{(\text{расстояние})^2} = -\frac{(4\pi/3)\,\rho r^3}{r^2} = -\frac{4\pi\rho}{3}\,r. \tag{7}$$

Предположим, что такие воображаемые сферы различных радиусов с одним и тем же центром проведены в космологической среде. Заметим, что увеличение радиуса в 2 раза, удваивает и ускорение. Эта пропорциональность между ускорением и расстоянием совместима с однородным замедлением расширения Вселенной. Поэтому определим параметр расширения $a^*$ как отношение радиуса любой одной из этих сфер в данный момент и радиуса той же сферы в некоторый отправной момент времени; таким образом, отношение $a^* = r/r_0$ следует считать независящим от выбора рассматриваемой сферы. Запишем $\rho = \rho_0 r_0^3/r^3$, где $\rho_0$ — плотность в отправной момент времени. Подставим это выражение для $\rho$ в уравнение замедления (7), умножим обе стороны этого уравнения на $dr/dt$, проинтегрируем и перейдем от получившегося уравнения для $dr/dt$ к уравнению для $da^*/dt$. В результате имеем

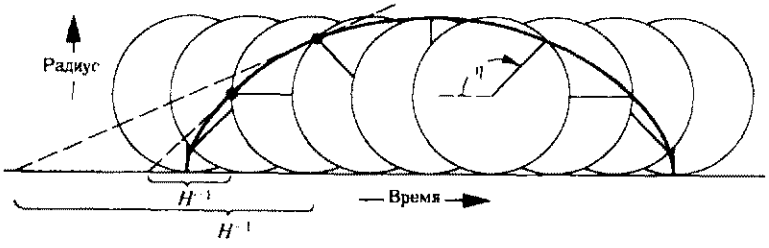
$$\left(\frac{da^*}{dt}\right)^2 - \frac{(8\pi\rho_0/3)}{a^*} = \text{const} \tag{8}$$

в согласии с уравнением (6), за исключением 1) тривиальных различий, которые проистекают из-за того, что $a^*$ — безразмерное отношение, характеризующее расширение, тогда как $a$ — абсолютный радиус с размерностью см, и 2) особенно важного различия, заключающегося в том, что здесь постоянная произвольна, тогда как в классической эйнштейновской геометродинамике она имеет единственное каноническое значение «—1». Дополнительно о ньютоновском понимании космологии см., в частности, [365].

*Задача о свободном падении* частицы по направлению к ньютоновскому центру притяжения, согласно ньютоновской механике, приводит к уравнению энергии,

[1]) Цитата взята из книги Гамова [426].

аналогичному уравнению (6), за исключением того, что «радиус Вселенной» $a$ заменяется на расстояние $r$ от центра притяжения. Решение этой задачи о свободном падении описывается циклоидой (фиг. 2; см. фиг. 25.3 и дополнение 25.4),




ФИГ. 2.

возникающей в результате качения окружности диаметром $a_{\text{макс}}$ по линии при постоянно увеличивающемся угле $\eta$

$$a = \frac{1}{2} a_{\text{макс}} (1 - \cos \eta),$$
$$t = \frac{1}{2} a_{\text{макс}} (\eta - \sin \eta). \tag{9}$$

*Непосредственно наблюдаема* сегодня современная скорость расширения Вселенной, причем каждое расстояние увеличивается со скоростью, прямо пропорциональной величине этого расстояния [1])

$$\frac{\left(\begin{array}{c}\text{скорость удаления}\\ \text{галактики}\end{array}\right)}{(\text{расстояние до галактики})} = (\text{«постоянная» Хаббла } H_o) \sim 55 \text{ км/(с·Мпс)} =$$
$$= \frac{1}{18 \cdot 10^9 \text{ лет}}, \text{ или } \frac{1}{1{,}7 \cdot 10^{28} \text{ см}} = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{скорость увеличения самого}\\ \text{радиуса Вселенной}\end{array}\right)}{(\text{радиус Вселенной})} = \frac{da/dt}{a}. \tag{10}$$

*Предсказанное хаббловское время* $H_o^{-1} \sim 18 \cdot 10^9$ лет (линейно экстраполированное назад к нулю расстояние при постоянной наблюдаемой сегодня скорости расширения, как это проиллюстрировано на фиг. 2) в 1,5 раза или более (дополнение 27.3) превышает действительное время от начала расширения, полученное на основании данных о скорости эволюции звезд ($\sim 10 \cdot 10^9$ лет). Такого удовлетворительного согласия между теорией и наблюдениями не существовало в 40-х годах. Использовавшаяся тогда шкала расстояний между галактиками

[1]) Предсказанное значение $H_o$ не зависит от выбора галактики, поскольку несущественны локальные движения и различие между современной скоростью удаления и скоростью удаления в момент испускания света. Последнее условие хорошо выполняется для достаточно близких галактик, для которых можно провести необходимые измерения расстояния, так как они имеют красные смещения лишь порядка $z \sim 0{,}1$ и меньше (небольшой интервал времени между испусканием света и его приемом на Земле, отсюда небольшое изменение скорости удаления между моментом испускания и сегодняшним моментом; более полное рассмотрение см. в § 29.3 и дополнении 29.4).

была более чем в 5 раз короче современной. Расхождение проистекало из-за ошибочного отождествления цефеид и областей H II, которые использовались в качестве стандартов интенсивности при решении вопроса о расстояниях до удаленных галактик. Линейно экстраполированное к началу расширения время

$$(\text{хаббловское время}) = \frac{(\text{современное расстояние})}{(\text{современная скорость удаления})}$$

было соответственно короче принятого на сегодня времени более чем в 5 раз. Получалось, что хаббловское время составляло лишь $3 \cdot 10^9$ лет. Это число с очевидностью нарушает неравенство

$$\begin{pmatrix}\text{хаббловское время}\\ \sim 3\cdot 10^9 \text{ лет}\end{pmatrix} \geqslant 1{,}5 \begin{pmatrix}\sim 10\cdot 10^9 \text{ лет; действительное время от начала расширения}\end{pmatrix}.$$

Последнее означает, что кривая зависимости размеров от времени загибается не вниз, как на фиг. 2, а вверх. На тех же основаниях было предложено считать действительную кривую экспоненциально растущей. Так началась эпоха «теорий непрерывного рождения материи», выходящих за рамки классической эйнштейновской геометродинамики. Эта эпоха закончилась, когда сначала Бааде [366, 367] понял различие между I и II классами звездных населений и в результате правильно отождествил цефеиды и когда Сэндейдж [368] обнаружил, что Хаббл ошибочно отождествил H II области в удаленных галактиках с яркими звездами. После этого была надежно установлена шкала галактических расстояний. Так закончился второй большой цикл кажущегося противоречия общей теории относительности, проверки и драматической реабилитации.

*Тайна «скрытого вещества»* характеризует третий цикл сомнения и проверки с еще не найденным окончательным решением. Из уравнения (2) следует, что если эйнштейновское граничное условие замкнутости правильно, то плотность массы-энергии должна превышать определенный нижний предел

$$\rho \geqslant \rho_H = \frac{3}{8\pi} H_o^2 \tag{11}$$

(«критическое количество массы-энергии, требуемое для замыкания геометрии Вселенной»). Подставляя в (11) хаббловскую скорость расширения $H_o = 55$ км/(с·Мпс), находим нижний предел плотности:

$$\rho_H = \frac{3}{8\pi} \frac{1}{(1{,}7\cdot 10^{28}\text{ см})^2} \quad \text{или} \quad \rho_{H_{\text{обычн}}} = 5\cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3; \tag{12}$$

эту величину плотности сравнивают с плотностью $\rho \sim 2\cdot 10^{-31}$ г/см$^3$ «светящегося вещества», наблюдаемого в галактиках (§ 29.6), причем скрытое вещество следует искать сегодня в пространстве между галактиками.

*При более полном рассмотрении космологии* мы имеем дело с условиями в прошлом, когда красные смещения были меньше в 10 000 раз или более современных смещений и размеры меньше в 10 000 раз современных размеров и когда нельзя было пренебречь излучением, причем оно даже преобладало (§ 27.10). Мы также имеем дело с условиями на еще более ранних стадиях, когда, возможно, преобладали (гл. 30) анизотропные осцилляции геометрии Вселенной как целого (похожие на трансформации сигары в блин и обратно). Иначе говоря, нам необходимо рассмотреть эволюцию Вселенной к современному состоянию (гл. 28), современное состояние

и последующую эволюцию Вселенной (гл. 29). В данной главе до § 27.11 исследуются основные предположения, лежащие в основе очерченной таким образом простой, классической космологии, а в § 27.11 рассматривается, какого рода качественные изменения возникают при ослаблении того или иного из этих предположений.

**Оставшаяся часть данной главы, за исключением дополнения 27.4, относится к курсу 2.**

**Перед чтением ее не нужно изучать какой-либо наложенный ранее материал из курса 2, однако она сама необходима как подготовительный материал к гл. 29 (Современное состояние и будущая эволюция Вселенной).**

## § 27.2. ЭНЕРГИЯ-ИМПУЛЬС МАТЕРИИ ВСЕЛЕННОЙ — ПРИБЛИЖЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

**Рассмотрение вещества Вселенной как идеальной жидкости, («жидкости, состоящей из галактик»)**

С крупномасштабной точки зрения галактики можно рассматривать как «частицы газа», заполняющего Вселенную. Внутреннее строение «частиц» (звезд, шаровых скоплений и т. д.) не принимают в расчет. Мелкомасштабные скопления «частиц» (скопления галактик размером $\lesssim 3 \cdot 10^7$ св. лет) также не принимают в расчет. Для упрощения вычислений не учитывают даже специфическую природу «газа» (хотя при желании ее можно учесть, воспользовавшись кинетической теорией; о кинетической теории см. § 22.6, приложение ее к космологии см. в работе [369]), которая оказывается несущественной в приближении идеальной жидкости. Поэтому газ характеризуется 4-скоростью $\mathbf{u}$ (*4-скорость* наблюдателя, в окрестности которого галактики в среднем неподвижны), *плотностью массы-энергии* $\rho$ (сглаженная плотность массы-энергии в системе отсчета, движущейся с 4-скоростью $\mathbf{u}$; она представляет собой сумму массы покоя и кинетической энергии галактик в единичном объеме, деленную на объем) и *давлением* $p$ (кинетическое давление галактик). Тензор энергии-импульса для этой «жидкости, состоящей из галактик» хорошо известен:

$$\mathbf{T} = (\rho + p)\,\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{g}p, \tag{27.1}$$

где $\mathbf{g}$ — метрический тензор.

**Физические условия в больших масштабах современной Вселенной:**

Астрономические наблюдения показывают, что плотность массы покоя галактик намного больше плотности их кинетической энергии. Типичные относительные скорости галактик и звезд в галактиках составляют

$$\langle v \rangle \approx 200 \text{ км/с} \sim 10^{-3}. \tag{27.2}$$

**1) кинетическая энергия и давление звезд в галактике**

Следовательно, отношение плотности кинетической энергии и отношение давления к плотности массы покоя имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{кин}}/\rho_{\text{м.п}} &= \frac{1}{2}\langle v^2 \rangle \approx 10^{-6}, \\ p/\rho_{\text{м.п}} &= \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle \approx 10^{-6}. \end{aligned} \tag{27.3}$$

По крайней мере таковы эти отношения сегодня. В очень ранний период эволюции Вселенной условия были совершенно иными.

Полная плотность массы-энергии $\rho$, таким образом, очень близка к плотности массы покоя галактик $\rho_{м.\,п}$. Для современной плотности $\rho_{м.\,п}$ астрономические наблюдения дают

2) плотность массы в галактиках

$$\rho_{м.\,п} \geqslant 2 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3 \qquad (27.4)$$

(см. § 29.6).

Не все вещество во Вселенной связано в галактики; часть вещества находится в виде космических лучей со средней плотностью массы-энергии

3) плотность космических лучей

$$\rho_{к.\,л} \leqslant 10^{-33} \text{ г/см}^3, \qquad (27.5)$$

а часть, возможно, в виде межгалактического газа с плотностью

4) плотность межгалактического газа

$$\rho_{м.\,г} \leqslant 10^{-28} \text{ г/см}^3. \qquad (27.6)$$

(Определение более точного значения $\rho_{м.\,г}$ — одна из наиболее важных задач современного космологического исследования. Обзор этого вопроса по состоянию на 1971 г. см. в книге [363] стр. 56—120 [1]).) Эти вклады в плотность массы и соответствующие давления можно смешать вместе с галактиками в «космологическую жидкость» с тензором энергии-импульса (27.1).

Не вся энергия (и напряжения) во Вселенной существует в виде вещества. Имеются также магнитные поля, средняя плотность энергии которых почти определенно не превышает предела

5) плотность энергии магнитных полей

$$\rho_{магн} \leqslant 10^{-35} \text{ г/см}^3 \qquad (27.7)$$

(соответствующего $B_{ср} \leqslant 10^{-6}$ Гс), и излучение (электромагнитное излучение, нейтринное излучение и, возможно, гравитационное излучение), суммарный вклад которого оценивается как

6) плотность излучения

$$\rho_{изл} \approx 10^{-33} \text{ г/см}^3. \qquad (27.8)$$

Магнитные поля в этой главе не будут приниматься в расчет; они несущественны для крупномасштабной космологии, за исключением, возможно, периода вблизи «начала большого взрыва» Вселенной, если они тогда существовали. Однако излучение играет решающую роль, и его нельзя не учитывать.

Космическое микроволновое излучение

Бо́льшую часть в плотность излучения вносит «космическое микроволновое излучение», которое было открыто Пензиасом и Уилсоном [370] (см. также [371]) и затем широко исследовалось (см. обзор Патриджа [372]). Имеются очень сильные свидетельства в пользу того, что космическое микроволновое излучение является остатком взрывного начала Вселенной. Здесь будет принята эта интерпретация.

Космическое микроволновое излучение имеет как раз такую форму, которую следует ожидать, если заключить Землю в коробку («чернотельная полость») с температурой 2,7 К. Излучение изотропно [362] и имеет планковский спектр с этой температурой.

[1]) См. также книгу [238].— *Прим. ред.*

Следовательно, давление и плотность излучения связаны формулой

$$\rho_{\text{микроволн}} = 3p_{\text{микроволн}} = aT^4 = 4 \cdot 10^{-34} \text{ г/см}^3. \qquad (27.9)$$

Термодинамические соображения (§ 27.10) показывают, что Вселенная должна быть заполнена нейтринным излучением и, возможно, гравитационным излучением, которые имеют планковский спектр с приблизительно той же самой температурой (~3К). Однако на современном уровне наблюдательной техники такое излучение обнаружить нельзя.

С высокой точностью ($\lesssim$300 км/с) средняя система отсчета, относительно которой покоится космическое микроволновое излучение вблизи Земли, совпадает со средней системой отсчета, относительно которой покоятся галактики в окрестности Земли [362]. Следовательно, излучение наряду с веществом можно включить в идеализированную космологическую жидкость.

**Резюме жидкостного описания вещества во Вселенной**

*Резюме*: С крупномасштабной точки зрения энергию и напряжения Вселенной можно рассматривать как энергию и напряжения идеальной жидкости с 4-скоростью $\mathbf{u}$, плотностью массы-энергии $\rho$, давлением $p$ и тензором энергии-импульса

$$\mathbf{T} = (\rho + p)\,\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbf{g}. \qquad (27.10)$$

4-скорость $\mathbf{u}$ в данном событии $\mathcal{P}$ пространства-времени равна 4-скорости галактик в окрестности $\mathcal{P}$, а также 4-скорости, с которой следует двигаться, чтобы измерять изотропную интенсивность космического микроволнового излучения. Плотность $\rho$ состоит из плотности вещества (масса покоя плюс пренебрежимо малая кинетическая энергия галактик, масса покоя плюс кинетическая энергия космических лучей, масса покоя плюс тепловая энергия межгалактического газа, «размазанные» по единичному объему) и плотности излучения (электромагнитное, нейтринное и гравитационное излучения). Давление $p$, подобно плотности $\rho$, создается как веществом, так и излучением. Современное давление вещества намного меньше, чем плотность вещества

$$p_{\text{вещества}} \ll \rho_{\text{вещества}} \text{ сегодня}. \qquad (27.11a)$$

Однако это сильное неравенство нельзя продолжить в прошлое. Давление излучения всегда составляет 1/3 от плотности излучения

$$p_{\text{излучения}} = \frac{1}{3}\rho_{\text{излучения}} \text{ всегда}. \qquad (27.11б)$$

## § 27.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОДНОРОДНОСТИ И ИЗОТРОПИИ

В этой главе Вселенная будет считаться *полностью* однородной и изотропной. Такая идеализация налагает сильные ограничения на геометрию пространства-времени и движение космологической жидкости в нем. Чтобы получить эти ограничения, необходимо

прежде всего придать точный математический смысл понятиям **однородности** и **изотропии**.

Однородность означает, грубо говоря, что в данный момент времени Вселенная везде одинакова. Однако исследователь вправе задать критический вопрос: «В данный момент какого времени?»

**Пространственноподобная гиперповерхность как обобщение понятия «момент времени»**

В ньютоновской теории понятие «данный момент времени» имеет однозначный смысл. В специальной теории относительности существует некоторая неоднозначность из-за неуниверсальности одновременности, однако, после того как задана инерциальная система отсчета, это понятие становится точным. В общей теории относительности глобально инерционные системы отсчета отсутствуют (если пространство-время не является плоским), поэтому понятие «данный момент времени» совершенно неоднозначно. Однако его заменяет другое, более общее понятие, понятие трехмерной пространственноподобной гиперповерхности. Эта гиперповерхность может быть привлекательна вследствие естественных симметрий в пространстве-времени. Ее можно выбрать, как угодно или в интересах исследователя. Он может найти, что более удобно изучать пространство-время здесь и там, чем где-нибудь в другом месте и соответственно толкать вперед гиперповерхность («многострелочное время»; драматически новое понятие времени, которое есть часть общей теории относительности). В каждом событии на пространственноподобной гиперповерхности имеется локально лоренцева система отсчета, поверхность одновременности которой локально совпадает с гиперповерхностью. Конечно, 4-скорость этой лоренцевой системы отсчета ортогональна гиперповерхности. Лоренцевы системы отсчета в различных событиях на гиперповерхности не должны сливаться в глобально инерциальную систему отсчета, однако их поверхности одновременности должны образовывать саму пространственноподобную гиперповерхность.

Интуитивная фраза «в данный момент времени» преобразуется в общей теории относительности в точную фразу «на данной пространственноподобной гиперповерхности». Исследователь может пойти дальше и «разрезать» полную пространственноподобную геометрию с помощью «однопараметрического семейства» таких пространственноподобных поверхностей. Он может назвать «временем» параметр, который позволяет отличить одно сечение от следующего. В вычислениях Редже (гл. 42) такое однопараметрическое семейство сечений, проведенных в пространстве-времени, не требуется. Однако «разрезание» необходимо для большинства других практических методов анализа динамики геометрии Вселенной (гл. 21, 30 и 43). Выбор сечения может устранить трудности динамического рассмотрения или просто выявить эти трудности. Если типичная пространственноподобная гиперповерхность, т. е. последовательное сечение, характеризующее момент времени, отличается естественной симметрией, то это может упро-

стить динамическое рассмотрение. Если же она проводится произвольно, то это может привести к усложнениям и мучительным расчетам.

Определение «однородности Вселенной» с помощью пространственноподобных гиперповерхностей

*Однородность Вселенной в таком случае означает, что через каждое событие во Вселенной проходит пространственноподобная «гиперповерхность однородности»* (физические условия в каждом событии на этой гиперповерхности тождественны). В каждом событии на такой гиперповерхности плотность $\rho$, давление $p$ и кривизна пространства-времени должны быть одинаковыми.

Необходимо также точно сформулировать понятие изотропии. Ясно, что Вселенная не может быть изотропной для всех наблюдателей. Например, наблюдатель, путешествующий на космическом луче, частицы которого имеют энергию $10^{20}$ эВ, будет видеть, что вещество Вселенной налетает на него в одном направлении и удаляется от него в противоположном. По-видимому, лишь наблюдатель, который движется с космологической жидкостью, будет видеть все изотропным. Такие наблюдатели и рассматриваются при определении изотропии.

Определение «изотропия Вселенной»

*Изотропия Вселенной означает, что в любом событии наблюдатель, «движущийся с космологической жидкостью», не может отличить с помощью любого локального физического эксперимента одно из направлений в пространстве от другого.*

Изотропия Вселенной в действительности означает и однородность; в этом легко убедиться с помощью элементарного рассуждения (упражнение 27.1).

Изотропия означает, что мировые линии жидкости ортогональны гиперповерхностям однородности

*Изотропия гарантирует, что мировые линии космологической жидкости ортогональны к каждой гиперповерхности однородности.* Это можно представить себе следующим образом. Наблюдатель, «движущийся с жидкостью», может обнаружить посредством физических измерений, на какой гиперповерхности, проходящей через данное событие, условия однородны. Кроме того, он может измерить свою собственную обычную скорость относительно этой гиперповерхности. Если эта обычная скорость отлична от нуля, то наблюдатель в состоянии отличить одно направление в пространстве в покоящейся относительно него системе отсчета от других направлений, что противоречит изотропии. Таким образом, в изотропной Вселенной, где понятие «наблюдатель, движущийся с жидкостью» имеет смысл, каждый такой наблюдатель должен обнаружить, что он покоится относительно гиперповерхности однородности, т. е. его мировая линия ортогональна этой гиперповерхности.

---

УПРАЖНЕНИЕ **27.1. Изотропия означает однородность**

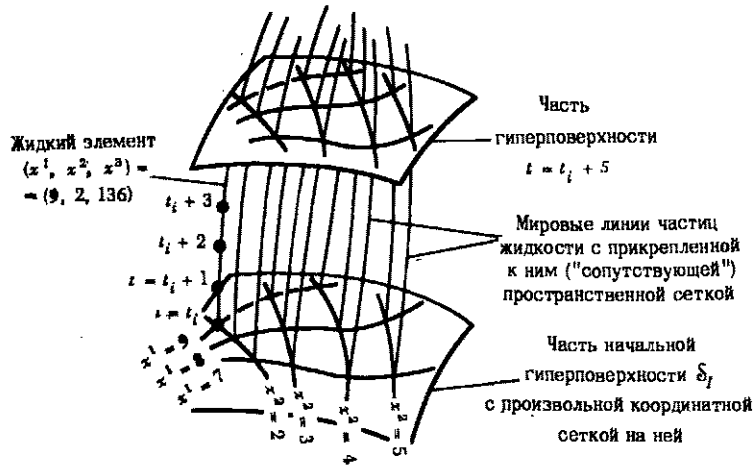
Воспользовавшись элементарными мысленными экспериментами покажите, что изотропия означает однородность.

---

## § 27.4. СОПУТСТВУЮЩИЕ, СИНХРОННЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ДЛЯ ВСЕЛЕННОЙ

Построение «сопутствующей, синхронной» системы координат для Вселенной

Результаты предыдущего параграфа дают возможность установить специальные системы координат в пространственно-временном многообразии изотропной модели Вселенной (фиг. 27.1). Выберем гиперповерхность однородности $\mathscr{S}_I$ и припишем всем событиям на ней координатное время $t_I$. Расположим на $\mathscr{S}_I$ любым желаемым образом сетку пространственных координат




ФИГ. 27.1.
Сопутствующая, синхронная система координат для Вселенной, построенная в § 27.4. Такая система координат имеет следующие ключевые особенности (см. § 27.4 и 27.5):
1. Пространственные координаты движутся с жидкостью, а временная координата — это собственное время вдоль мировой линии жидкости, т. е. данная мировая линия жидкости имеет следующее координатное описание:

$$(x^1, x^2, x^3) = \text{const}, \quad x^0 \equiv t = \tau + \text{const}.$$

($\tau$ — собственное время, измеренное вдоль мировой линии)

2. Любая поверхность постоянного координатного времени является гиперповерхностью однородности Вселенной. Каждая такая гиперповерхность ортогональна мировым линиям всех частиц жидкости.
3. Пространственная сетка на некоторой начальной гиперповерхности $\mathscr{S}_I$ полностью произвольна.
4. Если $\gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j$ — метрика на начальной гиперповерхности как функция произвольных координат ($\gamma_{ij}$ функция $x^1$, $x^2$, $x^3$), тогда метрика пространства-времени в сопутствующей, синхронной системе координат имеет вид

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\, \gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

Таким образом вся динамика геометрии Вселенной заключена в одной функции времени — масштабном множителе $a(t)$, а форма (но не размер) гиперповерхностей однородности характеризуется пространственной 3-метрикой $\gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j$.

$(x^1, x^2, x^3)$ и «распространим» эти координаты за пределы $\mathscr{S}_I$ и по всему пространству-времени при помощи мировых линий космологической жидкости. В частности, припишем каждому событию на данной мировой линии, где происходит пересечение $\mathscr{S}_I$, пространственные координаты $(x^1, x^2, x^3)$. Это приписывание имеет простой смысл. Жидкость всегда покоится относительно пространственных координат. Другими словами, *пространственные координаты являются «сопутствующими»*; они просто отмечают мировые линии жидкости. В качестве временно́й координаты $t$ данного события $\mathscr{P}_I$ используем сумму промежутка собственного времени $\int d\tau$ события $\mathscr{P}$ на $\mathscr{S}_I$, измеренного вдоль мировой линии жидкости, которая проходит через событие $\mathscr{P}$, и времени $t_I$ («стандарта времени» на начальной гиперповерхности $\mathscr{S}_I$); таким образом имеем

$$t(\mathscr{P}) = t_I + \Big(\int_{\mathscr{S}_I}^{\mathscr{P}} d\tau\Big)_{\text{вдоль мировой линии жидкости}}. \tag{27.12}$$

*Поверхности* $t = \text{const}$ *такой системы координат будут совпадать с гиперповерхностями однородности Вселенной.* Это можно видеть, сосредоточив внимание на наблюдениях, выполняемых двумя различными наблюдателями $A$ и $B$, движущимися с жидкостью вдоль различных мировых линий. В момент координатного времени $t_I$ (на $\mathscr{S}_I$) для $B$ и $A$ Вселенная выглядит одинаково. Пусть через некоторый интервал времени $\Delta\tau$, протекший по их часам, $A$ и $B$ вновь выполняют наблюдения. Однородность начальной гиперповерхности $\mathscr{S}_I$ и детерминистическая природа эйнштейновских уравнений поля гарантируют, что $A$ и $B$ вновь обнаружат тождественную физику. (Тождественные начальные условия на $\mathscr{S}_I$ и тождественные промежутки собственного времени, в течение которых уравнения Эйнштейна определяют эволюцию Вселенной вблизи $A$ и $B$, гарантируют тождественные конечные условия.) Поэтому через промежуток времени $\Delta\tau$ $A$ и $B$ вновь располагаются на одной и той же гиперповерхности однородности, хотя и отличной от $\mathscr{S}_I$, где они начали наблюдения. В силу определения координатного времени (27.12) временная координата на пересечении мировой линии наблюдателя $B$ с новой гиперповерхностью равна $t = t_I + \Delta\tau$, и аналогично для $A$. Кроме того, наблюдатели $A$ и $B$ были произвольными. Следовательно, новая гиперповерхность однородности, как и $\mathscr{S}_I$, есть гиперповерхность постоянного координатного времени, что и требовалось доказать.

Поскольку гиперповерхности однородности задаются условием $t = \text{const}$, то базисные векторы $\partial/\partial x^i$ в любом данном событии $\mathscr{P}$ касательны к гиперповерхности однородности, которая проходит через это событие. Временной же базисный вектор $\partial/\partial t$ касателен к мировой линии жидкости, проходящей через $\mathscr{P}$, так как вдоль этой мировой линии $x^i = \text{const}$. Следовательно, ортогональность

мировой линии к гиперповерхности гарантирует ортогональность вектора $\partial/\partial t$ к вектору $\partial/\partial x^i$:

$$(\partial/\partial t)\cdot(\partial/\partial x^i) = 0 \text{ для } i = 1,\ 2,\ 3. \qquad (27.13а)$$

Временная координата имеет другое специальное свойство: она измеряет промежуток собственного времени вдоль мировых линий жидкости. В силу этого и поскольку вектор $\partial/\partial t$ касателен к мировым линиям, можно записать

$$\partial/\partial t = (d/d\tau)_{\text{вдоль мировых линий жидкости}} = \mathbf{u}, \qquad (27.13б)$$

где $\mathbf{u}$ — 4-скорость «космологической жидкости». 4-скорость всегда имеет единичную длину:

$$(\partial/\partial t)\cdot(\partial/\partial t) = -1. \qquad (27.13в)$$

Условия (27.13а) и (27.13в) показывают, что в сопутствующей системе координат [где $g_{\alpha\beta} \equiv (\partial/\partial x^\alpha)\cdot(\partial/\partial x^\beta)$] линейный элемент для пространства-времени принимает вид

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j. \qquad (27.14)$$

Вид линейного элемента в сопутствующей системе координат

Любая система координат, в которой линейный элемент имеет этот вид, должна называться «*синхронной*», поскольку 1) координатное время $t$ в ней измеряет собственное время вдоль линий постоянного $x^i$ (т. е. $g_{tt} = -1$) и 2) поверхности $t = \text{const}$ являются (локально) поверхностями одновременности для наблюдателей, которые движутся с $x^i = \text{const}$ [т. е. $g_{ti} = (\partial/\partial t)\times$ $\times\,(\partial/\partial x^i) = 0$]; она называется также «гауссовой нормальной системой координат» (ср. с фиг. 21.6).

Гиперповерхность однородности $t = \text{const}$ имеет пространственную трехмерную геометрию, описываемую уравнением (27.14) с $dt = 0$:

$$(ds^2)_{\substack{\text{на гиперповерхности}\\ \text{однородности}}} = d\sigma^2 = [g_{ij}]_{t=\text{const}}\, dx^i\, dx^j. \qquad (27.15)$$

Знать все о 3-геометрии на каждой из этих гиперповерхностей значит знать все о геометрии пространства-времени.

---

## 27.2. Синхронная система координат в общем случае

УПРАЖНЕНИЕ

В произвольном пространственно-временном многообразии (не обязательно однородном или изотропном) выберите начальную пространственноподобную гиперповерхность $\mathscr{S}_I$, поместите на ней произвольную координатную сетку, выпустите ортогонально ей геодезические мировые линии и припишите этим мировым линиям координаты

$$(x^1,\ x^2,\ x^3) = \text{const}, \quad x^0 \equiv t \equiv t_I + \tau,$$

**УПРАЖНЕНИЕ**

где $\tau$ — собственное время вдоль мировой линии, начинающееся с $\tau = 0$ на $\mathscr{S}_I$. Покажите, что в этой системе координат метрика принимает синхронный (гауссово нормальный) вид (27.14).

## § 27.5. КОЭФФИЦИЕНТ РАСШИРЕНИЯ

Чтобы определить 3-геометрию, т. е. $d\sigma^2 = g_{ij}(t, x^k)\, dx^i dx^j$, на каждой гиперповерхности однородности, разобьем задачу на две части: 1) природа 3-геометрии на произвольной начальной гиперповерхности (рассматривается в следующем параграфе) и 2) эволюция 3-геометрии со временем, т. е. последовательный переход от начальной гиперповерхности к следующей гиперповерхности и т. д. (рассматривается в этом параграфе).

**Доказательство того, что с точностью до общего «масштабного множителя, учитывающего расширение», все однородные гиперповерхности во Вселенной имеют одинаковую 3-геометрию**

Предположим, что нам известна начальная 3-геометрия, т. е. на начальной гиперповерхности $\mathscr{S}_I$ — в произвольной, но точно выбранной системе координат — известны коэффициенты пространственной части метрики:

$$\gamma_{ij}(x^k) \equiv g_{ij}(t_I, x^k). \tag{27.16}$$

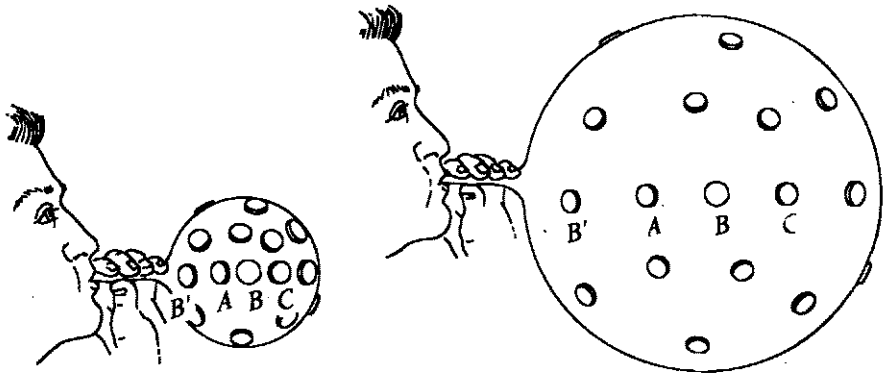
Какой вид будут иметь коэффициенты пространственной части метрики $g_{ik}(t, x^k)$ на другой гиперповерхности однородности? На этот вопрос легко ответить с помощью следующего аргумента. Рассмотрим в космологической жидкости две соседние мировые линии $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ с координатами $(x^1, x^2, x^3)$ и $(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3)$. В момент $t_I$ (на поверхности $\mathscr{S}_I$) они разделены собственным расстоянием

$$\Delta\sigma(t_I) = (\gamma_{ij}\Delta x^i \Delta x^j)^{1/2}. \tag{27.17}$$

В более поздний момент $t$ (на поверхности $\mathscr{S}$) они будут находиться друг от друга на некотором другом собственном расстоянии $\Delta\sigma(t)$. Изотропия пространства-времени гарантирует, что отношение расстояний $\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_I)$ не будет зависеть от направления от $\mathscr{A}$ к $\mathscr{B}$ (сдвиговые движения жидкости отсутствуют). Для любого заданного направления аддитивность малых расстояний гарантирует, что $\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_I)$ не будет зависеть от $\Delta\sigma(t_I)$. Таким образом, отношение $\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_I)$ должно быть одинаковым для всех пар мировых линий вблизи данной мировой линии. Наконец, однородность гарантирует, что это скалярное отношение не будет зависеть от положения на начальной поверхности $\mathscr{S}_I$, т. е. от $x^1$, $x^2$, $x^3$. Обозначим это пространственно постоянное отношение через $a(t)$:

$$a(t) \equiv \Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_I). \tag{27.18}$$

Таким образом, коэффициент $a(t)$ показывает, во сколько раз изменилось расстояние между мировыми линиями за промежуток времени от $t_I$ до $t$. Другими словами, $a(t)$ — это универсальный *«коэффициент расширения»* или *«масштабный множитель»*.




ФИГ. 27.2.
Модель Вселенной в виде раздувающегося шара, покрытого монетами. Каждая монета $A$ может с полным правом считать себя центром расширения, поскольку расстояние от $A$ до любой соседней монеты $B$ или $C$ увеличивается тем сильнее, чем более удаленной была эта монет авначале («хаббловское соотношение»). Сами монеты не расширяются (расстояние между Солнцем и Землей постоянно, не расширяется метровая палка не возрастают атомные размеры). Современное расстояние между галактиками ($\sim 10^6$ св. лет) равно примерно десяти типичным размерам галактик ($\sim 10^5$ св. лет).

Комбинируя равенства (27.17) и (27.18), для интервала между соседними мировыми линиями в момент $t$ получаем

$$\Delta\sigma(t) = a(t)\,[\gamma_{ij}\,(x^k)\,\Delta x^i \Delta x^j]^{1/2}.$$

Это соответствует пространственной метрике

$$d\sigma^2 = a^2(t)\,\gamma_{ij}\,(x^k)\,dx^i dx^j \tag{27.19}$$

в момент $t$ и пространственно-временной метрике

$$ds^2 = -\,dt^2 + a^2\,(t)\,\gamma_{ij}\,(x^k)\,dx^i dx^j. \tag{27.20}$$

Заметим, что коэффициенты $\gamma_{ij}\,(x^k)$ описывают форму не только начальной гиперповерхности, но также и всех других гиперповерхностей однородности. При переходе от одной гиперповерхности к следующей в геометрии изменяется только масштаб расстояний. Все расстояния между точками пространственной сетки (мировыми линиями жидкости) растягиваются в одинаковое число раз $a\,(t)$, оставляя неизменной форму гиперповерхности. Это есть следствие однородности и изотропии и выполняется точно, если только модель Вселенной однородна и изотропна.

Что расширяется и что не расширяется во Вселенной

Студента, впервые сталкивающегося с идеей о «расширяющейся Вселенной», больше всего беспокоит абсурдность этой идеи. Расширяется Вселенная, увеличиваются расстояния между скоплениями галактик, между Солнцем и Землей, растет длина метровой палки, расширяется атом? В каком смысле можно говорить тогда о расширении вообще? Относительно чего расширение? Расширение относительно абсурда! Только позже он понимает, что атом

не расширяется, метровая палка не расширяется, расстояние между Солнцем и Землей не увеличивается. Подвержены расширению лишь расстояния между скоплениями галактик и большие расстояния. Только при таком гигантском масштабе усреднения имеет смысл понятие однородности. Иначе обстоит дело на меньших расстояниях. Истинную ситуацию проще всего проиллюстрировать с помощью резинового воздушного шара, к поверхности которого капельками клея прикреплены монеты. По мере надувания шара (фиг. 27.2) расстояние между монетами возрастает, однако каждая монета в отдельности не увеличивается! (Математические детали см., например, в [373].)

---

УПРАЖНЕНИЕ

**27.3. Произвольность в выборе коэффициента расширения**

Сколько произвола содержится в определении коэффициента расширения $a(t)$? Пусть в давние времена в момент $t_A$ зародилась цивилизация $A$. Для нее коэффициент расширения равен

$$\frac{\left(\begin{array}{l}\text{собственное расстояние между двумя}\\ \text{частицами «космологической жидкости»}\\ \text{в момент } t\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l}\text{собственное расстояние между теми же}\\ \text{двумя частицами в момент } t_A\end{array}\right)} = a_A(t).$$

Затем в момент $t_B$ появилась цивилизация $B$ на планете в соседней галактике. [В этот момент коэффициент расширения $a_A$ имел величину $a_A(t_B)$.] Для цивилизации $B$ коэффициент расширения определяется по отношению к моменту своего возникновения:

$$\frac{\left(\begin{array}{l}\text{собственное расстояние между двумя}\\ \text{частицами «космологической жидкости»}\\ \text{в момент } t\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l}\text{собственное расстояние между теми же}\\ \text{двумя частицами в момент } t_B\end{array}\right)} = a_B(t).$$

В последующих двух событиях $C$ и $D$ (о которых знают обе цивилизации) они приписывают Вселенной в своих расчетах отнюдь не тождественные коэффициенты расширения:

$$a_A(t_C) \neq a_B(t_C),$$
$$a_A(t_D) \neq a_B(t_D).$$

Покажите, что тем не менее относительное расширение модели Вселенной, эволюционирующей от стадии $C$ к стадии $D$, при обоих способах расчета одинаково:

$$\frac{a_A(t_D)}{a_A(t_C)} = \left(\begin{array}{l}\text{относительное}\\ \text{расширение от } C \text{ к } D\end{array}\right) = \frac{a_B(t_D)}{a_B(t_C)}.$$

---

## § 27.6. ВОЗМОЖНЫЕ 3-ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ОДНОРОДНОСТИ

Обратимся теперь к вопросу о 3-геометрии $\gamma_{ij}dx\,dx^j$ для произвольной начальной гиперповерхности $\mathscr{S}_I$. Эта 3-геометрия должна быть однородной и изотропной. Критическое рассмотрение ее трехмерной римановой кривизны должно показать отсутствие «ручек», позволяющих отличить одну точку на $\mathscr{S}_I$ от любой другой точки, или одно направление в данной точке от любого другого направления. Отсутствие «ручек» означает, что трехмерный тензор Римана должен строиться алгебраически из чистых чисел и только из существующих тензоров «без ручек»: 3-метрики $\gamma_{ij}$ и трехмерного тензора Леви-Чивитта $\varepsilon_{ijk}$. (Для всех других тензоров имеются предпочтительные направления или положения.) Одно из возможных выражений для трехмерного тензора Римана имеет вид

Тензор Римана для однородных, изотропных гиперповерхностей

$$^{(3)}R_{ijkl} = K\,(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}); \qquad (27.21)$$

$$K = \text{«параметр кривизны»} = \text{const}.$$

Методом проб и ошибок можно быстро убедиться в том, что это *единственное* выражение, которое, с одной стороны, обладает правильной симметрией тензора кривизны, а с другой стороны, строится только из постоянных $\gamma_{ij}$ и $\varepsilon_{ijk}$. Следовательно, оно должно быть 3-кривизной гиперповерхности $\mathscr{S}_I$. (Говорят, что любое многообразие с тензором кривизны такого вида является многообразием *«постоянной кривизны»*.)

Как можно ожидать, с точностью до преобразований координат метрика на гиперповерхности $\mathscr{S}_I$ полностью определяется видом получающегося из нее тензора кривизны (27.21). (См. упражнение 27.4.) При подходящем выборе координат метрика принимает вид (см. упражнение 27.5)

Метрика для однородных, изотропных гиперповерхностей: три возможности — положительная, нулевая или отрицательная кривизна пространства

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j =$$

$$= \begin{cases} K^{-1}\,[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)], & \text{если } K > 0, \\ d\chi^2 + \chi^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2), & \text{если } K = 0, \\ (-K)^{-1}\,[d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)], & \text{если } K < 0. \end{cases} \qquad (27.22)$$

Внесем коэффициент $K^{-1/2}$ или $(-K)^{-1/2}$ в коэффициент расширения $a\,(t)$ [см. упражнение 27.3] и определим функцию

$$\Sigma \equiv \begin{cases} \sin\chi, & \text{если } k \equiv K/|K| = +1 \quad (\text{«положительная кривизна пространства»}), \\ \chi, & \text{если } k \equiv K = 0 \quad (\text{«нулевая кривизна пространства»}) \\ \operatorname{sh}\chi, & \text{если } k = K/|K| = -1 \quad (\text{«отрицательная кривизна пространства»}). \end{cases} \qquad (27.23)$$

Таким образом, запишем полную геометрию пространства-времени в виде

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,\gamma_{ij}dx^i dx^j,$$
$$\gamma_{ij}dx^i dx^j = d\chi^2 + \Sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{27.24}$$

а 3-кривизны однородных гиперповерхностей — в виде

$${}^{(3)}R_{ijkl} = [k/a^2(t)]\,[\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}]. \tag{27.25а}$$

Параметр кривизны $K$ после такой перенормировки, очевидно, равен

$$K = k/a^2(t). \tag{27.25б}$$

**Смысл нормировки коэффициента расширения**

Уместно ли слово «перенормировка»? Первоначально коэффициент $a(t)$ был масштабным множителем, описывавшим увеличение линейных размеров относительно линейных размеров, взятых в некоторую произвольно выбранную эпоху, причем выбор этой отправной эпохи не имел значения. Теперь же коэффициент $a(t)$ потерял произвольность. Он был нормирован так, чтобы его величина в данном месте и в данный момент времени определяла кривизну пространственноподобной гиперповерхности однородности в данном месте и в данный момент времени. Первоначально коэффициент $a(t)$ считался безразмерным. Теперь он имеет размерность длины. Если кривизна положительна, то эта длина называется «радиус модели Вселенной». Иногда говорят о $a(t)$ как о «радиусе», даже если кривизна отрицательна. Лишь в случае нулевой кривизны нормировка $a(t)$ еще должна сохранить прежний произвол. Поэтому в случае нулевой кривизны в качестве коэффициента выберем $a(t)$ и $\bar{a}(t) = 2a(t)$. Тогда при $\bar{\chi} = \frac{1}{2}\chi$ совершенно независимо для любого из двух выбранных значений можно записать собственные расстояния в трех интересующих направлениях:

$$\begin{pmatrix}\text{собственное расстояние}\\ \text{в направлении увеличения } \chi\end{pmatrix} = a(t)\,d\chi = \bar{a}(t)\,d\bar{\chi},$$

$$\begin{pmatrix}\text{собственное расстояние}\\ \text{в направлении увеличения } \theta\end{pmatrix} = a(t)\,\chi\,d\theta = \bar{a}(t)\,\bar{\chi}\,d\theta,$$

$$\begin{pmatrix}\text{собственное расстояние}\\ \text{в направлении увеличения } \phi\end{pmatrix} = a(t)\,\chi\sin\theta\,d\phi = \bar{a}(t)\,\bar{\chi}\sin\theta\,d\phi.$$

Такая свобода выбора отсутствует в случае искривленной модели Вселенной, поскольку $\chi$ тогда в последних двух выражениях заменяется на функции $\sin\chi$ или $\mathrm{sh}\chi$, которые нелинейны по своему аргументу.

Несмотря на то что в принципе возможно определить абсолютную величину «радиуса» $a(t)$ искривленной Вселенной, современная точность наблюдений не позволяет осуществить это на

практике. Поэтому уместно продолжать рассматривать $a(t)$ как коэффициент относительного расширения, абсолютную величину которого определить трудно, а потому она не должна входить точно ни в одно из уравнений. Это оправдывает способ дальнейшего анализа расширения, при котором в расчетах фигурируют не абсолютные значения $a$, а отношения значений $a$.

В дополнении 27.2 исследуется и разъясняется геометрия гиперповерхности однородности.

---

УПРАЖНЕНИЯ

### 27.4. Однозначность метрики для 3-поверхности постоянной кривизны

Пусть $\gamma_{ij}$ и $\gamma_{i'j'}$ — два набора метрических коэффициентов в системах координат $\{x^i\}$ и $\{x^{i'}\}$, которые имеют римановы тензоры кривизны типа (27.21) [полученные из выражений (8.22) и (8.42)]. Пусть в дополнение к этому известно, что параметры кривизны $K$ и $K'$ равны. Покажите, что $\gamma_{ij}$ и $\gamma_{i'j'}$ связаны координатным преобразованием. (Решение см. в § 8.10 книги Робертсона и Нунана [24] или в § 10 и 27 книги Эйзенхарта [11].)

### 27.5. Метрика для 3-поверхности постоянной кривизны

а. Покажите, что к выражению (27.21) для тензора кривизны приводит следующая метрика:

$$\gamma_{ij} = \left(1 + \tfrac{1}{4} K \delta_{kl} x^k x^l\right)^{-2} \delta_{ij}. \qquad (27.26)\ ^{1})$$

б. Переходя к сферическим координатам $R, \theta, \phi$, а затем к шварцшильдовской радиальной координате ($2\pi r$ — «собственная длина окружности»), преобразуйте метрику (27.26) к виду

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2). \qquad (27.27)$$

в. Найдите дальнейшее изменение радиальной координаты, которое приведет метрику к форме (27.22).

### 27.6. Свойства 3-поверхностей

Проверьте все утверждения, сделанные в дополнении 27.2.

---

[1]) При таком выборе пространственных координат метрика пространства-времени имеет форму

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{\left[1 + \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2}.$$

Ее часто называют *«линейным элементом Робертсона — Уокера»*, так как Робертсон [374, 375] и Уокер [376] первые доказали, что она описывает наиболее общую однородную и изотропную геометрию пространства-времени.

УПРАЖНЕНИЯ

**27.7. Изотропия означает однородность**

Воспользовавшись свернутым тождеством Бианки ${}^{(3)}G^{ik}_{|k} = 0$ (где черточкой указана ковариантная производная, вычисляемая в 3-геометрии), покажите, что 1) ${}^{(3)}\nabla K = 0$ для $K$ из равенства (27.21), а затем покажите, что 2) независимость кривизны от направления [изотропия; кривизна имеет вид (27.21)] означает и требует однородность ($K$ постоянно в пространстве).

---

**Дополнение 27.2. 3-ГЕОМЕТРИЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ОДНОРОДНОСТИ**

**А. Вселенная с положительной кривизной пространства («пространственнозамкнутая Вселенная»)**

Метрика каждой гиперповерхности имеет вид

$$d\sigma^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi \, (d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\phi^2)]. \tag{1}$$

Чтобы представить себе эту 3-геометрию, вообразите, что она погружена в четырехмерное евклидово пространство (такое погружение возможно здесь и невозможно для трехмерного многообразия общего вида; чтобы воссоздать 6 заданных функций $[g_{mn}(\alpha, \beta, \gamma)]$ трех переменных $[\alpha, \beta, \gamma]$, у нас имеется только четыре свободные функции $[w, x, y, z]$ этих трех переменных).

Погружение достигается, если

$$\begin{aligned} w &= a \cos \chi, \quad z = a \sin \chi \cos \theta, \\ x &= a \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \\ y &= a \sin \chi \sin \theta \sin \phi; \end{aligned} \tag{2}$$

отсюда следует, что

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \\ &= a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi \, (d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\phi^2)]. \end{aligned} \tag{3}$$

Из выражений (2) для погруженной поверхности получаем

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \tag{4}$$

т. е. поверхность представляет собой трехмерную сферу в четырехмерном евклидовом пространстве.

Для проверки однородности и изотропии необходимо только заметить, что любую данную точку [любые данные $(w, x, y, z)$ на 3-сфере] и любое заданное направление, проходящее через данную точку, можно переместить в любую другую точку и направление, выполняя вращение в четырехмерном пространстве, в которое происходит погружение, при этом линейный элемент

$$d\sigma^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

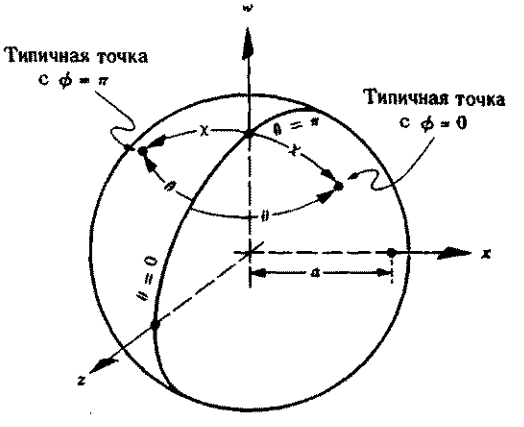
остается неизменным.

Из вышеприведенных равенств и фиг. 1 следует:

1. Двумерные поверхности с заданным $\chi$ (которые на фигуре выглядят как окружности, так как подавлена одна вращательная степень свободы) в действительности являются 2-сферами с площадью поверхности $4\pi a^2 \sin^2\chi$, а $(\theta, \phi)$ представляют собой стандартные сферические координаты на этих 2-сферах.
2. При изменении $\chi$ от 0 до $\pi$ мы движемся наружу от «северного полюса» гиперповерхности через последовательные 2-сферы («оболочки») площадью $4\pi a^2 \sin^2\chi$ (на фигуре 2-сферы выглядят как окружности). Площадь этих оболочек вначале возрастает быстро, а затем с приближением к «экватору» гиперповерхности $\chi = \pi/2$ рост замедляется. За экватором площадь вначале уменьшается медленно, а затем быстрее по мере приближения к «южному полюсу» (при $\chi = \pi$ площадь равна 0).
3. Полная гиперповерхность характеризуется неравенствами

$$0 \leqslant \chi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$$

($\phi$ — циклическая координата; $\phi = 0$ совпадает с $\phi = 2\pi$), а ее 3-объем равен




ФИГ. 1.
Трехмерная поверхность положительной кривизны, погруженная в четырехмерное евклидово пространство. Одна вращательная степень свободы подавлена благодаря тому, что положено $\phi = 0$ и $\pi$ («сечение через полюс», 3-сфера в 4-пространстве выглядит как 2-сфера в 3-пространстве).

$$\mathscr{V} = \int (a\,d\chi)\,(a\sin\chi\,d\theta)\,(a\sin\chi\sin\theta\,d\phi) = \int_0^\pi 4\pi a^2 \sin^2\chi\,(a\,d\chi) = 2\pi^2 a^3. \tag{5}$$

**Б. Вселенная с нулевой кривизной пространства («пространственноплоская Вселенная»)**

Метрика каждой гиперповерхности имеет вид

$$d\sigma^2 = a^2\,[d\chi^2 + \chi^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)]. \tag{6}$$

Это идеально плоское трехмерное евклидово пространство, описанное в сферических координатах. В декартовых координатах

$$\begin{aligned} x &= a\chi\sin\theta\cos\phi, \\ y &= a\chi\sin\theta\sin\phi, \\ z &= a\chi\cos\theta \end{aligned} \tag{7}$$

метрика имеет вид

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{8}$$

Полная гиперповерхность характеризуется неравенствами

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \chi < \infty, \\ 0 &\leqslant \theta \leqslant \pi, \\ 0 &\leqslant \phi \leqslant 2\pi, \end{aligned} \tag{9}$$

а ее объем бесконечен.

### В. Вселенная с отрицательной кривизной пространства («пространственнооткрытая Вселенная»)

Метрика каждой гиперповерхности имеет вид

$$d\sigma^2 = a^2 [d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi \, (d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\phi^2)]. \tag{10}$$

Эту трехмерную геометрию нельзя погрузить в четырехмерное евклидово пространство, однако ее можно погрузить в плоское пространство Минковского

$$d\sigma^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{11}$$

Чтобы выполнить погружение, положим

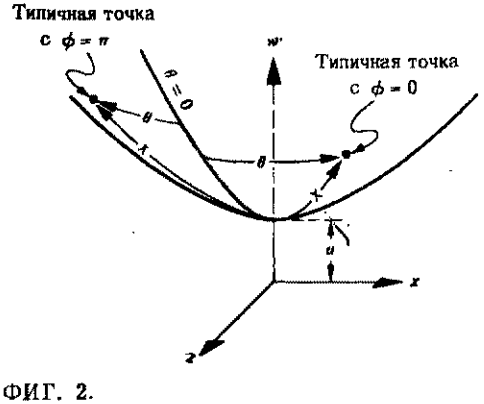
$$\begin{aligned} w &= a \operatorname{ch} \chi, \quad z = a \operatorname{sh} \chi \cos \theta, \\ x &= a \operatorname{sh} \chi \sin \theta \cos \phi, \\ y &= a \operatorname{sh} \chi \sin \theta \sin \phi; \end{aligned} \tag{12}$$

подставим выражения (12) для $w$, $x$, $y$, $z$ в (11); в результате получим (10)

Из выражений (12) для погруженной поверхности находим

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a^2, \tag{13}$$

т. е. поверхность представляет собой трехмерный гиперболоид в четырехмерном пространстве Минковского. (Он имеет такую же форму, как и массовый гиперболоид в импульсном пространстве, см. дополнение 22.5.)




ФИГ. 2.
Трехмерная поверхность отрицательной кривизны, погруженная в четырехмерное пространство Минковского. Одна вращательная степень свободы подавлена благодаря тому, что положено $\phi = 0$ и $\pi$ («сечение через полюс», 3-гиперболоид в 4-пространстве выглядит как 2-гиперболоид в 3-пространстве).

Для проверки однородности и изотропии необходимо только заметить, что любую данную точку на 3-гиперболоиде и любое заданное направление, проходящее через данную точку, можно переместить в любую другую точку и направление, выполняя «преобразования Лоренца» в четырехмерном пространстве Минковского, в которое происходит погружение; при этом линейный элемент

$$d\sigma^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

остается неизменным.

Из вышеприведенных равенств и фиг.2. следует:

1. Двумерные поверхности с заданным $\chi$ (которые на фигуре выглядят как окруж-

ности, так как подавлена одна вращательная степень свободы) в действительности являются 2-сферами с площадью поверхности $4\pi a^2 \operatorname{sh}^2 \chi$, а $(\theta, \phi)$ представляют собой стандартные сферические координаты на этих 2-сферах.

2. При изменении $\chi$ от 0 до $\infty$ мы движемся наружу от (произвольно выбранного) «полюса» гиперповерхности через последовательные 2-сферы («оболочки») с постоянно возрастающей площадью $4\pi a^2 \operatorname{sh}^2 \chi$. Для больших $\chi$ площадь поверхности увеличивается значительно быстрее, чем это было бы в случае плоской гиперповерхности:

$$\frac{(\text{собственная площадь поверхности})}{4\pi\ (\text{собственное расстояние})^2} = \frac{A}{4\pi \ell^2} =$$

$$= \frac{4\pi a^2 \operatorname{sh}^2 \chi}{4\pi a^2 \chi^2} \approx \left(\frac{e^{\ell/a}}{2\,\ell/a}\right)^2 \to \infty. \tag{14}$$

3. Полная гиперповерхность характеризуется неравенствами

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \chi < \infty, \\ 0 &\leqslant \theta \leqslant \pi, \\ 0 &\leqslant \phi \leqslant 2\pi \end{aligned} \tag{15}$$

($\phi$ — циклическая координата; $\phi = 0$ совпадает с $\phi = 2\pi$),

а ее объем бесконечен.

### Г. Неоднозначность топологии

*Предостережение*: Хотя требование однородности и изотропии с точностью до одного свободного выбираемого множителя $K$ полностью определяет локальные геометрические свойства гиперповерхности однородности, оно оставляет неопределенной глобальную топологию гиперповерхности. Выше использовался наиболее прямолинейный выбор топологии. Однако есть и другие возможности.

Произвольность выбора топологии проще всего продемонстрировать для случая плоской гиперповерхности ($k = 0$). Запишем полную пространственно-временную метрику в декартовых координатах в виде

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,[dx^2 + dy^2 + dz^2]. \tag{16}$$

Затем возьмем куб с координатным ребром $L$:

$$0 < x < L, \quad 0 < y < L, \quad 0 < z < L,$$

и отождествим противоположные грани (процесс аналогичен скатыванию листа бумаги в трубку и склеиванию его краев; подробное обсуждение см. в последних трех абзацах § 11.5). Получившаяся геометрия по-прежнему описывается линейным элементом (16), однако все три пространственные координаты теперь, подобно координате $\phi$ в сферической системе координат, являются «циклическими».

Событие $(t, x, y, z)$ совпадает с событием $(t, x + L, y + L, z + L)$.

Однородные гиперповерхности теперь представляют собой «3-торы» конечного объема

$$V = a^3 L^3, .$$

аналогичные 3-торам, которые фигурируют под названием «периодические граничные условия» при рассмотрении электронных и акустических волн в твердых телах и электромагнитных волн в пространстве.

Другой пример: 3-сфера, описанная выше в п. А (случай «положительной кривизны») имеет такую же геометрию, что и многообразие группы вращений $SO(3)$, но другую топологию (см. упражнения 9.12, 9.13, 10.16 и 11.12). Более подробное обсуждение см., например, в [377—379].

## § 27.7. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Завершив рассмотрение отдельной гиперповерхности однородности, вернемся к динамике Вселенной. Исследуем прежде всего эволюцию жидкости, определяемую законом $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$.

Напомним (§ 22.3 и 23.5), что для идеальной жидкости уравнения движения разбиваются на две части. Компонента вдоль 4-скорости, $\mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) = 0$, приводит к первому закону термодинамики:

$$(d/d\tau)\,(\rho V) = -\,p\,(dV/d\tau), \tag{27.28а}$$

где $V$ — объем любого жидкого элемента. Компонента, ортогональная 4-скорости, $(\mathbf{g} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) = 0$, приводит к «уравнению Эйлера»

$$(\rho + p) \times (\text{4-ускорение}) = -\,(\text{компонента } \nabla p, \text{ ортогональная } \mathbf{u}). \tag{27.28б}$$

Для статической звезды (§ 23.5) первый закон термодинамики бессодержателен, однако уравнение Эйлера было решающим. В случае однородной Вселенной справедливо обратное: уравнение Эйлера бессодержательно (нет ускорений), однако первый закон термодинамики является решающим.

**Уравнение Эйлера для однородной Вселенной бессодержательно**

Чтобы убедиться в бессодержательности уравнения Эйлера достаточно заметить, что изотропия гарантирует обращение в нуль обеих сторон уравнения (27.28б). Если бы одна из сторон этого уравнения в каком-либо событии $\mathcal{P}$ была отлична от нуля, то это выделило бы некоторое направление на однородной гиперповерхности в $\mathcal{P}$.

Применяя первый закон термодинамики (27.28а) к космологии, выделим в плотности и давлении вклады, создаваемые веществом и излучением

$$\rho = \rho_{\text{вещ}} + \rho_{\text{изл}}; \quad p = p_{\text{вещ}} + p_{\text{изл}}. \tag{27.29}$$

**«Уравнения состояния» для вещества и излучения**

Обсудим сначала плотность массы-энергии. Современная плотность вещества $\rho_{\text{вещ}}$ ($\geqslant 10^{-31}$ г/см$^3$) значительно превышает плотность излучения $\rho_{\text{изл}}$ ($\sim 10^{-33}$ г/см$^3$). Вещество не всегда преобладало, поэтому нельзя положить $\rho_{\text{изл}} = 0$. Обсудим теперь давление. В эпоху, когда давление во Вселенной было космологически существенно, $p_{\text{изл}}$ значительно превышало $p_{\text{вещ}}$. Следовательно,

во все времена можно пренебречь $p_{\text{вещ}}$ и, воспользовавшись «уравнением состояния» для излучения $p_{\text{изл}} = \frac{1}{3}\rho_{\text{изл}}$, записать

$$\rho = \rho_{\text{вещ}} + \rho_{\text{изл}}; \quad p = \tfrac{1}{3}\rho_{\text{изл}}. \tag{27.30}$$

Подставляя (27.30) в первый закон термодинамики (27.28а), получаем

$$(d/d\tau)(\rho_{\text{вещ}}V) + (d/d\tau)(\rho_{\text{изл}}V) = -\tfrac{1}{3}\rho_{\text{изл}}\frac{dV}{d\tau}. \tag{27.31}$$

Обмен энергией между веществом и излучением пренебрежимо мал

Это уравнение нельзя проинтегрировать до тех пор, пока неизвестно, как перераспределяется масса-энергия между веществом и излучением, т. е. до тех пор, пока не известно другое соотношение между $\rho_{\text{вещ}}V$ и $\rho_{\text{изл}}V$. Все оценки показывают, что, за исключением первых нескольких секунд жизни Вселенной, обмен энергией между излучением и веществом был пренебрежимо мал по сравнению с $\rho_{\text{вещ}}V$ и $\rho_{\text{изл}}V$ в отдельности (см. § 28.1). При этих условиях уравнение (27.31) можно разбить на две части:

Использование первого закона термодинамики для выражения плотностей вещества и излучения через коэффициент расширения

$$(d/d\tau)(\rho_{\text{вещ}}V) = 0 \tag{27.32а}$$

и

$$(d/d\tau)(\rho_{\text{изл}}V) + \tfrac{1}{3}\rho_{\text{изл}}dV/d\tau = 0. \tag{27.32б}$$

Решить эти уравнения не составляет труда:

$$\rho_{\text{вещ}}V = \text{const} \quad \text{(сохранение вещества)} \tag{27.33а}$$

и

$$\rho_{\text{изл}}V^{4/3} = \text{const} = \frac{\rho_{\text{изл}}}{V^{-1/3}}V \quad \text{(постоянство числа фотонов)} \tag{27.33б}$$

↑ с точностью до коэффициента пропорциональности это есть энергия одного фотона $hc/\lambda$

Здесь $V$ — объем любого жидкого элемента. Для жидкого элемента со сторонами $\Delta\chi$, $\Delta\theta$, $\Delta\phi$ он равен

$$V = a^3\Sigma^2\sin\theta\,\Delta\chi\,\Delta\theta\,\Delta\phi,$$

где координаты $\chi$, $\theta$, $\phi$ постоянны вдоль каждой мировой линии жидкости (сопутствующие координаты). Поэтому элемент гиперсферического телесного угла $\Sigma^2\sin\theta\Delta\chi\Delta\theta\Delta\phi$ (или псевдогиперсферического телесного угла в модели открытой Вселенной) для любого жидкого элемента постоянен в течение всего времени. Следовательно, объем жидкого элемента растет прямо пропорционально кубу параметра расширения $a$

$$V/a^3 = \text{const}.$$

Используя этот результат и постоянство $\rho_{\text{вещ}}V$ и $\rho_{\text{изл}}V^{4/3}$, мы видим, что

$$\rho_{\text{вещ}}a^3 = \text{const}, \quad \rho_{\text{изл}}a^4 = \text{const}. \tag{27.34}$$

Пусть $\rho_{\text{вещ.},\,o}$ — современная плотность вещества, $\rho_{\text{изл.},\,o}$ — современная плотность излучения и $a_o$ — современный коэффициент расширения Вселенной. Тогда в любой момент времени в прошлом

$$\rho(t) = \rho_{\text{вещ.},\,o}\frac{a_o^3}{a^3(t)} + \rho_{\text{изл.},\,o}\frac{a_o^4}{a^4(t)} \tag{27.35а}$$

и

$$p(t) = \frac{1}{3}\rho_{\text{изл.},\,o}\frac{a_o^4}{a^4(t)}. \tag{27.35б}$$

Приведенные результаты основаны на двух ключевых утверждениях, справедливость которых будет показана в гл. 28: 1) в эпоху, когда давление было существенно, величина $p_{\text{вещ}}$ была много меньше $p_{\text{изл}}$: 2) обмен массой-энергией между излучением и веществом был всегда пренебрежимо мал (за исключением первых нескольких секунд после «рождения»).

## § 27.8. ЭЙНШТЕЙНОВСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПОЛЯ

Если известна зависимость от времени коэффициента расширения $a(t)$, из равенств (27.35) сразу можно определить эволюцию во времени плотности и давления. В свою очередь плотность и давление с помощью эйнштейновских уравнений поля позволяют установить ход расширения со временем. Таким образом уравнения поля «связаны логической петлей» и дают одну замкнутую математическую систему, из которой определяются все три величины: $a(t)$, $p(t)$ и $\rho(t)$.

Компоненты тензора Эйнштейна для модели Вселенной легко вычисляются, если использовать ортонормальные базисные 1-формы

$$\omega^{\hat{t}} \equiv \mathbf{d}t,\quad \omega^{\hat{\chi}} \equiv a(t)\,\mathbf{d}\chi,\quad \omega^{\hat{\theta}} \equiv a(t)\sum \mathbf{d}\theta,\quad \omega^{\hat{\phi}} \equiv a(t)\sum \sin\theta\,\mathbf{d}\phi. \tag{27.36}$$

**Эйнштейновское уравнение поля для однородной Вселенной:**

В результате [см. уравнения (5) дополнения 14.5]

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = 3\left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2 + \frac{3k}{a^2}, \tag{27.37а}$$

$$G_{\hat{\chi}\hat{\chi}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -2\frac{a_{,tt}}{a} - \left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2}, \tag{27.37б}$$

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0, \quad \text{если } \mu \neq \nu. \tag{27.37в}$$

(Будучи предусмотрительным, можно заблаговременно заметить, что изотропия гарантирует равенство $G_{\hat{\chi}\hat{\chi}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}}$ и аналогичные равенства для тензора Римана, а потому достаточно вычислить компоненту $G_{\hat{\chi}\hat{\chi}}$ как наиболее простую для расчета.)

Базисные 1-формы $\omega^{\hat{t}}$, $\omega^{\hat{\chi}}$, $\omega^{\hat{\theta}}$, $\omega^{\hat{\phi}}$ представляют собой ортонормальный базис, переносимый наблюдателем, движущимся

с «космологической жидкостью». Следовательно, $T_{\hat{t}\hat{t}}$ есть плотность массы-энергии $\rho$, которую измеряет наблюдатель, $T_{\hat{j}\hat{j}}$ — давление $p$; компоненты $T_{\hat{t}\hat{j}}$ исчезают, поскольку отсутствует поток энергии (отсутствует плотность импульса), а $T_{\hat{i}\hat{j}}$ исчезают при $i \neq j$ из-за отсутствия сдвиговых напряжений

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho, \tag{27.38а}$$

$$T_{\hat{x}\hat{x}} = T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = p, \tag{27.38б}$$

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0, \text{ когда } \mu \neq \nu. \tag{27.38в}$$

Приравняем тензор Эйнштейна («момент вращения»), определяемый равенствами (27.37), тензору энергии-импульса, определяемому равенствами (27.38). И если читатель настаивает, включим в уравнения поля так называемый «Λ-член» или «космологический член» («самая грубая ошибка моей жизни») [1]). Таким образом, получим два содержательных уравнения поля. Первое представляет собой «уравнение для начальных значений», связывающее $a_{,t}$ с $a$ и $\rho$ в любой начальный момент времени:

$$\left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \underbrace{\frac{\Lambda}{3}}_{\text{опускают}} + \frac{8\pi}{3}\rho. \tag{27.39а}$$

1) уравнение для начальных значений

Второе представляет собой «динамическое уравнение», которое дает вторую производную по времени от коэффициента расширения и тем самым определяет динамическую эволюцию после начального момента времени

$$2\frac{a_{,tt}}{a} = -\left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} + \underbrace{\Lambda}_{\text{опускают}} - 8\pi p. \tag{27.39б}$$

2) динамическое уравнение

Если уравнения (27.39б) и (27.39а) сравнивать с чем-то из ньютоновской механики, то первое следует сравнить с уравнением для ускорения (уравнение движения), а второе — с первым интегралом уравнения движения, т. е. с уравнением энергии. В соответствии с этим сравнением заметим, что для получения уравнения для ускорения (27.39б) необходимо только продифференцировать (27.39а)и скомбинировать его с соотношением, которому удовлетворяет давление

Почему динамическое уравнение является излишним?

$$(\rho a^3)_{,t} = -p\,(a^3)_{,t}$$

(«закон сохранения энергии»). Поэтому впредь без какой-либо потери информации можно игнорировать «уравнение для ускорения», или «динамическое уравнение» (27.39б), и работать с аналогом уравнения энергии, известным как уравнение для начальных

[1]) Слова Эйнштейна цитируются по книге Гамова [426].

значений» (детали проблемы начальных значений для читателей курса 2 изложены в гл. 21).

Побочные замечания об уравнениях для начальных значений, динамических уравнениях и тождествах Бианки, рассматриваемых в рамках общей геометродинамики

То, что показано здесь в ограниченных рамках фридмановской космологии, рассматривается соответственно в более широких рамках. Закон сохранения энергии плюс одно уравнение поля точно воспроизводят другие уравнения поля. Обратно, исходя из двух уравнений поля, можно вывести закон сохранения энергии в только что сформулированном виде. Таким образом, самому написанию уравнения поля $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$ (или, если настаивать на «космологическом члене»,

$$\mathbf{G} + \Lambda\mathbf{g} = 8\pi\mathbf{T})$$

опускают

способствует и оно основывается на автоматическом обращении в нуль дивергенции $\nabla \cdot \mathbf{G}$ (или обращении в нуль дивергенций $\mathbf{G}$ и $\mathbf{g}$), поскольку с самого начала известно, что энергия и импульс сохраняются, $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$. Неудивительна в таком случае избыточность между законом сохранения $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ и уравнениями поля. Также неудивительно, что в динамике фридмановской Вселенной для получения одной и единственно интересной компоненты $G_{\hat{t}\hat{t}}$ уравнений поля можно использовать одну и единственно интересную компоненту закона сохранения плюс одну и единственно интересную начальную компоненту $G_{\hat{\chi}\hat{\chi}}$ уравнений поля.

Аналогичным образом в более общих задачах при отсутствии симметрии можно всегда исключить *некоторые* из динамических уравнений поля, однако если присутствует гравитационное излучение, то исключить все из этих уравнений становится невозможным. Динамические уравнения поля, которые нельзя исключить даже в принципе, определяют распространение гравитационных волн. В идеально однородной и изотропной космологической модели гравитационные волны отсутствуют; высокая симметрия модели, в частности ее сферическая симметрия (2-сфера!) относительно $\chi = 0$, несовместима с гравитационными волнами.

Вернемся теперь от общей динамики к фридмановской космологии. Для определения временно́й зависимости коэффициента расширения $a$ подставим в уравнение для начальных значений (27.39а) выражение для плотности массы-энергии, задаваемое формулой (27.35а), и получим уравнение, готовое для интегрирования:

Дифференциальное уравнение для коэффициента расширения

$$\left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \underbrace{\frac{\Lambda}{3}}_{\text{опускают}} + \underbrace{\frac{8\pi\rho_{\text{вещ.}\,0}a_0^3/3}{a^3} + \frac{8\pi\rho_{\text{изл.},\,0}a_0^4/3}{a^4}}_{(8\pi/3)\,\rho\,(a)}. \quad (27.40)$$

Проинтегрировав это уравнение для $a = a\,(t)$, возвращаемся к выражениям (27.35а), (27.35б) и (27.24) и получаем $\rho\,(t)$, $p\,(t)$ и геометрию

$$ds^2 = -dt^2 + a^2\,(t)\,[d\chi^2 + \Sigma^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (27.41)$$

и таким образом завершаем решение задачи.

## § 27.9. ВРЕМЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ПОСТОЯННАЯ ХАББЛА

Многие исследователи, начиная с самого Фридмана (1922 г.), внесли свой вклад в рассмотрение этой динамической проблемы. Среди прочих результатов они открыли, что имеется три естественных выбора переменной времени; какой из них наиболее полезен — зависит от рассматриваемого приложения.

Три выбора переменной времени для Вселенной:

Первый выбор — подлинная переменная времени $t$. Эта величина непосредственно представляет собственное время, протекшее с момента начала расширения. Это время образования галактик. Это также время, в течение которого имеет место радиоактивный распад и другие физические процессы.

1) собственное время $t$

Второй выбор — коэффициент расширения $a\,(t)$, который растет со временем, а потому позволяет отличить одну фазу расширения от другой и, следовательно, с полным правом может рассматриваться как параметрическая мера времени. Отношение $a\,(t)$ в два момента времени дает отношение размеров Вселенной (корень кубичный из объема) в эти два момента времени. Оно дает также отношение длин волн $(1+z)$ в эти два момента времени (см. § 29.2). Если известно красное смещение $z$, которое испытало в прошлом излучение, принятое сегодня, то, значит, известно отношение $a\,(t)/a_0$, где $a_0$ — современное значение коэффициента расширения. Характерно, что излучение, принятое с $z = 999$,— это излучение, пришедшее с того момента, когда размеры Вселенной составляли $10^{-3}$ ее современных размеров, а ее объем составлял $10^{-9}$ современного объема. Согласно (27.40), промежуток собственного времени, протекший в течение интервала времени, при котором параметр расширения увеличился от $a$ до $a+da$, равен

2) коэффициент расширения $a$

$$dt = \frac{da}{[-k+(8\pi/3)\,a^2\rho\,(a)+\underbrace{(\Lambda/3)\,a^2}_{\text{опускают}}]^{1/2}}\,. \tag{27.42}$$

Из формулы (27.42) следует, что метрика, выраженная через новый временной параметр $a$, принимает вид [380]

$$ds^2 = \frac{-(da)^2}{-k+(8\pi/3)\,a^2\rho\,(a)+\underbrace{(\Lambda/3)\,a^2}_{\text{опускают}}} + a^2\,[d\chi^2+\Sigma^2\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)]. \tag{27.43}$$

Третий выбор — «параметр дуги» $\eta\,(t)$. В течение интервала времени $dt$ фотон, движущийся по гиперсфере радиусом $a\,(t)$, проходит дугу $d\eta$ (измеренную в радианах)

3) параметр дуги $\eta$

$$d\eta = \frac{dt}{a\,(t)}\,. \tag{27.44}$$

Если рассматривается не закрытая, а открытая модель Вселенной, то можно определить тот же параметр $\eta\,(t)$. Только слова

«гиперсфера» и «дуга» следует заменить на соответствующие слова для плоской гиперповерхности однородности ($k = 0$) или гиперболической гиперповерхности ($k = -1$). Во всех трех случаях «параметр дуги» определяется как интеграл от выражения (27.44), взятый от начала расширения

$$\eta = \int_0^t \frac{dt}{a(t)}, \tag{27.45}$$

поэтому малые значения параметра дуги $\eta$ отвечают ранним временам, а большие значения — более поздним временам от начала расширения. Метрика, выраженная через эту меру времени, принимает вид

$$ds^2 = a^2(\eta)\,[-d\eta^2 + d\chi^2 + \Sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)]. \tag{27.46}$$

Пусть в момент времени $\eta = \eta_1$ с «северного полюса» 3-сферы ($\chi = 0$; любые $\theta$ и $\phi$) испущен фотон. Тогда к моменту времени $\eta = \eta_2$ фотон приходит в новую точку на гиперповерхности и встречается с новым набором частиц «космологической жидкости». Они лежат на гиперполярном угле

$$\chi = \eta_2 - \eta_1.$$

Если на листке бумаги попытаться построить пространственно-временную диаграмму, чтобы показать, что происходит при распространении эффекта во Вселенной от одной точки к другой, то оказывается наиболее удобно выбрать 1) $\chi$ в качестве пространственной координаты (истории жизни отдельных частиц «космологической жидкости», таким образом, представляются отдельными вертикальными линиями) и 2) $\eta$ в качестве координаты времени (так что фотоны описываются линиями с углом наклона $\pm 45°$). Если прослеживать ход нулевых геодезических, то нельзя найти более естественного параметра времени, чем $\eta$. В качестве примера см. трактовку космологического красного смещения, приведенную в § 29.2. Оказывается также, что проще получить аналитически (при $\Lambda$ равном нулю) $a = a(\eta)$ и $t = t(\eta)$, чем получить непосредственно $a$ как функцию времени. Например, размер $a$ и время, измеряемое параметром дуги $\eta$, связаны формулой

$$\eta = \int d\eta = \int \frac{dt}{a(t)} = \int \frac{da}{[-ka^2 + (8\pi/3)a^4\rho(a) + \underbrace{(\Lambda/3)a^4}_{\text{опускают}}]^{1/2}}. \tag{27.47}$$

Зная размер $a$ как функцию этого временного параметра, немедленно получаем само собственное время как функцию этого временного параметра:

$$dt = a(\eta)\, d\eta. \tag{27.48}$$

Уравнение (27.40) для коэффициента расширения и выбор параметров, характеризующих время, позволили достичь определен-

ного этапа в детальном рассмотрении идеализированных космологических моделей и дать ответ на некоторые существенные вопросы: как изменяется со временем характерный геометрический размер $a$ (радиус 3-сферы в случае закрытой модели Вселенной)? Какова геометрия пространства-времени? Как должны распространяться в этой геометрии геодезические, особенно нулевые геодезические? Однако одинаково важны и дополнительные вопросы: замедляется ли расширение Вселенной, а если замедляется, то насколько быстро? Как изменяются со временем плотность и давление вещества и излучения? И наконец, для установления простейшей и наиболее непосредственной связи между теорией и наблюдениями надо ответить на вопрос: какова скорость расширения?

Постоянная Хаббла и хаббловское время

Скорость расширения характеризуется «постоянной Хаббла», т. е. относительной скоростью увеличения расстояний,

$$H \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \tag{27.49}$$

которая обычно оценивается в современный период $H$ (сегодня) $\equiv H_0$, но в принципе определяется как функция времени для каждой фазы истории Вселенной. Обратное значение постоянной Хаббла $H$ носит название «хаббловское время» $H^{-1}$. Эта величина представляет собой время, которое понадобилось бы, чтобы достичь современных расстояний между галактиками, при условии, что они начали расширяться от состояния неограниченного сжатия и в течение всего времени разлета сохраняли современные скорости («время расширения с размерами, линейно экстраполированными к началу расширения»). Для перехода от астрофизических единиц к геометрическим единицам и к годам возьмем в качестве иллюстрации принятое на сегодня значение $H_0 = 55$ км/(с·Мпс) (дополнение 29.4):

$$H_0 = \frac{55 \text{ км/с}}{(299\,793 \text{ км/с})\cdot(3{,}0856\cdot 10^{24} \text{ см, или } 3{,}2615\cdot 10^{6} \text{ лет времени})} =$$

$$= 0{,}59\cdot 10^{-28} \text{ на см времени пролета света,}$$

$$\text{или } 5{,}6\cdot 10^{-11} \text{ относительное расширение за год,} \tag{27.50}$$

$$H_0^{-1} = 1{,}7\cdot 10^{28} \text{ см времени пролета света, или } 18\cdot 10^{9} \text{ лет.}$$

## § 27.10. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ФРИДМАНОВСКАЯ КОСМОЛОГИЯ ЗАМКНУТОЙ ВСЕЛЕННОЙ

Характерные свойства замкнутой Фридмановской Вселенной с $\Lambda = 0$:

Возьмем простейшую космологическую модель — изотропную однородную замкнутую Вселенную с $\Lambda = 0$ — и проследим во всех подробностях за ее характерными свойствами в двух предельных случаях, когда преобладает вещество и когда преобладает излучение. В обоих случаях здесь используется термин

«фридмановская Вселенная», хотя модель, в которой преобладает вещество, прежде называлась фридмановской Вселенной, а модель, в которой преобладает излучение,— Вселенной Толмана. В данном анализе уместно допустить, что переменная $a\,(t)$ представляет собой радиус Вселенной (измеренный в см), поскольку только он дает нам в руки средство для обсуждения всех интересующих геометрических эффектов, в принципе доступных наблюдениям. После этого обсуждения, рассматривая другие модели, вполне достаточно будет перечислить их главные свойства и прокомментировать отличия от данной простой модели, не повторяя полного исследования. Любые обращения к открытой Вселенной или к так называемой «космологической постоянной» и связанным с ней эффектам мы откладываем до краткого заключительного § 27.11. Здесь иногда переменную $a\,(t)$ будем считать лишь параметром относительного расширения, что соответствует рассмотрению областей, простирающихся, скажем, только до $z = 0{,}1$, где еще можно не учитывать глобальных геометрических эффектов.

1) радиус как функция времени

Перепишем компоненту (27.40) эйнштейновского уравнения поля в виде

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi\rho_{\text{вещ.},\,o}a_o^3/3}{a} - \frac{8\pi\rho_{\text{изл.},\,o}a_o^4/3}{a^2} = -1. \qquad (27.51)$$

В зависимости от того, пренебрегают ли в этом уравнении членом, связанным с излучением, или членом, связанным с веществом, уравнение упрощается:

1) преобладает вещество

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{a_{\text{макс}}}{a} = -1, \qquad (27.52а)$$

2) преобладает излучение

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{a^{*2}}{a^2} = -1. \qquad (27.52б)$$

В обоих случаях допускается сравнение с задачей о движении частицы в ньютоновской механике с «полной энергией», равной $-1$ и с «эффективной потенциальной энергией», качественный вид которой показан на фиг. 1 дополнения 27.1, где не учитывались незначительные различия в форме, зависящие от того, изменяется ли потенциал как $-1/a$ или как $-1/a^2$. Основные характерные свойства решения приведены в дополнении 27.3.

2) ранняя эпоха, когда преобладало излучение: типы излучения

Удивительной особенностью ранней эпохи фридмановской Вселенной, когда преобладало излучение является то, что плотность излучения зависит от времени согласно простому универсальному закону

$$\rho_{\text{изл}} = 3/32\,\pi t^2 \qquad (27.53)$$

(последняя строка и последний столбец дополнения 27.3). Это обстоятельство может когда-нибудь обеспечить средство, позволяющее указать, сколько типов излучения внесли вклад в $\rho_{\text{изл}}$

на ранней стадии Вселенной, или, другими словами, получить из наблюдательной космологии сведения о физике поля. Выразим плотность излучения в виде

$$\rho_{\text{изл}}\ (\text{см}^{-2}) = \frac{G}{c^4}\,\rho_{\text{изл., обычн}}\ (\text{эрг/см}^3) = \frac{Gf\pi^2}{c^4 \cdot 120}\,\frac{(kT)^4}{\hbar^3 c^3}. \quad (27.54)$$

Было бы удивительно, если бы единственный вклад в плотность излучения давало электромагнитное излучение, так как имеются следующие дополнительные механизмы, вбирающие в себя тепловую энергию от сильно излучающего источника:

электромагнитное излучение (уже рассмотрено), $f_{\text{электромаг. изл}} = 8$;

гравитационное чернотельное излучение, $f_{\text{грав}} = 8$;

нейтринное и антинейтринное излучение электрон-нейтринного типа (его вклад зависит от химического потенциала нейтрино, о котором см. [381]; здесь предполагается, что химический потенциал нейтрино равен нулю), $f_{e\nu} = 7$;

нейтринное и антинейтринное излучение мюон-нейтринного типа (с теми же самыми предположениями как для $\nu_e$), $f_{\mu\nu} = 7$;

рождение из вакуума пар положительных и отрицательных электронов при температурах порядка $T = mc^2/k = 0{,}59 \cdot 10^{10}$ К и выше, рассчитанное в предположении, что число этих частиц подавляюще велико по сравнению с наблюдаемыми сегодня неспаренными электронами, $f_{e^+e^-} = 14$;

другие частицы типа мезонов, рождающиеся из вакуума, когда температуры на два порядка выше ($\sim 10^{12}$ К), и барион-антибарионные пары, рождающиеся из вакуума при температурах порядка $\sim 10^{13}$ К и выше, $f_{\mu^+\mu^-}, f_{\pi}, \ldots$;

сумма этих $f$-значений, $f$. (27.55)

В ходе расширения, когда температура падает ниже $10^{13}$ К, затем ниже $10^{12}$ К, затем ниже $10^{10}$ К, различные пары частиц, по-видимому, аннигилируют и исчезают (см., однако, [382—385]). Остаются излучения с нулевой массой покоя, и лишь эти излучения вносят вклад в удельную теплоемкость вакуума. Согласно всем современным оценкам на стадиях аннигиляции барионов-антибарионов и электронов-позитронов, тепловое гравитационное излучение, присутствующее там, уже эффективно отделено

от вещества. Поэтому ожидается, что энергия, освободившаяся в результате аннигиляции вещества и антивещества, вливается сначала в два других носителя энергии: нейтринное и электромагнитное излучения. Однако нейтрино также отделяется рано (после аннигиляции барионов и антибарионов; перед полной аннигиляцией электронов и позитронов), поскольку длина свободного пробега нейтрино быстро растет с расширением. Энергия последующих аннигиляций поступает почти исключительно в электромагнитное излучение. Следует ожидать, что температуры трех излучений соотносятся в настоящее время как

$$T_{\text{электромаг. изл}} > T_{\nu} > T_{\text{грав}}. \tag{27.56}$$

Температура $T_{\text{электромаг. изл}}$, согласно измерениям, равна 2,7 К, температура $T_{\nu}$, согласно расчетам, равна $(4/11)^{1/4} \times \times T_{\text{электромаг. изл}} = 2{,}1$ К, температура $T_{\text{грав}}$, вычисленная в модели, в которой гравитоны отделяются на ранней стадии, когда преобладают кварки, равна 1,5 К [386].

Если излучение имело планковский спектр, то после отделения вещества планковский спектр излучения сохраняется (см. дополнение 29.2). При расширении остается постоянным произведение $\rho_{\text{изл., отдел}} a^4$, или произведение $T^4_{\text{изл., отдел}} a^4$. Сравним температуру этого определенного излучения теперь (в момент времени $t_1$) с температурой того же излучения в любой выбранный за начало отсчета момент времени $t_0$ после эпохи отделения этого излучения. Найдем

$$T_{\text{изл., 0}} = \frac{a_1}{a_0} T_{\text{изл., 1}} = (1+z)\, T_{\text{изл., 1}}. \tag{27.57}$$

Здесь $z$ представляет собой красное смещение любой «индикаторной» спектральной линии, испущенной в момент $t_0$ и наблюдаемой сегодня, по отношению к стандартной длине волны того же перехода, наблюдаемого в лаборатории.

Если бы эти три вида излучения можно было привести в состояние термодинамического равновесия, то в космологическую эпоху, когда преобладало излучение, все виды излучения можно было бы рассматривать на одинаковом основании. Можно было бы непосредственно сложить их индивидуальные значения $f$ и получить $f = 8 + 8 + 7 + 7 = 30$. Температура и время были бы в таком случае связаны формулой

$$(T/10^{10}\ \text{К})^2\, (t/1\text{с}) = 1{,}19. \tag{27.58а}$$

Эта формула вместе с (27.57) приводит к соотношению

$$\left[\left(\frac{T_{\text{изл., 1}}}{10^{10}\text{К}}\right)(1+z)\right]^2 \left(\frac{t_0}{1\text{ с}}\right) = 1{,}19. \tag{27.58б}$$

Соотношение (27.58б) относится к двум видам излучения: 1) истинному электромагнитному излучению с планковским спектром (континуум) и 2) «индикаторному излучению» с линейчатым

спектром $z$ — красное смещение линии, испущенной в момент $t_0$. Измеренное отклонение от этого соотношения может служить потенциальным (непрямым) указанием на то, что в соответствии со стандартной теорией нейтрино и гравитационное излучение сегодня холоднее электромагнитного излучения.

3) поздняя эпоха, когда преобладает вещество

Перейдем теперь от космологической эпохи, когда преобладало излучение, к эпохе, когда преобладает вещество. Числа иногда действуют сильнее на воображение, чем формулы. Поэтому, рассматривая космологическую модель, в которой преобладает вещество, произвольно примем, что хаббловское время равно $20 \cdot 10^9$ лет, а действительное время равно $10 \cdot 10^9$ лет, и вернемся к началу расширения. Конечно, последующая работа покажет, что оба эти числа нужно исправить, но, вероятно, как считают лица, занимающиеся экспериментальной космологией, не более чем в два раза. Поскольку любое суждение о лучших значениях этих величин страдает неопределенностью, можно выбрать цифры так, чтобы они были простыми и разумными. Из дополнения 27.3 получаем тогда современное значение параметра дуги $\eta$, характеризующего время,

$$\frac{20 \cdot 10^9 \text{ св. лет}}{10 \cdot 10^9 \text{ св. лет}} = \frac{H^{-1}}{t} = \frac{\frac{a_{\text{макс}}}{2}\frac{(1-\cos\eta)^2}{\sin\eta}}{\frac{a_{\text{макс}}}{2}(\eta - \sin\eta)}, \tag{27.59}$$

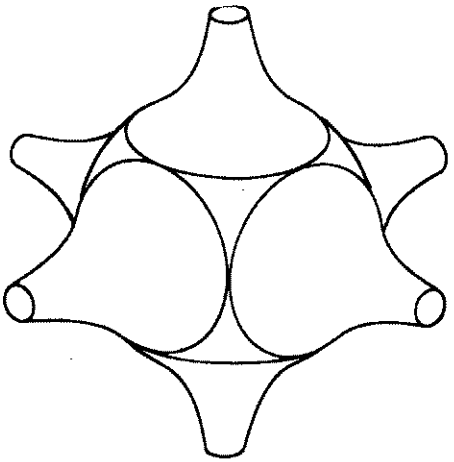
т. е.

$$\eta = 1{,}975 \text{ (или } 113{,}2°) \tag{27.60}$$

($\eta$ — дуга, проходимая фотоном на 3-сфере от начала расширения до сегодняшнего момента). В дополнении 27.4 приведены значения всех других величин, вычисленных по данному параметру $\eta$.

4) «где во время расширения рождается новое пространство?» — бессмысленный вопрос

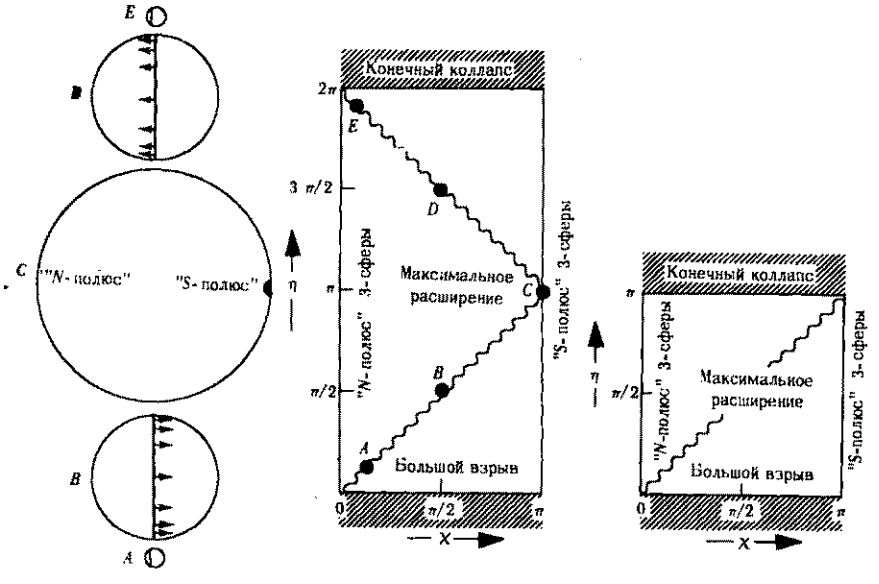
Если каждые 5 с к Вселенной добавляется объем пространства, эквивалентный объему куба со стороной $10^5$ св. лет ($=0{,}95 \cdot 10^{23}$ см), т. е. приблизительно равный объему, занимаемому Млечным Путем, то в каком месте добавляется этот объем? Чем искать ответ, лучше пересмотрим вопрос. Пространство совершенно не похоже на воду. Истечение пресной воды из источника на горном пустынном острове в океане можно обнаружить и измерить, окружив место гидрометрами. В данном случае у нас нет такого измерителя скорости потока, который бы точно определил: «насколько быстро протекает мимо него пространство». Сама идея, что «пространство течет», ошибочна. Нет способа определить поток пространства по крайней мере потому, что отсутствует способ измерения потока пространства. Воды — да, пространства — нет. Показания гидрометра существенно зависят от того, неподвижен ли он или движется относительно воды. Однако для частицы в пустом пространстве физика неразличима независимо от того, покоится ли частица или движется с высокой скоростью по отношению к некоторой выбранной инерциальной системе отсчета. Пытаться ука-



ФИГ. 27.3.
Замкнутая Вселенная, составленная из множества шварцшильдовских зон. Эта Вселенная динамична, поскольку пробная частица на границе раздела между двумя зонами поднимается вопреки гравитационному притяжению каждой зоны, а затем падает под действием гравитационного притяжения каждой зоны. Следовательно, два центра сами должны при движении расходиться, а затем сближаться вновь. Поскольку то же самое справедливо и для всех других пар центров, то отсюда следует, что решетчатая Вселенная сама расширяется и снова сжимается, даже если каждая шварцшильдовская геометрия рассматривается как статическая. Приведенная схема взята из работы Лундквиста и Уилера [308].

зать, где рождаются эти кубические километры пространства,— идея ошибочная, потому что она бессмысленна.

Новую перспективу в рассмотрении расширения и повторного сжатия дает переход от однородной изотропной замкнутой Вселенной к шварцшильдовской решетчатой замкнутой Вселенной [308]. В первом случае предполагается, что масса распределена однородно. В последнем случае масса сконцентрирована в 120 тождественных шварцшильдовских черных дырах. Каждая из черных дыр расположена в центре собственной ячейки додекаэдрической формы, ограниченной 12 гранями, каждая из которых близка по форме к пятиугольнику, а пространство является пустым. Динамику легко проанализировать в приближении, при котором каждая ячейка решетки считается сферической — такого рода рассмотрение давно известно в физике твердого тела как «приближение Вигнера — Зейтца» (см. литературу в [308]). В этом приближении геометрия внутри каждой ячейки решетки считается точно шварцшильдовской (фиг. 27.3); пробная частица, помещенная посредине между черной дырой $A$ и черной дырой $B$, сопротивляется притяжению каждой дыры и в конечном счете падает по направлению к каждой дыре согласно закону, выведенному в гл. 25 [выражение (25.28) со сдвигом на $\pi$ в начальной




ФИГ. 27.4.
Использование «параметра дуги» η в качестве координаты времени и гиперполярного угла χ в качестве пространственной координаты для описания движения фотона (линия $\pm 45°$) во фридмановской Вселенной, в которой преобладает вещество (*б*) или излучение (*в*). Сразу после «большого взрыва» из «*N*-полюса» 3-сферы испущена вспышка фотонов, положение облака фотонов в последующие стадии расширения и сжатия указано с помощью сечений 3-сферы на диаграммах *а*. Фридмановская Вселенная, в которой преобладает вещество, является, по-видимому, разумной моделью физической Вселенной до тех пор, пока размеры не уменьшаются до величины порядка 1/10 000 или меньше от размеров, достигающихся в момент максимального расширения «эпоха преобладания излучения».

точке для определения η]:

$$r = \frac{R}{2}(1 - \cos\eta), \qquad \tau = \frac{R}{2}\left(\frac{R}{2M}\right)^{1/2}(\eta - \sin\eta). \qquad (27.61)$$

Соответственно две рассматриваемые массы должны падать друг на друга, и так будет со всеми массами. Таким путем приходим к заключению, что в решетчатой Вселенной осуществляется тот же самый закон расширения и повторного сжатия, как и во фридмановской Вселенной, с точностью, лучшей 4% (см. [36], стр. 370—381 и [308]). Теперь вновь зададим тот же бессмысленный вопрос: где вливаются во Вселенную кубические километры пространства при ее расширении и где они выливаются при ее сжатии? Разберемся полнее в том, почему бессмыслен этот вопрос. Геометрия вокруг каждого центра масс есть и остается геометрией Шварцшильда (пока в конце концов черные дыры не сблизятся настолько, что сольются). Следовательно, ситуация внутри каждой ячейки

статична. Кроме того, граница раздела между ячейками определяется воображаемым разбрызгиванием пробных частиц, настолько легких, что они не оказывают влияния на ее геометрию или динамику. Имеется гладкий переход от геометрии в одной ячейке к геометрии в следующей ячейке («касание двух геометрий»). Нет ничего ненормального где бы то ни было в пространстве-времени на границе раздела и вблизи нее. Мы не имеем права утверждать, что эти кубические километры «рождаются» здесь или где-нибудь еще. Разговор о «рождении» пространства не корректен, а потому первоначальный вопрос плох. Правильно говорить о динамике геометрии. Это все, что касается одного вопроса!

При графическом изображении динамики геометрии фридмановской Вселенной часто дело упрощается, если в качестве пространственной координаты взять гиперполярный угол $\chi$, измеренный от некоторой мировой линии (движущейся с «космологической жидкостью»), выбранной в качестве стандарта отсчета, а в качестве координаты времени взять параметр дуги $\eta$, как это проиллюстрировано на фиг. 27.4.

5) причинная изоляция различных областей Вселенной друг от друга

При внимательном изучении ($\chi$, $\eta$)-диаграммы становится ясным, что фотоны, испущенные веществом в одной точке, не могут в ограниченное время достичь какого-либо вещества, кроме того, которое расположено в ограниченной части 3-сферы. Согласно дополнению 27.3, за короткое время $t$ фотон может пройти лишь дуговое расстояние на 3-сфере, равное $\eta = (2t/a^*)^{1/2}$. Более того, то, что справедливо для фотонов, справедливо и для других полей, сил, давлений, энергий и воздействий: они не могут выйти за этот предел. Очевидно, в момент времени $t$ 3-сфера разделена на ряд «зон»

$$N = \begin{pmatrix}\text{число}\\ \text{«зон»}\end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix}\text{гиперсферический телесный угол}\\ \text{полной 3-сферы}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{гиперсферический телесный угол}\\ \text{одной зоны}\end{pmatrix}} = \frac{2\pi^2}{4\pi\chi^3/3} = \frac{3\pi}{2^{5/2}}\left(\frac{a^*}{t}\right)^{3/2}, \tag{27.62}$$

не связанных друг с другом. С ходом времени число разделенных зон уменьшается, и в конечном счете каждая частица испытает воздействие со стороны каждой другой частицы в модели Вселенной.

---

УПРАЖНЕНИЯ

### 27.8. Эпоха преобладания вещества и эпоха преобладания излучения во фридмановской космологии

Выведите результаты, перечисленные во втором и третьем столбцах дополнения 27.3, за исключением фокусирующих свойств искривленного пространства.

УПРАЖНЕНИЯ

### 27.9. Переход от эпохи преобладания излучения к эпохе преобладания вещества

Включив оба члена, связанных с излучением и веществом, в уравнение (27.51), переформулируйте его, введя в качестве независимой переменной параметр дуги $\eta$ (с $d\eta = dt/a$); проинтегрировав получившееся уравнение, найдите

$$a = (a_{\text{макс}}/2) - [(a_{\text{макс}}/2)^2 + a^{*2}]^{1/2} \cos(\eta + \delta), \tag{27.63}$$

$$t = (a_{\text{макс}}/2)\,\eta - [(a_{\text{макс}}/2)^2 + a^{*2}]^{1/2} [\sin(\eta + \delta) - \sin\delta], \tag{27.64}$$

где

$$\delta = \operatorname{arc\,tg}\,[a^*/(a_{\text{макс}}/2)]. \tag{27.65}$$

а. Проверьте, что при подходящих условиях соотношение между радиусом и временем в ранний период представляет собой уравнение «окружности», а в более поздний период — уравнение «циклоиды».

б. Припишите $a^{*2}$ значение $a_0 a_{\text{макс}}/10\,000$ (почему?) и постройте кривые зависимости безразмерных мер плотности

$$\lg\left[(8\pi a_{\text{макс}}{}^2/3)\begin{Bmatrix}\rho_{\text{вещ}}\\ \rho_{\text{изл}}\\ \rho_{\text{вещ}}+\rho_{\text{изл}}\end{Bmatrix}\right]$$

от безразмерной меры времени

$$\lg\,(t/a_{\text{макс}}).$$

Какие выводы вытекают из рассмотрения логарифмического наклона этих кривых?

### 27.10. Расширение и повторное сжатие сферического волнового фронта

На «северном полюсе» фридмановской модели Вселенной в эпоху преобладания вещества, когда параметр дуги $\eta = \pi/3$, а радиус Вселенной достиг половины своего максимального значения, произошел взрыв. Фотоны от взрыва разлетаются в виде сферического волнового фронта. Через какое относительное количество «космологической жидкости» проникнет волновой фронт в тот момент, когда собственная площадь поверхности волнового фронта имеет наибольшую величину?

## Дополнение 27.3. РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ФРИДМАНОВСКОЙ ЗАКРЫТОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ В ДВУХ ПРЕДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ: 1) ПРЕОБЛАДАЕТ ВЕЩЕСТВО, А ИЗЛУЧЕНИЕМ МОЖНО ПРЕНЕБРЕЧЬ, 2) ПРЕОБЛАДАЕТ ИЗЛУЧЕНИЕ, А ВЕЩЕСТВОМ МОЖНО ПРЕНЕБРЕЧЬ

| Идеализация динамики 3-сферы | Преобладает вещество | Преобладает излучение |
|---|---|---|
| Когда уместно рассматривать модель? | Начиная от красных смещений $z \sim 10\,000$ до сегодняшнего момента и до фазы максимального расширения и повторного сжатия до размеров, примерно в 10 000 раз меньших современных размеров | Очень ранняя фаза расширения, красные смещения $z \sim 1\,000$ и больше; соответствующая фаза на поздних стадиях сжатия; непосредственно в современный момент модель неуместна |
| Эффективный потенциал в уравнении $\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + V(a) = -1$ | $V(a) = -\frac{a_{\text{макс}}}{a}$ | $V(a) = -\frac{a^{*2}}{a^2}$ |
| Значение постоянной в этом «потенциале», выраженное через условия в некоторую стандартную эпоху | $a_{\text{макс}} = \frac{8\pi}{3} a_0^3 \rho_{\text{вещ.}, o}$ | $a^{*2} = \frac{8\pi}{3} a_0^4 \rho_{\text{изл.}, o}$ |
| Решение динамических уравнений, выраженное через «параметр дуги» $\eta$ (дуговое расстояние на 3-сфере, измеренное в радианах и проходимое фотоном, движущимся с момента начала расширения) | $a = \frac{a_{\text{макс}}}{2}(1 - \cos\eta)$<br>$t = \frac{a_{\text{макс}}}{2}(\eta - \sin\eta)$ | $a = a^* \sin\eta$<br>$t = a^*(1 - \cos\eta)$ |
| Интервал изменения $\eta$ от начала расширения до конца повторного сжатия | $2\pi$ (один обход вокруг Вселенной) | $\pi$ (доходит только до антиподной точки Вселенной) |
| Характер кривой, связывающий радиус $a$ с временем $t$ | Циклоида | Полуокружность |
| Хаббловское время $H^{-1} = \frac{a}{da/dt} = \frac{a}{da/d\eta}$ | $\frac{a_{\text{макс}}}{2}\frac{(1-\cos\eta)^2}{\sin\eta}$ | $a^*\frac{\sin^2\eta}{\cos\eta}$ |
| Соотношение между хаббловским, или «экстраполированным», временем и действительным временем от начала расширения | $H^{-1} \geqslant 1{,}5t$ | $H^{-1} \geqslant 2t$ |

| Идеализация динамики 3-сферы | Преобладает вещество | Преобладает излучение |
|---|---|---|
| Плотность массы-энергии | $\rho_{\text{вещ}} = \dfrac{3}{\pi a^2_{\text{макс}} (1-\cos\eta)^3}$ | $\rho_{\text{изл}} = \dfrac{3}{8\pi a^{*2} \sin^4 \eta}$ |
| Та же плотность, выраженная через хаббловскую скорость расширения | $\rho_{\text{вещ}} = \dfrac{3H^2}{8\pi} \dfrac{2}{1+\cos\eta}$ | $\rho_{\text{изл}} = \dfrac{3H^2}{8\pi} \dfrac{1}{\cos^2 \eta}$ |
| Неравенство, которому удовлетворяет плотность | $\rho_{\text{вещ}} \gg \dfrac{3H^2}{8\pi}$ | $\rho_{\text{изл}} \gg \dfrac{3H^2}{8\pi}$ |
| Анализ увеличения размеров удаленной галактики вследствие кривизны пространства в области от галактики до наблюдателя | § 29.5 и фиг. 29.2 | § 29.5 |
| Предельная форма закона расширения в ранний период | $t = \dfrac{a_{\text{макс}}}{12}\eta^3$; $a = \dfrac{a_{\text{макс}}}{4}\eta^2$; $a = \left(\dfrac{9 a_{\text{макс}} t^2}{4}\right)^{1/3}$ | $t = \dfrac{a^*}{2}\eta^2$; $a = a^*\eta$; $a = (2a^* t)^{1/2}$ |
| Другие особенности расширения в ранний период | $H^{-1} = \dfrac{a_{\text{макс}}}{8}\eta^3 = 1{,}5\, t$; $\rho_{\text{вещ}} = \dfrac{a_{\text{макс}}}{8\pi a^3/3} = \dfrac{1}{6\pi t^2} = \dfrac{3H^2}{8\pi}$ | $H^{-1} = a^*\eta^2 = 2t$; $\rho_{\text{изл}} = 3p_{\text{изл}} = \dfrac{a^{*2}}{8\pi a^4/3} = \dfrac{3}{32\pi t^2} = \dfrac{3H^2}{8\pi}$ |

## Дополнение 27.4. ТИПИЧНАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, СОВМЕСТИМАЯ С АСТРОНОМИЧЕСКИМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ И С ЭЙНШТЕЙНОВСКИМ ПОНИМАНИЕМ КОСМОЛОГИИ ($\Lambda = 0$, ВСЕЛЕННАЯ ЗАМКНУТА)

| | |
|---|---|
| Радиус в фазе максимального расширения | $18{,}94 \cdot 10^9$ св. лет |
| Время от начала расширения до максимума | $29{,}76 \cdot 10^9$ лет |
| Время от начала расширения до конца повторного сжатия | $59{,}52 \cdot 10^9$ лет |
| Время от начала расширения до сегодняшнего момента (принятое значение) | $10 \cdot 10^9$ лет |
| Современный радиус | $13{,}19 \cdot 10^9$ св. лет |
| Хаббловское время сегодня (принятое значение) | $20 \cdot 10^9$ лет |

| | |
|---|---|
| Хаббловская скорость расширения сегодня | 49,0 км/(с·Мпс) |
| Параметр замедления сегодня $q_0$ [формула (29.16)] | 1,7 |
| Современная плотность $(3/8\pi a_0^2)+(3H_0^2/8\pi)$ | $(7,67+3,33)\cdot10^{-58}$ см$^{-2}=11,00\cdot10^{-58}$ см$^{-2}$, или $14,8\cdot10^{-30}$ г/см$^3$ |
| Современный объем $2\pi^2a_0{}^3$ | $38,3\cdot10^{84}$ см$^3$ |
| Плотность в максимуме $(3/8\pi a^2)+(3H^2/8\pi)$ | $(3,70+0,00)\cdot10^{-58}$ см$^{-2}=5,0\cdot10^{-30}$ г/см$^3$ |
| Объем в максимуме | $114\cdot10^{84}$ см$^3$ |
| Современная скорость увеличения радиуса | $13,19\cdot10^9$ св. лет/$20\cdot10^9$ лет$=$ $=0,66$ св. лет/год |
| Современная скорость увеличения объема | $1,82\cdot10^{68}$ см$^3$/с |
| Количество вещества | $5,68\cdot10^{56}$ г |
| Эквивалентное число масс Солнца | $2,86\cdot10^{23}$ |
| Эквивалентное число барионов | $3,39\cdot10^{80}$ |

Следует подчеркнуть, что эти цифры не заслуживают того, чтобы их называть «каноническими», однако для их описания такое прилагательное может быть удобным; в лучшем случае эти цифры можно назвать иллюстративными.

## § 27.11. ОДНОРОДНЫЕ ИЗОТРОПНЫЕ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ, НЕ СОГЛАСУЮЩИЕСЯ С ЭЙНШТЕЙНОВСКИМ ПОНИМАНИЕМ КОСМОЛОГИИ

**Открытая фридмановская Вселенная с $\Lambda = 0$:**

Если заменить замкнутую 3-сферу с радиусом $a$ открытой гиперболической геометрией, формула (27.22), с тем же масштабом длины $a$, то это нарушит эйнштейновское понимание космологии (дополнение 27.1), но не нарушит уравнения его теории. Даже в таком случае результаты дополнения 27.3 остаются применимыми в двух предельных эпохах (когда преобладает изменение и когда определяющую роль играет вещество), если внесены следующие изменения.

**1) коэффициент расширения как функция времени**

1. Постоянная $-1$ в правой стороне аналога «ньютоновского уравнения энергии» изменена на $+1$, таким образом совершается переход от связанной системы (максимум расширения) к открытой системе (вечное расширение).

2. Величина $(1-\cos\eta)$ заменена на $(\operatorname{ch}\eta-1)$, $\sin\eta$ — на $\operatorname{sh}\eta$, $\cos\eta$ — на $\operatorname{ch}\eta$ и $(\eta-\sin\eta)$ — на $(\operatorname{sh}\eta-\eta)$.

3. Область изменения «параметра дуги» $\eta$ простирается теперь от 0 до $\infty$, а кривая, связывающая «радиус» $a$ с временем $t$, превращается из циклоиды или окружности в постоянно растущую кривую.

4. Перечисленные неравенства на хаббловское время (связанное с действительным временем расширения) и плотность (связанную с $3H_0^2/8\pi$) больше не справедливы.

2

2) ранняя стадия та же, что и для замкнутой Вселенной

5. Формулы для условий на ранних стадиях расширения, приведенные в дополнении 27.3, остаются справедливыми по простой причине: при малых временах кривизна пространства-времени «в направлении увеличения времени» [внешняя кривизна $(6/a^2)(da/dt)^2$, см. уравнение (2) дополнения 27.1] значительно превосходит кривизну внутри любой гиперповерхности однородности $\pm 6/a^2$ (внутренняя кривизна), поэтому на ранних стадиях безразлично, имеет ли она знак плюс или минус, открыто или замкнуто пространство, является ли геометрия пространства сферической или гиперболической.

Но почему с физической, а не математической, точки зрения безразлично, является ли пространство на ранних стадиях открытым или закрытым? Потому что фотоны, сигналы, давления, силы и энергии не успевают распространиться настолько далеко, чтобы «обнаружить» различие между замкнутым и открытым пространством. «Зоны влияния» (27.62) слишком малы, чтобы почувствовать или существенно прореагировать на любую разницу между отрицательной пространственной кривизной $-6/a^2$ и положительной пространственной кривизной $+6/a^2$. Поэтому простая степенная зависимость от времени плотности массы-энергии излучения, приведенная в дополнении 27.3 для замкнутой Вселенной, одинаково справедлива на ранних этапах расширения открытой изотропной модели Вселенной в эпоху преобладания излучения:

$$\rho_{\text{изл}} = 3/32\ \pi t^2. \tag{27.66}$$

Только на более поздней стадии расширения, когда «внешняя кривизна» [уравнение (2) дополнения 27.1] $(6/a^2)\ (da/dt)^2$ (первоначально, согласно дополнению 27.3, изменяющаяся как $1{,}5\ t^{-2}$) оказывается величиной того же порядка, что и «внутренняя кривизна» $\pm 6/a^2$ (первоначально изменявшаяся как $\pm 3a^{*-1}t^{-1}$), становится существенным знак внутренней кривизны. Лишь тогда в скорости расширения появляются различия для открытой модели Вселенной и для закрытой.

3) поздняя стадия —вечное расширение

Открытая модель всегда расширяется. Поэтому плотность массы-энергии (пропорциональна ли она $a_{\text{макс}}/a^3$ для модели, в которой преобладает вещество, или пропорциональна $a^{*2}/a^4$ для модели, в которой преобладает излучение, или пропорциональна некоторой комбинации этих зависимостей) 1) в конце концов становится пренебрежимо малой по сравнению с внутренней кривизной $-6/a^2$ и 2) после этого ею можно пренебречь. При таких обстоятельствах единственным членом, уравновешивающим внутреннюю кривизну, является внешняя кривизна. Основная компонента уравнения поля (после сокращения всех членов на общий множитель 3) принимает теперь вид

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{1}{a^2} = 0. \tag{27.67}$$

Для замкнутой Вселенной два члена (1/6 внешней кривизны и 1/6 внутренней кривизны) имеют одинаковый знак и любое урав-

нение типа (27.67) невозможно. Здесь, однако, имеем замечательно простое решение

$$a = t \tag{27.68}$$

и соответствующую метрику

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 [d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\, \chi\, (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \tag{27.69}$$

Запишем

$$\begin{aligned} r &= t\ \mathrm{sh}\ \chi, \\ t_{\text{нов}} &= t\ \mathrm{ch}\ \chi \end{aligned} \tag{27.70}$$

и найдем, что (27.69) — решение эйнштейновского уравнения поля в пустом пространстве, тождественное метрике Минковского — Лоренца плоского пространства-времени

$$ds^2 = -dt_{\text{нов}}^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \tag{27.71}$$

(см. дополнение 27.2, п. В). Эта геометрия приобрела особенность расширяющейся Вселенной, поскольку космологическая жидкость, распределенная слишком разреженно, чтобы оказывать влияние на динамику геометрии, и служащая лишь для получения меченых точек, разлетается во всех направлениях (более подробное обсуждение этой «расширяющейся Вселенной Минковского» см., например в гл. 16 книги Робертсона и Нунана [24]). Типичная пространственноподобная гиперповерхность однородности по виду имеет искривленную трехмерную геометрию и должна иметь искривленную геометрию (внутренняя кривизна), поскольку сечение (27.70) плоского пространства-времени самоискривлено (внешняя кривизна).

**Однородные космологические модели с $\Lambda \neq 0$:**

Обратимся теперь ко второму нарушению эйнштейновского понимания космологии — космологическому члену в уравнении поля (27.39):

**1) уравнение, описывающее эволюцию коэффициента расширения**

$$\left(\frac{da/dt}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi}{3}\rho\,(a) = \frac{8\pi\rho_{\text{вещ.},\,o} a_o^3/3}{a^3} \frac{8\pi\rho_{\text{изл.},\,o} a_o^4/3}{a^4}. \tag{27.72}$$

При анализе смысла этого расширенного уравнения оставим без внимания сам «радиус» $a\ (t)$, на котором мы сосредоточивали интерес в § 27.10, посвященном фридмановской космологической модели. Признаем, что современные измерения пока не дают надежной и прямой трактовки абсолютной величины размера Вселенной $a\ (t)$. Однако они дают надежные цифры для красного смещения $z$, а следовательно, для отношения радиуса $a$ в момент испускания к радиусу $a = a_o$ сегодня

$$a_o/a = 1 + z. \tag{27.73}$$

Для сравнения с наблюдениями, в которых делаются попытки установить пределы $k$ (эйнштейновское значение $k = +1$) и $\Lambda$ (она ожидается равной нулю), предшествующие уравнения следует переписать так, чтобы в них по возможности входили только

2

отношения. Например, (27.72) запишем в виде «обобщенного уравнения Фридмана»:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{a(t)}{a_0}\right)\right]^2 + V(a/a_0) = \frac{k}{a_0^2} \equiv -K_0. \qquad (27.74)$$

Здесь величина

$$V(a/a_0) \equiv -\frac{8\pi}{3}\left[\rho_{\text{вещ.},0}\left(\frac{a_0}{a}\right) + \rho_{\text{изл.},0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right] - \frac{1}{3}\Lambda\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \qquad (27.75)$$

выступает в качестве «эффективного потенциала» для случая динамики расширения. Постоянный член $K_0$ равен 1/6 от современного значения внутренней кривизны модели Вселенной. Взятый со знаком минус ($-K_0$), он играет в обобщенном уравнении Фридмана роль «эффективной энергии» (дополнение 27.5). Все качественные особенности космологической модели можно вывести из вида кривой зависимости эффективного потенциала от $(a/a_0)$ и величины $K_0$.

2) качественные особенности эволюции

Для количественного анализа часто более удобно использовать логарифмическую зависимость (фиг. 27.5), чем непосредственную линейную зависимость $V$ от $(a/a_0)$ из дополнения 27.5.

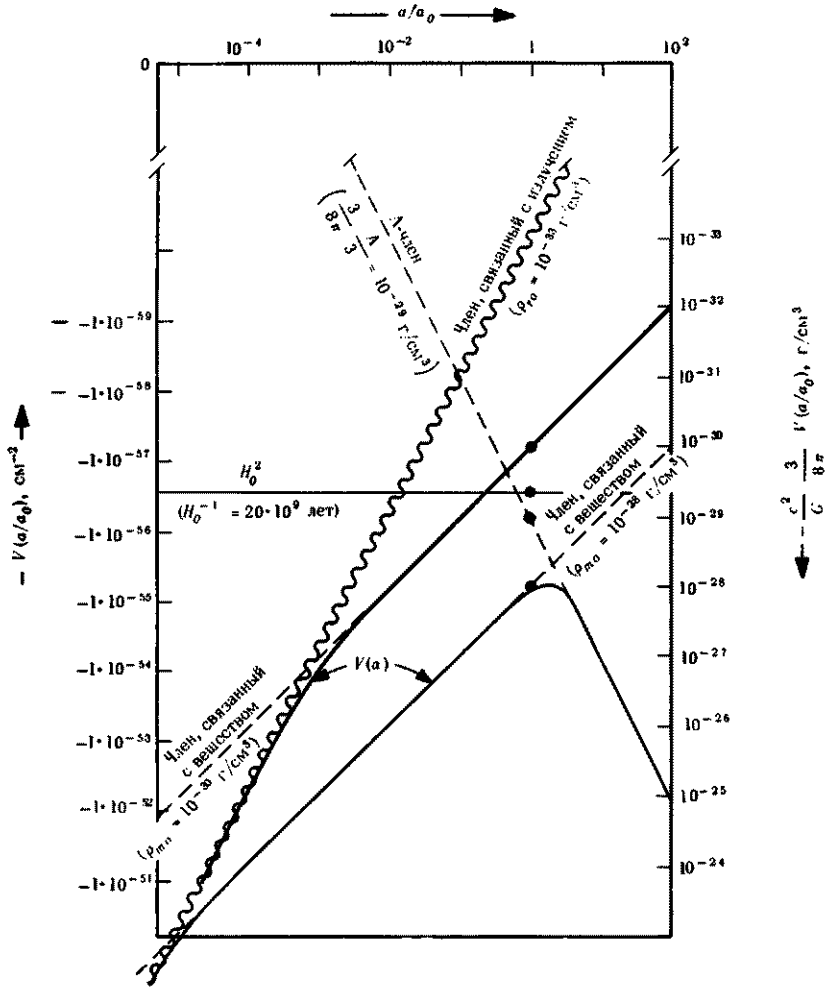
Со всеми предельными особенностями, появляющимися в космологических моделях различных типов, мы уже встречались прежде при рассмотрении элементарной фридмановской космологической модели («большой взрыв» из состояния неограниченного сжатия; достижение максимума расширения в точке поворота или непрерывное расширение к Вселенной Минковского; коллапс в состояние бесконечной плотности), или их можно просто представить себе (статистическая, но не устойчивая Вселенная Эйнштейна; «колебательная» модель; «поворотная» модель), за исключением такого более быстрого расширения, которое имеет место, если величина $\Lambda$ положительна, а размер $a$ превышает определенное критическое значение. При этом расширении $a$ в конечном счете возрастает как $[(\Lambda/3)^{1/2}t]$ безотносительно к тому, открыта или замкнута Вселенная ($k = 0, \pm 1$). Расширение является главной особенностью космологической модели. Следовательно, все другие особенности космологической модели уместно опустить при обсуждении, считать плотность вещества пренебрежимо малой и взять $k = 0$ (гиперповерхности однородности обладают плоской пространственной геометрией). В этом пределе для эйнштейновского уравнения поля с космологической постоянной в пустом пространстве имеем следующее решение:

3) Вселенная де Ситтера

$$ds^2 = -dt^2 + a_0^2 e^{2(\Lambda_0/3)^{1/2}t}\left[d\chi^2 + \chi^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right]. \qquad (27.76)$$

Эту «Вселенную де Ситтера» [387, 388] можно рассматривать как четырехмерную поверхность

$$-(z^0)^2 + (z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2 + (z^4)^2 = 3/\Lambda \qquad (27.77)$$




**ФИГ. 27.5.**
**Зависимость (в логарифмическом масштабе) эффективного потенциала $V(a)$ [формула (27.75) и дополнение 27.5], входящего в обобщенное уравнение Фридмана**

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{a(t)}{a_0}\right)\right]^2 + V\left(\frac{a}{a_0}\right) = -\frac{k}{a_0^2} = -K_0,$$

**от $a/a_0$. По горизонтали отложено относительное расширение $a/a_0$ причем в качестве стандарта для отсчета выбрано $(a/a_0)_{\text{сегодня}} = 1$. По вертикали отложена величина $V(a/a_0)$ в геометрических единицах (в $см^{-2}$). На дополнительной шкале справа отложена (эквивалентная $V$) плотность — $(c^2/G) \times (3/8\pi)V(a/a_0)$, выраженная в $г/см^3$. Волнистая линия на диаграмме — вклад плотности излучения в эффективный потенциал. Она нормирована на величину плотности излучения сегодня $\rho_{r,0} = \rho_{изл.,0} = 10^{-33}\ г/см^3$ и логарифмический наклон этой линии равен 2. Вклад плотности вещества в «эффективный потенциал» имеет логарифмический наклон, равный 1. Выбраны два случая, соот-**

ветствующие сегодняшней плотности вещества $\rho_{то} = \rho_{вещ.,о} = 10^{-30}$ г/см$^3$ и $\rho_{вещ.,о} = 10^{-28}$ г/см$^3$ (пунктирные линии на диаграмме). Полный эффективный потенциал для каждого из этих двух случаев также указан на диаграмме: жирная линия — для $\rho_{вещ.,о} = 10^{-30}$ г/см$^3$ (без учета космологического члена); тонкая линия — для $\rho_{вещ.,о} = 10^{-28}$ г/см$^3$. Во втором случае учтен космологический член с космологической постоянной, определяемой из равенства $(3/8\pi)(\Lambda/3) = 10^{-29}$ г/см$^3$. Линия, описывающая вклад этого члена, имеет отрицательный наклон, равный по величине 2 (пунктирная линия). Горизонтальной линией или «линией уровня» изображена современная величина хаббловской скорости расширения $H_0$, равная $1/(20 \cdot 10^9$ лет). Вертикальное расстояние в логарифмическом масштабе между потенциальной кривой и линией уровня дает отношение $-V/H_0^2$. Это отношение, вычисленное в любой момент времени $t$, имеет величину $\dot{a}^2(t)/\dot{a}_0^2 + K_0 H_0^{-2}$, где $\dot{a} \equiv da/dt$. Вычисленное «сегодня» ($a/a_0 = 1$) это отношение имеет величину $1 + K_0 H_0^{-2}$. Зная современную хаббловскую скорость расширения $H_0^2$ и зная (или подбирая определенный набор параметров) потенциальную кривую, можно получить по известному разбросу между двумя значениями $1 + K_0 H_0^{-2}$, а следовательно, по известной величине $K_0 H_0^{-2}$ и современному значению $K_0$, множитель кривизны.[1] В качестве примера рассмотрим случай Вселенной с низкой плотностью (жирная линия) с «современной» величиной $1 + K_0 H_0^{-2} = 0{,}223$. Откуда следует, что $K_0 = -0{,}777\ H_0^2$ (открытая или гиперболическая Вселенная и, следовательно, $k = -1$ и $a_0 = (k/K_0)^{1/2} = (1/0{,}777)^{1/2}\, 20 \cdot 10^9$ лет $= 22{,}7 \cdot 10^9$ лет. Для модели Вселенной с высокой плотностью с $\rho_{вещ.,о} = 10^{-28}$ г/см$^3$ находим аналогично $1 + K_0 H_0^{-2} = 24{,}5$ и, следовательно, $K_0 = +23{,}5\ H_0^2$, $k = +1$ (замкнутая Вселенная) и $a_0 = (k/K_0)^{1/2} = (1/23{,}5)^{1/2} 20 \cdot 10^9$ лет $= 4{,}12 \cdot 10^9$ лет. Расширение останавливается (если и когда оно останавливается) на той стадии, когда отношение $-V/H_0^2$ между линией потенциала и линией уровня или $\dot{a}^2(t)/\dot{a}_0^2 + K_0 H_0^{-2}$ падает от «современного значения» $1 + K_0 H_0^{-2}$ до величины $0 + K_0 H_0^{-2}$, т. е. от 0,223 до $-0{,}777$ в одном случае и от 24,5 до 23,5 в другом случае. Если $\Lambda < 0$, то график в логарифмическом масштабе следует заменить графиком в линейном масштабе (дополнение 27.5).

в пятимерном пространстве, обладающем метрикой

$$(ds)^2 = -(dz^0)^2 + (dz^1)^2 + (dz^2)^2 + (dz^3)^2 + (dz^4)^2. \qquad (27.78)$$

Корректность такого описания можно проверить непосредственно, сделав подстановки

$$\begin{aligned}
z^0 &= (3/\Lambda)^{1/2} \operatorname{sh}\left[(\Lambda/3)^{1/2} t\right] + \frac{1}{2}\,(\Lambda/3)^{1/2}\, e^{(\Lambda/3)^{1/2} t} a_0^2 \chi^2, \\
z^4 &= (3/\Lambda)^{1/2} \operatorname{ch}\left[(\Lambda/3)^{1/2} t\right] - \frac{1}{2}\,(\Lambda/3)^{1/2}\, e^{(\Lambda/3)^{1/2} t} a_0^2 \chi^2, \\
z^1 &= a_0 e^{(\Lambda/3)^{1/2} t}\, \chi \sin\theta \cos\phi, \qquad (27.79) \\
z^2 &= a_0 e^{(\Lambda/3)^{1/2} t}\, \chi \sin\theta \sin\phi, \\
z^3 &= a_0 e^{(\Lambda/3)^{1/2} t}\, \chi \cos\theta.
\end{aligned}$$

Из-за своих прекрасных теоретико-групповых свойств и инвариантности относительно $5 \cdot {}^4/_2 = 10$ независимых вращений геометрия де Ситтера была объектом множества математических исследований. Физические следствия космологической модели де Сит-

тера описали, например, Робертсон и Нунан [24] (см. в особенности § 16.2 их книги). Модель де Ситтера представляет собой единственную модель, подчиняющуюся уравнениям Эйнштейна ($\Lambda \neq 0$); она 1) непрерывно расширяется и 2) выглядит одинаковой для любого наблюдателя, движущегося с космологической жидкостью, независимо от его положения и времени. Говорят, что любая модель, удовлетворяющая условию 2, подчиняется так называемому «совершенному космологическому принципу». Это выражение возникло в прошлом при изучении моделей, которые не описывались в рамках общей теории относительности и в которых рассматривалось непрерывное рождение вещества; они получили название «стационарной Вселенной». Большинство исследователей в настоящее время отказалось от любых подобных моделей по крайней мере потому, что эти модели не дают удовлетворительного объяснения фоновому излучению с температурой 2,7 К. Введение космологической постоянной или открытой модели Вселенной оказывается очень большим отклонением от эйнштейновского понимания космологии, но еще большим отклонением является допущение «иерархической модели» Вселенной; в последней предполагается, что скопления галактик и скопление скоплений галактик в этой части Вселенной распределены на различных расстояниях в зависимости от их плотности, причем на больших расстояниях пространство становится асимптотически плоским [382—384, 389—391]. Принятую здесь точку зрения Оскар Клейн выразил такими словами: «Эйнштейновская космология была приспособлена к открытию Хабблом расширения наблюдаемой части Вселенной; так называемый «космологический постулат» использовался как аксиоматическая основа, которая при анализе с очевидностью показывает, что эта расширяющаяся область является частью очень большой, но еще связанной системы. Это подразумевает, что наша расширяющаяся Метагалактика, вероятно, представляет собой один из типов звездных объектов, находящихся на различных стадиях эволюции: некоторые из них расширяются, другие сжимаются».

**Другие (неэйнштейновские) космологические модели:**

**1) стационарная модель**

**2) иерархическая модель**

Контраст между иерархической космологией и космологией Эйнштейна (Эйнштейн [392] отстаивал фридмановскую закрытую космологическую модель) нигде не проявляется сильнее, чем здесь; в одной из них асимптотически плоское пространство-время считается требованием, в другой — абсурдом. «Только гений Римана, забытый и непонятый», — писал Эйнштейн [44], — «уже проложил свой путь в середине прошлого столетия к новой концепции пространства, в которой пространство уже не считалось жестким и за ним признавалось право принимать участие в физических событиях». Это утверждение вносит оптимизм в современную космологию.

Однако современный взгляд на космологию, в основу которого положено эйнштейновское граничное условие замкнутости ($k = +1$) и его убеждение, что $\Lambda = 0$, нет надобности вечно при-

нимать на веру. Предсказания Эйнштейна ясны и определенны, но могут не оправдаться. Наблюдательная космология в конечном счете подтвердит или опровергнет их так же решительно, как она уже опровергла в 1920 г. веру в статическую Вселенную, а в 1948 г. — в стационарные модели (об истории космологии см. дополнение 27.7) [1]).

---

УПРАЖНЕНИЯ

### 27.11. Можно ли увидеть собственный затылок?

Можно ли, покоясь относительно «космологической жидкости», увидеть собственный затылок с помощью фотонов, совершивших обход вокруг замкнутой Вселенной, которая описывается фридмановской космологической моделью и имеет ненулевую космологическую постоянную (см. данные дополнения 27.3 для случая нулевой космологической постоянной)?

### 27.12. Запрещают ли законы сохранения рождение пар частиц — античастиц из пустого пространства с помощью приливных гравитационных сил?

Найдите ошибку в следующем доказательстве: «Классические уравнения

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

не совместимы с рождением пар, поскольку они приводят к тождеству $T_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta} \equiv 0$. Пусть начальное состояние есть вакуум, и пусть тензор $T_{\alpha\beta}$ и его производная равны нулю на гиперповерхности $t = \text{const}$ или $t = -\infty$. Тогда из уравнений $T_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta} = 0$ следует, что вакуум всегда сохраняется». (*Ответ*: См. работы Зельдовича [393—395], а также § 30.8.)

### 27.13. Поворотная модель Вселенной, в которой пренебрегается плотностью вещества

Если поворот (минимальный радиус) происходит далеко справа (большие $a$) от максимума потенциала $V(a)$, определяемого уравнением (27.75), то члены, в которые входит плотность вещества, будут пренебрежимо малы. Пусть $\rho_{\text{вещ.},\,0} = \rho_{\text{изл.},\,0} = 0$. Покажите тогда (какие знаки $k$, $\Lambda$ необходимы для поворота?), что $\Lambda = 3\,(a_{\text{мин}})^{-2}$, $H = (a_{\text{мин}})^{-1}\,\text{th}\,(t/a_{\text{мин}})$ вблизи поворота ($t = 0$) и что параметр замедления $q \equiv -(1/H^2a)\,(d^2a/dt^2)$ будет иметь значение

$$q = -a^2\,(a^2 - a^2_{\text{мин}})^{-1} < -1.$$

### 27.14. «Нерешительная» Вселенная

Пренебрегите излучением в уравнении (27.75), но предположите, что $K_0$ и $\Lambda$ выбраны так, чтобы Вселенная длительное время

---

[1]) Здесь следует отметить (см. подробнее [238]), что новые наблюдения говорят больше в пользу открытой модели с $k = -1$.— *Прим. ред.*

УПРАЖНЕНИЯ

проводила с $a(t)$ вблизи $a_h$ ($a_h$ — положение наивысшей точки барьера или размер Вселенной, при котором она наиболее «медлительна»). Выберем $a_h = a_o/3$, что соответствует аномально большому числу красных смещений квазаров вблизи $z = 2$ (как считали Бербидж Дж. и Бербидж Е.М. [396, 397], хотя их мнение не разделялось всеми наблюдателями). Покажите, что а) современная плотность вещества, входящая в уравнение (27.75), будет составлять лишь 10% от величины $H_o^2 = (\dot{a}/a_{\text{совр}})$ [«скрытое вещество», т. е. члены с $K_o$ и $\Lambda$ составляют 90%], б) $a_h \approx 2^{0{,}1/2} H_o^{-1}$ и в) современное значение параметра замедления, определенного в упражнении 27.14, равно $q_o = -13/10$.

### 27.15. Непрозрачность Вселенной для чернотельного излучения в момент несингулярного перехода от сжатия к расширению требует невозможных параметров

Из фигуры, подобной фигуре дополнения 27.5, постройте модель Вселенной, которая содержит в настоящий момент чернотельное излучение с температурой 2,7 К, а в прошлом при $k = +1$ и $\Lambda > 0$ совершала поворот от сжатия к расширению (минимальный радиус); в последнем случае температура чернотельного излучения достигала 3000 К и водород был ионизован. Попытайтесь использовать значения $H_o^{-1}$ и $\rho_{\text{вещ.},o}$, которые являются наименьшими из возможных современных принятых значений $H_o^{-1}$ и $\rho_{\text{вещ.},o}$.

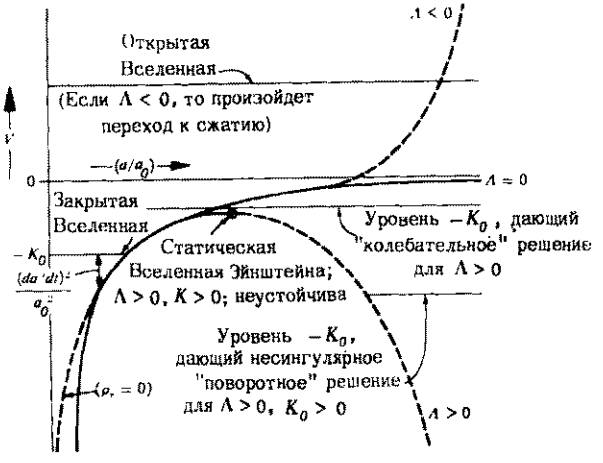
---

### Дополнение 27.5. ВЛИЯНИЕ ВЕЛИЧИНЫ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ И «СОВРЕМЕННОГО» ЗНАЧЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ КРИВИЗНЫ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ НА ПРЕДСКАЗЫВАЕМЫЙ ХОД ЭВОЛЮЦИИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

«Эффективный потенциал» $V$ из обобщенного уравнения Фридмана (27.74) представлен на фигуре как функция отношения $a/a_o$, характеризующего расширение. Фигура иллюстрирует влияние на космологическую модель 1) космологической постоянной $\Lambda$ (которая определяет поведение эффективного потенциала при больших значениях $a/a_o$; см. пунктирные кривые) и 2) принятого значения $K_o = (1/6$ внутренней кривизны трехмерного пространства в современную эпоху). Значение величины $-K_o$ дает «эффективный уровень энергии» и показано на фигуре горизонтальной линией. Разность между горизонтальной линией и кривой эффективного потенциала определяет $(a_o^{-1}da/dt)^2$. Области, в которых эта разность отрицательна, недосягаемы. Истории 3-пространства (см. фигуру) описаны ниже.

Фигура схематична, количественные эффекты не учитывались. Характерными значениями могут быть $\Lambda_{\text{обычн}} = 0$ или $\pm 3 \cdot 10^{-28}$ г/см$^3$, $\rho_{\text{вещ.},o,\text{ обычн}} = 10^{-30}$ г/см$^3$ или $\rho_{\text{вещ.},o,\text{ обычн}} = 10^{-28}$ г/см$^3$ и $(a_o^{-1}da/dt)^2 = H_o^2 = (1/20 \cdot 10^9 \text{ лет})^2$ или $3{,}8 \cdot 10^{-29}$ г/см$^3$. При малых значениях $a/a_o$ космологический член $-(\Lambda/3)(a/a_o)^2$ пренебрежимо мал. Различием между моделью Вселенной, искривленной только

плотностью вещества (пунктирная линия на фигуре), и моделью, искривленной также плотностью излучения (сплошная кривая), при малых значениях $(a/a_0)$



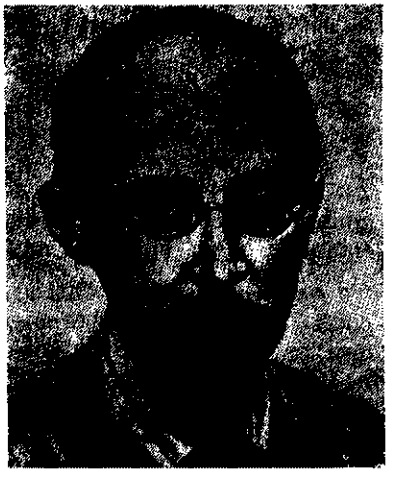

пренебречь нельзя. Разная зависимость «радиуса» и плотности от времени в ранний период в этих двух случаях, когда преобладает излучение ($\rho = 3/32\pi t^2$) и когда преобладает вещество ($\rho = 1/6\ \pi t^2$), детально представлена в последней части дополнения 27.3.

| Внутренняя кривизна пространства[1] в современную эпоху | $\Lambda$ | Космология |
|---|---|---|
| Гиперболическая; $K_0 < 0$ | $< 0$ | Вселенная начинает расширяться из состояния бесконечной плотности. Достигает максимальной протяженности (или минимальной плотности), определяемой величиной $\Lambda$, и затем сжимается с постоянно возрастающей скоростью к состоянию бесконечной плотности |
| Гиперболическая; $K_0 < 0$ | 0 | Вселенная начинает расширяться из состояния бесконечной плотности. В конце скорость расширения становится постоянной $da/dt = 1$. 4-геометрия представляет собой плоское пространство-время Минковского. Лишь кривизна пространственноподобных сечений, проведенных в этой плоской 4-геометрии, придает 3-геометрии гиперболический характер [см. формулу (27.70)] |
| Закрытая; $K_0 > 0$ | 0 | Классическая фридмановская космологическая модель: расширение из состояния бесконечного сжатия до конечного радиуса, сжатие и коллапс |

| Внутренняя кривизна пространства в современную эпоху | $\Lambda$ | Космология |
|---|---|---|
| Закрытая; $K_o > 0$ | $< 0$ | Качественно модель подобна предыдущей модели. Количественно — несколько меньший радиус в фазе максимального расширения и несколько меньшее время от начала расширения до конца сжатия |
| Закрытая; $K_o > 0$ | $\Lambda > 0$ и больше определенного критического значения, $\Lambda > \Lambda_{\text{крит}}$ | «Вершина эффективного потенциала» имеет значение, несколько меньшее — $K_o$. Расширение замкнутой Вселенной начинается из состояния неограниченного сжатия. По мере расширения оно замедляется и затем становится почти таким, как будто собирается остановиться («момент нерешительности»). Однако изображающая точка медленно проходит через вершину потенциала. После чего расширение набирает все большую и большую скорость и следует в конце экспоненциальному закону $a = \text{const} \times \exp\left[(\Lambda/3)^{1/2} t\right]$ |
| Закрытая; $K_o > 0$ | $\Lambda > 0$ и точно равна критическому значению $\Lambda = \Lambda_{\text{крит}}$, при котором «вершина потенциала» совпадает с $-K_o$ | Ситуация аналогична той, которая возникает, если уткнуть карандаш кончиком в стол и придать ему столько энергии, что ее как раз будет достаточно для того, чтобы он асимптотически за бесконечное время занял вертикальное положение. Вселенная стартует как компактная конфигурация и, расширяясь, приближается к определенному радиусу («радиусу Эйнштейна» $a_E$), следуя закону $a = a_E - \text{const} \times \exp\,(-\alpha t).$ Или (первоначальное предположение Эйнштейна о статичности Вселенной, когда он против своей воли ввел в уравнение поля «космологический член», чтобы получить статическую Вселенную) изображающая точка всегда находится на «вершине эффективного потенциала» (Вселенная Эйнштейна). Помимо того что эта конфигурация противоречит наблюдаемому в современную эпоху расширению, она обладает той же неустойчивостью, что и карандаш, пытающийся устоять на своем кончике. Малейшее возмущение заставит такую Вселенную либо коллапсировать, либо вызовет ускорение расширения и переход к асимптотическому закону $a = \text{const} \times \exp\left[(\Lambda/3)^{1/2} t\right]$ |

| Внутренняя кривизна пространства в современную эпоху | $\Lambda$ | Космология |
|---|---|---|
| Закрытая; $K_0 > 0$ | $\Lambda > 0$ и меньше критического значения $0 < \Lambda < \Lambda_{\text{крит}}$ $(K_0)$ | Движение происходит на той стороне от «потенциального барьера», которая соответствует большим $a$. В далеком прошлом Вселенная имела огромные размеры, однако сжималась с огромной скоростью приблизительно по закону $a = \text{const} \times \exp\,[-(\Lambda/3)^{1/2} t]$. После того как радиус $a$ достигает минимального значения, Вселенная начинает расширяться («поворотное решение»), переходя в конце к асимптотическому закону $a = \text{const} \times \exp\,[(\Lambda/3)^{1/2} t]$ |

**Дополнение 27.6. АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ ФРИДМАН.**
**Санкт-Петербург, 17 июня 1888 г. — Ленинград, 15 сентября 1925 г.**



В 1909 г. окончил Санкт-Петербургский университет; 1922 г. — докторская степень; 1910 г. — ассистент по кафедре математики в Институте проектирования мостов и дорог; в 1912 г. читал лекции по дифференциальному исчислению в Горном институте; 1913 г. — физик в Аэрологическом институте Павлова; в августе 1914 г. поднялся на дирижабле для подготовки наблюдения солнечного затмения; 1914 г. — доброволец воздушного корпуса на фронте вблизи Осовца; 1916—1917 гг. — руководитель Военной воздушно-навигационной службы; 1918 г. — профессор механики Пермского университета; 1920 г. — Петроградский университет: лекции по гидродинамике, тензорному анализу; автор книг: «*Эксперименты в гидромеханике несжимаемой жидкости*» и «*Мир как пространство и время*»; в 1922 г. опубликована переломная в творческом пути Фридмана статья «*О кривизне пространства*»; руководитель исследований в отделении теоретической метеорологии Главной геофизической лаборатории, Ленинград; с февраля 1925 г. и вплоть до смерти от брюшного тифа, последовавшей семь месяцев спустя, — директор этой лаборатории; совместно с Л. В. Келлером «ввел понятие моментов связи, т. е. математических ожиданий для произведений пульсаций гидродинамических элементов в различных точках и в различные моменты времени..., чтобы пролить свет на физическое строение турбулентности» (из статьи Полубариновой-Кочиной [398], содержащей также библиографию работ А. А. Фридмана и статей, посвященных А. А. Фридману).

## Дополнение 27.7. НЕКОТОРЫЕ ШАГИ В КОСМОЛОГИИ ПО ПУТИ К ДАЛЬНЕЙШЕМУ ПОЗНАНИЮ И ПРОЧНЫМ ОСНОВАМ[1])

### А. Период до двадцатого столетия

**Концепции древнеиндийской космологии** (приводятся в работе [404]): «Одна тысяча магаюга (mahāyugas) 4 320 000 000 лет человеческого исчисления, составляют один день Брахмы, одну калпу (kalpa)... Я познал страшное разрушение Вселенной. Я видел полную гибель, вновь и вновь, в каждом цикле. В это ужасное время каждый отдельный атом растворялся в первичных чистых водах вечности, откуда первоначально все возникает».

**Платон,** от примерно 428 до примерно 348 г. до н. э. Из сочинения «*Тимей*» (Timaeus), написанного в поздний период его жизни (перевод на английский Конфорда [405]): «Мир» [Вселенная] создан по образу модели мира, который постижим путем целесообразного рассуждения и понимания и всегда находится в одинаковом состоянии... этот мир начал существовать... живое творение с душой и рассудком... его создатель сотворил не два мира и не бесконечное число миров; только это Небо появилось, оно есть и будет в будущем одним и единственным... он сотворил мир совершенным, ему не грозят старость и болезни... Он превратил его форму в круглую и сферическую... Ему не нужны глаза, ибо ничего не лежит вне его, ему не нужны уши, ибо ему нечего слушать извне... чтобы ввести Время, он заставил Солнце, Луну и пять других звезд — «странников»,как их называют, — определять и хранить количества Времени... эта Вселенная зародилась в результате сочетания Необходимости и Причины... мы должны ввести также Блуждающую Причину... ту, которая должна вобрать в себя все виды (все формы), должна быть свободна от всех характеров (всех форм)... По этой причине тогда мать и Вместилище того, что явилось видимым или же ощутимым, не следует называть Землей, или воздухом, или огнем, или водой... однако природа невидима и не характеризуема, все воспринимаемое проходит некоторый очень запутанный путь понимания и очень трудный для постижения».

**Аристотель,** 384—322 г. до н. э. Из сочинения «*О небе*» (перевод на английский Газри [406]): «В продолжении всего прошедшего времени, согласно летописям, завещаемым потомкам от поколения к поколению, мы не находим следа изменений ни во всем удаленном небе в целом, ни в одной из подходящих частей неба... Форма неба должна быть сферической... Из этих рассуждений [движение неизменно происходит по прямой линии к центру; регулярность восхода и захода звезд; естественное движение Земли по направлению к центру Вселенной] ясно, что Земля не движется и располагается не где-нибудь, а в центре... Земля...должна была вырасти в форме сферы. Это [форма сегментов, вырезаемых Луной во время лунного затмения; возможность видеть в Египте звезды, не видимые в более северных странах] доказывает, что Земля сферическая и ее длина окружности невелика ... Математики, пытавшиеся вычислить длину окружности, определили, что она равна 400 000 стадий» [1 стадия = 600 греческих футов = 606 английских

[1]) За справками по истории космологии читателю следует обратиться к работам [399—402], в особенности к работам Пиблса [363] и Шамы [403], содержащим библиографические ссылки на современные разработки, перечисленные здесь в сокращенной форме. (Редакторы перевода рекомендуют книгу [537].— *Прим. ред.*)

футов; таким образом, $24{,}24 \cdot 10^7$ фут/(6080,2 фут/морская миля) = 39 900 морских миль. Этот старейший летописный расчет длины окружности Земли, по описаниям известный Колумбу, дает значение на 85% большее истинной длины окружности $60 \times 360 = 21\,600$ морских миль].

**Аристотель,** 384—322 г. до н.э. Из сочинения «*Метафизика*» (перевод на английский Уаррингтона [407]): «Евдокс из Книда (408—355 г. до н. э.) предположил, что как движение Солнца, так и движение Луны включает в себя три сферы... Он далее предположил, что движение планет включает в себя в каждом случае четыре сферы... Калипп [из Кизика, процветавшего в 330 г. до н. э.]... считал, что с точки зрения наблюдений следует добавить еще [две сферы к Солнцу, две к Луне и еще по одной сфере к каждой из других планет».

**Эратосфен,** 275—195 г. до н. э. Расчет приписан ему Клавдием Птолемеем, который сделал это замечание в Александрии в период от 127 до 141 или 151 г. н. э. в своем сочинении «*Альмагест*» (перевод на английский Тальяферро [408], раздел I, § 12):

«(максимальное расстояние от Земли до Луны) = ($64\ ^1/_6$) (радиуса Земли);

(минимальное расстояние от Земли до Солнца) = (1160) (радиуса Земли)».

**Абу Али аль-Гусейн ибн Абдаллах ибн Сина,** иначе известный как **Авиценна,** 980—1037 гг. Врач, философ, составил свод законов Аристотеля, один из наиболее влиятельных ученых, которые сохранили учение греков и тем самым сделали возможным передачу этого учения средневековой Европе (цитируем по Насру [400], стр. 225): «Время есть мера движения».

Из 51 трактата «*энциклопедии Расаила*», известного прежде под названием «*Коран за Кораном*», **Ихвана аль-Сафа** или Братьев Искренности, главный центр которых был в Басре, Ирак, грубо 950—1000 г. н. э. {цитируем по Насру [400], стр. 64; см. стр. 78, где дан список расстояний до планет (выраженных через радиус Земли), взятый из энциклопедии Расаила, а также размеры планет и движения, характеризующие вращение различных птолемеевых сфер-носителей}: Пространство есть «форма, абстрагированная от материи и существующая только в сознании».

**Абу Рейхан аль-Бируни,** 972—1048 гг. Ученый-энциклопедист, однако интересовался также экспериментом, наблюдением и измерением; из измерений, проделанных им в Индии, вычислил длину окружности Земли и получил 80 780 039 кубитов (приблизительно на 4% больше принятого сегодня значения) и дал таблицу расстояний до планет (цитируем по Насру [400], стр. 120 и 130): «Оба [вида затмений] не происходят одновременно, за исключением периода общего коллапса Вселенной».

**Этьен Темпьер,** парижский епископ, в 1277 г. положил конец дебатам, в которых участвовала бóльшая часть французских богословов, объявив, что невозможно отрицать способность Бога создавать столько Вселенных, сколько Он соблаговолит.

**Роджер Бэкон,** 1214—1294 гг. В своем сочинении «*Большой труд*» (*Opus Majus*) [409] утверждает, что диаметр сферы, несущей звезды, согласно авторитетному

заявлению Альфаргани, равен 130 715 000 римских миль [1 миля равна 1000 ступней правой ноги], объем Солнца — 170 объемам Земли, объем звезды первой величины — 107 объемам Земли, а объем звезды шестой величины 18 объемам Земли.

**Николай Кузанский,** 1401—1464 гг. Из сочинения «*Ученое невежество*», 1440 г. (перевод на английский Герона) [410]: «Все части неба с необходимостью находятся в движении... Из вышесказанного очевидно, что Земля движется... мир [Вселенная], его движение и форма... будут выступать как колесо в колесе, сфера в сфере без какого-либо центра или окружности... Теперь очевидно, что Земля действительно движется, хотя нам кажется, что она стационарна. Фактически мы обнаруживаем движение только относительно чего-то неподвижного. Как мог бы человек узнать, что корабль движется, если бы... он не видел берегов и не был осведомлен о том, что вода течет?»

**Николай Коперник,** 19 февраля 1473 г.—24 мая 1543 г. Из сочинения «*Об обращении небесных сфер*», 1543 г. (перевод на английский Добсона и Бродетски [411]): «Меня побудило придумать метод расчета движений сфер лишь знание того, что математики противоречивы в этих исследованиях... они не могут объяснить или наблюдать постоянную длину сезонного года.... некоторые используют только концентрические окружности, тогда как другие — эксцентрики и эпициклы.... Вследствие этого они неспособны заметить или вывести принципиальную вещь, а именно форму Вселенной и неизменяемую симметрию ее частей...»

«Я нашел впервые у Цицерона, что Нисета понял, что Земля движется. Впоследствии я нашел у Плутарха [примерно 46—126 г. н. э.]...» «Опора удерживает Землю стационарной», однако пифагореец Филолай [родился примерно в 480 г. до н. э.] говорит, что она, подобно Солнцу и Луне, движется вокруг (центрального) огня по наклонному кругу. Гераклит из Понта [процветавшего в 4 в. до н. э.] и пифагореец Экфант также считают, что Земля движется, но не через пространство, а вращаясь вокруг собственного центра, как колесо вокруг оси, с Запада на Восток. Воспользовавшись этим, я тоже начал думать о подвижности Земли...»

«Должны были бы мы сильно удивиться, если бы за 24 часа делала оборот огромная Вселенная, а не маленькая Земля?... Напрасен поэтому страх Птолемея, что Земля и все, что на ней находится, распалось бы благодаря естественному вращению... То, что Земля не есть центр всех обращений, доказывается видимыми нерегулярными движениями планет и вариациями их расстояний до Земли... Мы утверждаем поэтому, что центр Земли, вокруг которого движется Луна, проходит в годовом обращении вокруг Солнца по большой орбите среди других планет; что вблизи Солнца находится центр Вселенной и что, считая Солнце покоящимся, видимое движение его можно лучше всего объяснить движением Земли... В частности, Марс, если он сияет всю ночь, появляясь для того, чтобы соперничать по величине с Юпитером, различим только благодаря его красному цвету; в остальном он едва равен звезде второй величины, и его можно опознать, если только тщательно проследить за его движениями. Все эти явления проистекают из одной причины, а именно движения Земли... То, что такие явления не свойственны неподвижным звездам, доказывают их громадные расстояния, по сравнению с которыми даже размер земной орбиты пренебрежимо мал и параллактический эффект ненаблюдаем».

**Томас Диггес**, 1546—1595 гг. В своем сочинении «*Совершенное описание небесных светил, согласующееся с очень древней доктриной пифагорейцев, в позднейшее время возрожденной Коперником и подтвержденной с помощью геометрических доказательств*», 1576 г., говорит об основных идеях Коперника, которые достигли Англии (цитируем по Джонсону [412]): «Об оных небесных светилах должно полагать, что мы видим лишь те из них, кои расположены в нижних частях Сферы, и чем выше они, тем кажутся все меньших и меньших размеров, пока наш взгляд не способен будет доле постичь или представить их; бóльшая часть их по причине поразительного расстояния остается невидима нам».

**Джордано Бруно**, родился приблизительно в 1548 г., сожжен на костре в Кампо дель Фиори, Рим, 17 февраля 1600 г. Из его книги «*О бесконечности Вселенной и Мирах*», написанной во время визита в Англию в 1583—1585 гг. (перевод на английский Сингера [413]): «Так пусть эта поверхность будет какой угодно, я должен всегда поставить вопрос, что находится за ней? Если ответом будет НИЧЕГО, тогда я назову это ПУСТОТОЙ. И эта Пустота не имеет меры и внешнего предела, однако она имеет внутренний предел; и его тем труднее представить, чем бесконечнее или огромнее Вселенная... В таком случае имеется несметное число солнц и бесконечное число земель, обращающихся вокруг этих солнц, точно так же, как те семь, которые, как мы можем наблюдать, обращаются вокруг ближайшего к нам Солнца».

**Иоганн Кеплер**, 1571—1630 гг. В 1609 г. установил законы эллиптических орбит и равных площадей [414], а в 1619 г. установил связь между периодами обращения планет и большими полуосями их орбит [415].

**Галилео Галилей**, 1564—1642 гг. Он наблюдал спутники Юпитера и понял, что они подтверждают теорию Коперника. В 1610 г. интерпретировал Млечный Путь как скопление звезд. В 1638 г. он писал:

«*Сальвати*. Что мы теперь должны делать, Симплицио, с неподвижными звездами? Хотим ли мы рассыпать их в огромной пучине Вселенной на различных расстояниях от любой заданной точки или поместить их на сферической поверхности, так чтобы каждая из них находилась на одинаковом расстоянии от центра этой поверхности?

*Симплицио*. Я лучше выберу промежуточную возможность и припишу им орбиту, описываемую вокруг определенного центра и заключенную между двумя сферическими поверхностями...»

**Исаак Ньютон**, 1642—1727 гг. В сочинении «*Математические начала натуральной философии*», 1687 г. [118], писал: «Тяготение по направлению к Солнцу состоит из тяготения по направлению к отдельным частицам, из которых составлено Солнце, и при удалении от Солнца до орбиты Сатурна уменьшается в точности обратно пропорционально квадрату расстояния, что явно проявляется в неподвижности афелия планет».

В письме от 10 декабря 1692 г. к Ричарду Бентли (цитируем по Мунитцу [399]) Исаак Ньютон писал: «Если бы вещество нашего Солнца и планет и все вещество Вселенной было равномерно рассеянно по всему небу и каждая частица обладала бы врожденным тяготением ко всему остальному и если бы все пространство, по которому было рассеяно это вещество, было бы тем не менее конечным, то все

вещество на наружной стороне этого пространства благодаря своему тяготению стремилось бы ко всему веществу, находящемуся внутри пространства, и, как следствие, упало бы в середину полного пространства и образовало там одну большую сферическую массу. Однако, если бы вещество было равномерно рассеяно по бесконечному пространству, оно никогда не собралось бы в одну массу; часть его могла бы собраться в одну массу, а часть — в другую, так что образовалось бы бесконечное число больших масс, разбросанных на больших расстояниях друг от друга по всему этому бесконечному пространству. Так могли образоваться Солнце и неподвижные звезды».

**Христиан Гюйгенс**, 1629—1695 гг. В опубликованном в 1698 г. (после его смерти) трактате «*Космотеорос*» [416] [1]) говорится: «Видно тогда, что звезды... это много солнц, и если мы предположим, что одна из них [Сириус, звезда Большого Пса] равна нашему Солнцу, то отсюда будет следовать [детали, включая телескоп, направленный на Солнце, тонкую пластинку, дырку в ней, сравнение с Сириусом]... что ее расстояние до Солнца относится к расстоянию Солнца от нас, как 27 664 к 1... В действительности, мне кажется несомненным, что Вселенная имеет бесконечную протяженность».

**Эдмунд Галлей**, 1656—1742 гг. В сочинении «*О бесконечной протяженности Сферы с неподвижными Звездами*» и «*О числе, порядке и свете неподвижных Звезд*», 1720 г. [417], писал: «Если бы число Неподвижных Звезд было бесконечным, то вся поверхность видимой Сферы [т. е. неба] была бы светящейся» [по современным понятиям обладала бы той же температурой, что и поверхность средней звезды; это называется сегодня парадоксом Ольберса или парадоксом де Шезо [418] [2]) и Ольберса [419]].

**Томас Райт** из Дархэма. В сочинении «*Теория происхождения или новая гипотеза о Вселенной*», 1750 г. [420], писал: «Чтобы... разрешить Феномен Млечного Пути... допустить... что *Млечный Путь* образован из бесконечного числа малых Звезд... вообразим огромную бесконечную пучину или среду, простирающуюся подобно плоскости в каждую сторону и заключенную между двумя поверхностями, приблизительно одинаковыми с обеих сторон... Вообразим теперь, что в этом пространстве все Звезды беспорядочно рассеяны, но на таком установленном расстоянии друг от друга, чтобы вся среда была заполнена разновидностью упорядоченной неупорядоченности объектов». [Рассматривая вид его] «в направлении... приблизительно срединной плоскости... всю неупорядоченность, которую мы наблюдаем в нем на Земле, я полностью отношу к положению нашего Солнца... и разнообразию движения... среди самих звезд, которые могут быть здесь и там... и возможности облачного скопления звезд».

**Иммануил Кант**, 1724—1804 гг. В своей работе, 1755 г. [421], писал: «Сделать счастливый шаг было уготовано англичанину Райту из Дархэма... мы попытаемся установить причину, которая заставила положения неподвижных звезд сконцентрироваться относительно общей плоскости... допуская... что все множество

---

[1]) В 1717 г. по приказанию Петра I этот трактат был переведен на русский язык под названием «Книга мирозрения или мнение о небесно-земных глобусах и их украшениях». — *Прим. перев.*

[2]) См. приложение в этой работе.

[неподвижных звезд] стремится приблизиться друг к другу благодаря их взаимному притяжению... разрушению препятствует действие центробежных сил... та же причина [центробежная сила]... направила их орбиты так, что все они оказались связанными с одной плоскостью... [Необходимое движение, как показывает расчет, составляет] 1° [или меньше] за 4000 лет;... для этого потребуются... аккуратные наблюдатели... . Брэдли наблюдал почти незаметные смещения звезд» [как стало известно из последующей работы, вызванные аберрацией (влияние скорости наблюдателя), а не действительным параллаксом (эффект положения наблюдателя)].

Спросим для начала, как будет выглядеть удаленная галактика: «круглой, если ее плоскость перпендикулярна лучу зрения, и эллиптической, если она видима со стороны или наклонно. Такой феномен, если он присутствует, будет ясно отличаться от всех звезд, которые видны как одиночные, слабостью свечения, внешним видом и видимым размером диаметра... этот феномен... отчетливо воспринимался различными наблюдателями, [которые]... были удивлены его странностью... . Таким образом, аналогия не оставляет сомнений, что эти системы [планеты, звезды, галактики] образовались и сформировались . . . из мельчайших частиц элементарного вещества, которое заполняет пустое пространство».

Кант продолжает серьезно рассматривать «последовательное распространение рождения [планет, звезд, галактик] по бесконечным областям пространства, которые содержат для этого вещество... притяжение как раз та универсальная связь, которая объединяет все части природы в одном пространстве. Оно простирается поэтому до... всех расстояний бесконечной природы».

**Иоганн Генрик Ламберт,** 1728—1777 гг. В своей работе «*Письма по космологии*», 1761 г. [422], писал: «Неподвижные звезды, подчиняясь центральным силам, движутся по орбитам. Млечный Путь включает в себя несколько систем неподвижных звезд... Каждая система имеет свой центр, а отдельные системы, собираясь вместе, имеют общий центр. Скопления скоплений также имеют свои центры. Наконец, имеется универсальный центр для всего мира, вокруг которого обращается все». [Первый намек на «иерархическую модель Вселенной», выдвинутую позже Шарлье и Альфвеном и Клейном [382], см. также [384, 423].]

**Огюст Конт,** 1798—1857 гг. В своей работе «*Курс позитивной философии*», 1835 г. [424], сделал вывод, что бессмысленно говорить о химическом составе звезд, поскольку человек никогда не сможет исследовать их; «область позитивной философии лежит целиком в пределах нашей Солнечной системы, причем изучение Вселенной недоступно в любом позитивном смысле».

Первое успешное определение параллакса [параллакс в 1″ соответствует расстоянию 1 пс $= 3{,}08 \cdot 10^{18}$ см $= 3{,}26$ св. лет] звезды было осуществлено в 1838 г. (Гендерсоном для $\alpha$ Центавра, Струве для $\alpha$ Лиры и Бесселем для 61 Лебедя).

### Б. Двадцатое столетие

Вывод Джеймсом Джинсом в 1902 г. критической длины волны, отделяющей коротковолновые акустические моды колебания горячего первичного газа от длинноволновых мод начала гравитационного сжатия этого газа. Использование этих соображений Пиблсом и Дике в 1968 г. для объяснения причины, по которой шаровые звездные скопления имеют массы порядка $10^5\ M_\odot$.

Исследования космических лучей после первого наблюдения Гесса и Колхёрстера, датируемого 1911—1913 гг.; определение плотности энергии космических лучей в межзвездном пространстве (в Галактике); она составляет приблизительно 1 эВ/см$^3$, или $10^{-12}$ эрг/см$^3$, и сравнима с плотностью энергии света звезд, с кинетической энергией облаков ионизованного межзвездного газа, усредненной по Галактике, и с плотностью энергии межзвездного магнитного поля ($\sim 10^{-5}$ Гс). Об этом равенстве в особенности см. в работе [425].

Открытие Генриеттой Ливитт в 1912 г. строго определенного соотношения между периодом цефеиды и ее светимостью.

Первое определение радиальной скорости галактики Слайфером в 1912 г.: Андромеда приближается к нам со скоростью 200 км/с. К 1915 г. Слайфер исследовал 13 галактик, но только две из них удалялись со скоростью около 300 км/с.

**Альберт Эйнштейн,** 1879—1955 гг. В своей работе 1915 г. [74] истолковал тяготение как проявление геометрии; дал окончательную формулировку закона, определяющего динамическую эволюцию геометрии пространства с течением времени.

Альберт Эйнштейн в своей работе 1917 г. [103] описал идеализированную модель Вселенной в виде трехмерной сферы, заполненной веществом с практически однородной плотностью; радиус этой 3-сферы нельзя было считать статическим, не изменяя классического геометродинамического закона, открытого Эйнштейном в 1915 г.; по этой причине Эйнштейн ввел так называемый «космологический член», который он позже опустил, считая «самой большой ошибкой» своей жизни [426].

Формулировка де Ситтером в 1917 г. космологической модели, в которой 1) Вселенная везде изотропна (и, следовательно, однородна), 2) Вселенная не изменяется со временем, так что средняя плотность массы-энергии и средняя кривизна пространства постоянны, однако 3) с необходимостью следует ввести космологический член («отталкивание») эйнштейновского типа, чтобы уравновесить притяжение вещества. Высказывание де Ситтера о том, что он мог бы получить другую статическую модель, устранив все вещество из первоначальной модели, однако тогда $\Lambda$-член заставил бы пробные частицы ускоренно удаляться друг от друга.

Дебаты в период от 1917 до 1920 г. по поводу того, являются ли спиральные туманности просто светящимися объектами (Хэрлоу Шепли) или они представляют собой «островные Вселенные», т. е. галактики, аналогичные, но внешние по отношению к Млечному Пути (Карти).

Открытие в 1918 г. Хэрлоу Шепли, который нанес на карту распределение в пространстве около 100 шаровых скоплений Галактики (каждое шаровое скопление содержит от $10^4$ до $10^6$ звезд), того факта, что центр Галактики расположен в направлении созвездия Стрельца (современное значение расстояния от центра до Солнца $\sim 10$ кпс).

Независимый вывод А. А. Фридманом в 1922 г. и Леметром в 1927 г. эволюционирующих однородных и изотропных космологических моделей [приведший также к соотношению $v = H \cdot$(расстояние)]. Леметр, связавший свой теоретический анализ с продолжавшейся тогда работой на Маунт-Вильсон, стал «отцом космологической модели большого взрыва» [1]. (В оригинальной статье Леметра Вселенная, однако, плавно расширялась от статического решения Эйнштейна с $\Lambda > 0$.)

[1]) Основателем современной космологии, как неоднократно подчеркивал Эйнштейн, является А. А. Фридман. См. предисловие редакторов перевода в т. 1.— *Прим. ред.*

Замечание Вейля в 1923 г., что пробные частицы в модели де Ситтера будут удаляться со скоростью, описываемой формулой вида $v = H \cdot$ (расстояние).

В 1924 г. Эдвин Хаббл на 100-дюймовом телескопе на Маунт-Вильсон положил конец дебатам о природе спиральных туманностей; открытие цефеид в Андромеде и других спиральных туманностях и определение расстояний до этих туманностей.

Определение Яном Оортом в 1927 г. характеристической картины распределения радиальных скоростей звезд вблизи Солнца:

$$\delta v_r = Ar \cos 2(\theta - \delta),$$

показывающей, что 1) ось вращения звезд Млечного Пути перпендикулярна диску; 2) Солнце делает полный оборот за $\sim 10^8$ лет; 3) эффективная масса, притягивающая Солнце и необходимая для того, чтобы вызвать обращение с таким периодом, порядка $10^{44}$ г или $10^{11}\ M_\odot$.

Возраст *урановой руды*, установленный по соотношению свинец — уран; наибольшее значение возраста, найденное к 1927 г., составляло $1{,}3 \cdot 10^9$ лет (Холмс и Лоусон). Возраст свинца в «средних» *поверхностных породах* Земли, вычисленный по времени, требуемому для создания этого свинца из урана в тех же поверхностных породах, $\sim$от $2 \cdot 10^9$ лет до $6 \cdot 10^9$ лет. Возраст *элементарного урана* $\sim 3 \cdot 10^9$ лет, оцененный Резерфордом по времени, требуемому для распада $U^{235}$ и $U^{238}$, в предположении, что очень неравные соотношения этих элементов в современную эпоху были грубо равны в ранний период.

В 1929 г. Хаббл установил, что для расстояний, превышающих $6 \cdot 10^6$ св. лет, скорость удаления галактики пропорциональна расстоянию до нее.

Замечание Эддингтона в 1930 г. о том, что статическая Вселенная Эйнштейна с $\Lambda > 0$ неустойчива относительно любого малого увеличения или уменьшения радиуса кривизны.

Рекомендация Эйнштейна в 1931 г. опустить в будущем так называемый «космологический член».

Предложение Эйнштейна и де Ситтера в 1932 г. попытаться принять простейшее допущение, что $\Lambda = 0$, давление пренебрежимо мало и обратная величина квадрата радиуса кривизны Вселенной не положительна, не отрицательна (сферическая или гиперболическая Вселенная), а равна нулю («космологически плоская»), что ведет к соотношению $\rho = 3H^2/8\pi$ (в геометрических единицах).

Доказательство Гроте Ребера в 1934 г. существования дискретного радиоисточника в созвездии Лебедя; доказательство в пользу существования этого источника; Лебедь А, не вызывающей сомнений после работы Гея, Парсонса и Филлипса в 1946 г.; 6 других дискретных радиоисточников, включая Телец А и Центавр А, открытые Болтоном в 1948 г.

Обнаружение Милном и Макри в 1934 г. близкого соответствия между ньютоновской динамикой газового облака и эйнштейновской теорией динамической Вселенной с масштабным множителем, характеризующим расширение и удовлетворяющим в обеих теориях одному и тому же уравнению, поскольку давление пренебрежимо мало.

Демонстрация Робертсоном и независимо Уолкером в 1935 г. того, что линейный элемент лемэтровского типа дает наиболее общую риманову геометрию, совместимую с однородностью и изотропией.

Классификация Хабблом в 1936 г. туманностей как спиральных, спиральных с перемычкой, эллиптических и неправильных.

Первая детальная теория Бете в 1939 г. генерации термоядерной энергии на Солнце.

Доводы Георгия Гамова в 1946 г. в пользу того, что вещество на ранней стадии расширения Вселенной было достаточно плотным и достаточно горячим для протекания в нем термоядерных реакций и что основной вклад в плотность энергии вносило излучение.

Выдвижение Бонди, Голдом и Хойлом в 1948 г. теории так называемой «стационарной Вселенной», выходящей за рамки классической общей теории относительности Эйнштейна и требующей «непрерывного рождения вещества» по всей Вселенной, причем средний возраст имеющегося вещества составляет в этой теории 1/3 хаббловского времени.

Предсказание Альфера, Бете и Гамова в 1948 г., что чернотельное излучение, первоначально заполнявшее Вселенную, должно иметь в современную эпоху планковский спектр, соответствующий температуре 25 К. Независимое понимание той же идеи Дикке в 1964 г. [1]) и начало экспериментального поиска этого первичного излучения космического файрбола. Открытие Пензиасом и Уилсоном в 1965 г. нежелательного и неожидаемого фонового излучения с длиной волны 7 см и температурой около 3,5 К; немедленное отождествление этого излучения Дикке, Пиблсом, Роллом и Уилкинсоном с предсказанным реликтовым излучением.

Радиоисточники Телец А, Дева А и Центавр А предварительно и, как было доказано позже, Болтон, Стэнли и Сли в 1949 г. правильно отождествили соответственно с Крабовидной туманностью и с галактиками NGC 4486 и NGC 5128.

Анализ Леметром в 1950 г. модели расширяющейся Вселенной, подходящей очень близко к статической Вселенной Эйнштейна ($\Lambda > 0$) и затем, вначале медленно, а потом все более и более быстро переходящей к экспоненциальному расширению.

Открытие Вальтером Бааде в 1952 г. двух типов цефеид с двумя различными соотношениями период — светимость, и как следствие увеличение примерно в 2,6 раз хаббловской шкалы расстояний и соответствующее увеличение первоначального значения (грубо $2 \cdot 10^9$ лет) хаббловского времени $H_0^{-1}$.

Отождествление Бааде и Минковским в 1954 г. радиоисточника Лебедь А с ярчайшим членом слабого скопления галактик в противоположность широко распространенному тогда взгляду, что большинство радиоисточников лежит в пределах Млечного Пути. Определение Минковским красного смещения в оптическом спектре Лебедя А $\delta\lambda/\lambda = z = 0{,}057$, откуда расстояние для Лебедя А равно 170 Мпс и радиосветимость равна $10^{45}$ эрг/с, что в $10^7$ раз превышает радиомощность и в 10 раз превышает оптическую мощность нормальной галактики.

Разрешение радиоисточника Лебедь А в 1956 г. на две компоненты, симметрично расположенные по обеим сторонам оптической галактики, — первое указание, что большинство радиоисточников являются двойными. До сих пор не разрешена тайна взрыва или какого-то механизма, объясняющего действие этого и других двойных источников.

Расчет Дж. Бербиджом в 1956 г. кинетической энергии электронов, дающих синхротронное излучение в радиогалактике, и энергии магнитного поля, которое

---

[1]) В том же 1964 г. в СССР появилась работа А. Г. Дорошкевича и И. Д. Новикова [515], в которой был рассчитан весь спектр электромагнитного излучения и рекомендовано искать первичное излучение с температурой около 1К на ультракоротких радиоволнах.— *Прим. ред.*

удерживает эти электроны на орбите; минимизация суммы этих двух энергий; определение того, что этот минимум, например, для Геркулеса А имеет величину порядка $10^{60}$ эрг (энергия аннигиляции 500 000 солнц) [2]).

Определение Паттерсоном в 1956 г. и другими в 1965 и 1969 гг. возраста Солнечной системы ($4{,}55 \cdot 10^9$ лет или более) по относительному обилию $Pb^{204, 206, 207}$ и $U^{235, 238}$ в метеоритах и океанических отложениях и по свидетельствам о процессах $Rb^{87} \to Sr^{87}$ и $K^{40} \to A^{40}$ в метеоритах.

Обнаружение Алланом Сэндиджом в 1958 г., что объекты, которые Хаббл отождествлял в удаленных галактиках с яркими звездами, были областями H II, т. е. скоплениями горячих звезд, окруженными плазмой, ионизуемой звездами, и как следствие — дополнительное увеличение хабблевской шкалы расстояний приблизительно в 2,2 раза.

Оценка Яном Оортом в 1958 г. по светимости других галактик, что вклад вещества в галактиках в плотность массы-энергии во Вселенной равен грубо $3 \times \times 10^{-31}$ г/см$^3$ (современное рассмотрение дано в [363], т. е. на один или два порядка меньше величины, требуемой, согласно представлению Эйнштейна, для замыкания Вселенной; и это породило «тайну скрытого вещества» — фокус многих современных исследований.

Открытие Джиаккони, Гурским, Паолини и Росси в 1962 г. космических (несолнечных) рентгеновских лучей. Большинство источников лежит в плоскости Млечного Пути и, вероятно, расположено в Галактике, как, например, Крабовидная туманность. Внегалактические источники включают в себя радиогалактику Дева А и квазар 3С 273.

Опубликование Беннеттом в 1962 г. пересмотренного 3С-каталога радиоисточников, содержащего 328 источников и почти полно охватывающего область склонений от $-5°$ до $+90°$ для источников, ярче 9 ед. потока [$9 \cdot 10^{-26}$ Вт/(м$^2$·Гц)] на частоте 178 МГц.

Отождествление Мартином Шмидтом на Маунт-Паломар в 1963 г. первого квазизвездного объекта (квазара); определение радиоположения 3С 273 с точностью, лучшей 1″, Хазардом, Макеем и Шимминсом в 1962 г.; далее, несмотря на все предположения, что это была звезда в Галактике, успешное сопоставление Шмидтом оптического спектра звездоподобного источника со спектром, сдвинутым в красную сторону на величину (беспрецедентную для «звезды») $\delta\lambda/\lambda = z = 0{,}158$. Расстояние до этого объекта, следующее из хабблевского соотношения, составляет $1{,}5 \cdot 10^9$ св. лет, оптический блеск в 100 раз превышает блеск ярчайшей из известных галактик. Наибольшее красное смещение квазаров, известное к 1972 г., $z = = 2{,}88$ (4C05.34, Линдс). Такой источник можно обнаружить даже при красном смещении $z = 3$, однако к 1972 г. квазары с такими красными смещениями неизвестны [2]). См. дополнение 28.1.

Доводы Денниса Шамы в 1964 г. (см. также книгу Шамы, 1971 г. [403]) в пользу того, что межгалактический водород с температурой от $3 \cdot 10^5$ до $3 \cdot 10^6$ К менее всего доступен наблюдениям [3]). При плотности $10^{-5}$ протонов и $10^{-5}$ электронов на 1 см$^3$ и температуре ниже $3 \cdot 10^5$ К плотность нейтральных атомов была бы достаточно велика и можно было бы обнаружить результирующее поглощение Ly $\alpha$ от удаленной галактики ($z = 2$), что противоречит наблюдениям.

---

[1]) Важные вопросы космологии в связи с радиоастрономией и моменты истории см. в книге Шкловского [516].— *Прим. ред.*

[2]) В 1974 г. открыт квазар OQ-172 с красным смещением $z = 3{,}53$.— *Прим. перев.*

[3]) См. также работу В. Л. Гинзбурга и Л. М. Озерного [517].— *Прим. ред.*

Определение Ганом, Петерсоном, Уомплером и др. в 1964 г., что при температуре выше $10^6$ К интенсивность рентгеновских лучей с энергией 0,25 кэВ или 50 Å от межгалактического пространства была бы очень высока и несовместима с наблюдениями.

Подчеркивание Уиллером в 1964 г., что динамическим объектом в общей теории относительности Эйнштейна является не 4-геометрия, а 3-геометрия, и что эта динамика, как квантовая, так и классическая, развертывается на арене суперпространства.

Открытие Сэндейджом в 1965 г. квазизвездных галактик (радиоспокойных квазизвездных объектов).

Открытие Бербидж Е. М., Бербиджом Дж., Линдсом и Стоктоном в 1965 г. квазара 3С 191 с многочисленными линиями поглощения, означающими сосуществование нескольких красных смещений в одном спектре.

Доля (по массе) вещества, превращающегося в гелий в первые несколько минут от начала расширения Вселенной, когда температура около $10^{10}$ К и преобладает излучение, причем эта доля в широком интервале значений отношения числа фотонов и барионов ($10^6$) не зависит от данного отношения. Величина такого плато в обилии гелия, впервые точно вычисленная Пиблсом в 1966 г. и Вагонером, Фаулером и Хойлом в 1967 г. (следовавшим другим более ранним работам), составляет 27%.

Предложение Мизнера в 1968 г. рассматривать как важную часть космологии в ранний период анизотропные колебания геометрии пространства, предварительно рассмотренного Казнером и Лифшицем и Халатниковым. (Надежда Мизнера, естественно объяснить таким образом столь загадочную в других отношениях однородность Вселенной, впоследствии не оправдалась.)

Доказательство Хоукингом, Эллисом и Пенроузом в 1968 и 1969 гг. на основе классической общей теории относительности (см. также связанные с этим более ранние работы других исследователей, цитируемые в гл. 44), что модель Вселенной, расширяющаяся в настоящее время и наполненная веществом и излучением, подчиняющимся физически приемлемому уравнению состояния, должна быть сингулярна в прошлом, даже если она несимметрична сегодня [1]).

Открытие пульсаров Хьюишем, Белл, Пилкингтоном, Скоттом и Коллинзом в 1968 г. и интерпретация их как вращающихся нейтронных звезд (см. гл. 24).

*«Ни поэт, ни художник в любом виде искусства*
*не имеет законченного значения сам по себе.*
*Его значимость, его признание — это оценка его*
*по отношению к умершим поэтам и художникам.*
*Невозможно оценить его одного; Вы должны поставить его*
*среди умерших для контраста и сравнения ... если рождается новое*
*искусство ... что-то ... случается одновременно со всем*
*предшествующим ему искусством. Существующие монументы*
*образуют между собой идеальный порядок, который видоизменяется*
*благодаря введению между ними новых (истинно новых)*
*достижений искусства».*

ЭЛИОТ, 1920 г [2])

---

[1]) В 1972 г. Белинский, Лифшиц и Халатников нашли аналитический вид общего (сколь угодно несимметричного) решения уравнений Эйнштейна вблизи сингулярности [532]. — *Прим. ред.*

[2]) Цитата взята из работы [427].

# 28. ЭВОЛЮЦИЯ ВСЕЛЕННОЙ К ЕЕ СОВРЕМЕННОМУ СОСТОЯНИЮ

*Космология... ограничивает заблуждения явно недисциплинированного воображения.*

АЛЬФРЕД НОРЗ УАЙТХЭД, 1929 г.[1])

## § 28.1. «СТАНДАРТНАЯ МОДЕЛЬ» ВСЕЛЕННОЙ

Эволюция Вселенной согласно «стандартной горячей модели большого взрыва»:

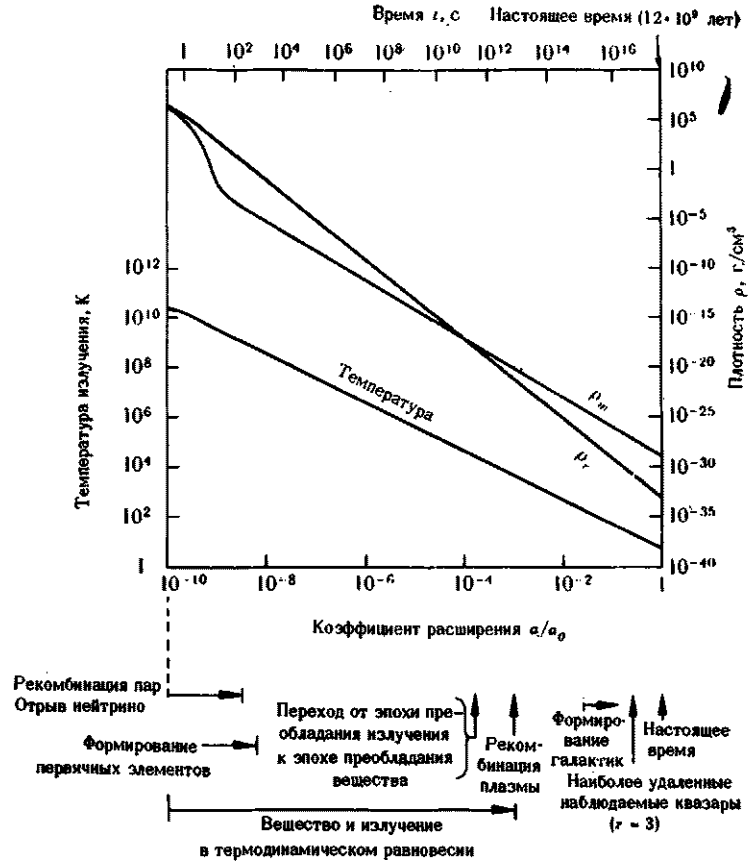
После открытия космического микроволнового излучения в 1965 г. в результате обширных теоретических исследований была создана достаточно подробная картина вероятной эволюции Вселенной к ее современному состоянию. Эта картина, названная «стандартной горячей моделью большого взрыва» Вселенной, в общих чертах обрисована в настоящей главе, а ее основные особенности показаны на фиг. 28.1. Тяготение преобладает на всех стадиях расширения, однако в остальном большинство деталей эволюции определяется законами термодинамики, гидродинамики, атомной физики, ядерной физики и физики высоких энергий, а не тяготением. Этот факт и существование трех отличных современных книг Шамы [403], Пиблса [429], Зельдовича и Новикова [238], посвященных данному предмету, оправдывают наше краткое изложение вопроса.

Протекшая эволюция Вселенной качественно не зависит от природы однородных гиперповерхностей ($k = -1$, 0 или $+1$) и от космологической постоянной, поскольку на ранних этапах истории Вселенной (малые $a/a_0$) вклады $k$ и $\Lambda$ в эволюцию несущественны [см. уравнение (27.40) и фиг. 27.5]. В основе стандартной горячей модели большого взрыва лежит одно решающее предположение: Вселенная «начала» быстро расширяться из почти однородного, изотропного состояния бесконечной (или почти бесконечной) плотности и температуры.

1) начальное состояние

В соответствии с этим предположением в течение первой секунды после начала расширения температура Вселенной была так

[1]) Из работы [428], стр. 21.




**ФИГ. 28.1.**
**Эволюция Вселенной к современному состоянию согласно стандартной горячей модели большого взрыва. Кривые изображены в предположении, что $\rho_{то} = \rho_{вещ.,\,о} = 5 \cdot 10^{-30}$ г/см$^3$, $\rho_{ги} = \rho_{изл.,\,о} = 10^{-33}$ г/см$^3$, $k = 0$; однако для других значений $\rho_{вещ.,\,о}$, $\rho_{изл.,\,о}$ и $k$ в пределах наблюдаемых значений кривые фактически не отличаются (см. упражнение 28.1). Детальное обсуждение процессов, описываемых под фигурой, см. в тексте и дополнении 28.1. (Данная фигура заимствована из работы Дикке, Пиблса, Ролла и Уилкинсона [371].)**

высока, что имелось полное термодинамическое равновесие между фотонами, нейтрино, электронами, позитронами, нейтронами, протонами, различными гиперонами и мезонами и, возможно, даже гравитонами (гравитационными волнами) (см., например, [430] и цитируемые там работы). Однако к тому времени, когда возраст Вселенной был равен нескольким секундам, ее температура упала до величины приблизительно $10^{10}$ К, а ее плотность понизилась до $\sim 10^5$ г/см$^3$, поэтому все нуклон-антинуклонные пары рекомбинировали, все гипероны и мезоны распались, а все нейтрино и гравитоны отделились от вещества. Вселенная тогда состояла из свободно распространяющихся нейтрино, и, возможно, гравитонов с чернотельным спектром, соответствующим температурам $T \sim 10^{10}$ К, из рекомбинирующих электрон-позитронных пар, электронов, нейтронов, протонов и фотонов, находящихся в тепловом равновесии при $T \sim 10^{10}$ К.

2) термодинамическое равновесие, распад частиц, рекомбинация пар ($0 < t \lesssim 10$ с)

3) отделение и свободное распространение гравитонов и нейтрино ($t \lesssim 1$ с)

После этой ранней фазы гравитоны (если они присутствовали) и нейтрино продолжали распространяться свободно, сохраняя чернотельный спектр, однако из-за расширения Вселенной их температуры испытывали красное смещение согласно закону

$$T \sim 1/a \qquad (28.1)$$

(дополнение 29.2). Следовательно, сегодня температуры гравитонов и нейтрино должны были бы грубо равняться 3К и они должны были бы заполнять Вселенную [1]). К сожалению, современная экспериментальная техника еще далека от того, чтобы обнаружить такое «море» нейтрино и гравитонов. Однако, если и когда нейтрино и гравитоны будут обнаружены, они дадут *непосредственную* наблюдательную информацию о первой секунде жизни Вселенной!

После первых нескольких секунд расширения Вселенной наступает период, длящийся от $t \sim 2$ до $t \sim 1000$ с (от $T \sim 10^{10}$ до $\sim 10^9$ К, от $\rho \sim 10^{+5}$ до $10^{-1}$ г/см$^3$), в течение которого происходит образование первичных элементов. До этого периода вокруг имелось достаточно много протонов с высокой энергией, которые могли разорвать любое атомное ядро (например, дейтерия, или трития, или $He^3$, или $He^4$) в момент его образования; после этого периода протоны были слишком холодны (имели очень низкие кинетические энергии), чтобы преодолеть взаимные кулоновские барьеры, а все свободно проникающие нейтроны, оставшиеся от ранней горячей стадии, распались на электроны и протоны. Лишь в течение короткого решающего периода от $t \sim 2$ до $t \sim 1000$ с условия были благоприятны для образования элементов. Расчеты Гамова [431], Альфера и Германа [432—434], Ферми и Туркевича [435], Пиблса [436] и Вагонера, Фаулера и Хойла [437] показали, что в течение этого периода 25% барионов во Вселенной должно было превратиться в $He^4$ ($\alpha$-частицы) и приблизительно

4) образование первичных элементов $2\text{ с} \lesssim t \lesssim 1000$ с

[1]) Точнее, температура нейтрино должна быть около 2К, температура гравитонов $\sim$ 1К.—*Прим. ред.*

75% должно было остаться в виде $H^1$ (протонов). Должны быть созданы также следы дейтерия, $He^3$ и Li, однако тяжелые элементы, по существу, не возникали. Все наблюдаемые сегодня тяжелые элементы должны быть созданы позже в звездах (см., например, [438] или [439]). Современные астрономические исследования обилия тяжелых элементов дают некоторую поддержку этим предсказаниям, однако наблюдательные данные пока еще очень неубедительны (см., например, [440] и стр. 268—275 из книги Пиблса [363]).

**5) тепловое взаимодействие вещества и излучения ($1000c \leqslant t \leqslant 10^8$ лет)**

После образования первичных элементов вещество и излучение продолжают взаимодействовать тепловым образом, поддерживая друг у друга одинаковую температуру посредством часто повторяющейся ионизации и рекомбинации атомов. Если бы температуры излучения и вещества не были связаны, излучение охлаждалось бы более медленно, чем вещество (при адиабатическом расширении $T_{\text{изл}} \sim 1/a$, но $T_{\text{вещ}} \sim 1/a^2$). Поэтому тепловое равновесие поддерживалось только путем постоянного переноса энергии от излучения к веществу. Однако теплоемкость излучения была намного больше теплоемкости вещества. Поэтому перенос энергии оказывал пренебрежимо малое влияние на $\rho_{\text{изл}}$, $p_{\text{изл}}$ и $T_{\text{изл}}$. Он поддерживал температуру вещества ($T_{\text{вещ}} = T_{\text{изл}}$), не понижая существенно температуру излучения. С другой стороны, полная масса-энергия вещества была и остается меньше массы покоя. Поэтому перенос энергии почти не влиял на $\rho_{\text{вещ}}$. [Это обстоятельство оправдывает использованное при переходе от уравнения (27.31) к уравнению (27.32) приближение, при котором пренебрегалось переносом энергии.]

**6) рекомбинация плазмы и переход к состоянию, в котором преобладает вещество ($t \sim 10^5$ лет)**

Когда температура, уменьшаясь, достигает нескольких тысяч градусов ($a/a_0 \sim 10^{-3}$, $\rho \sim 10^{-20}$ г/см$^3$, $t \sim 10^5$ лет), наступают два интересных момента: во Вселенной перестает преобладать излучение и она переходит к стадии преобладания вещества [$\rho_{\text{вещ}} = \rho_{\text{вещ.,0}}\,(a_0/a)^3$ начинает превышать $\rho_{\text{изл}} = \rho_{\text{изл.,0}}\,(a_0/a)^4$]; у фотонов оказывается недостаточно высокая энергия, чтобы удержать атомы водорода в ионизованном состоянии, поэтому электроны и протоны начинают быстро рекомбинировать. Грубое совпадение этих событий есть результат того, что энтропия нашей Вселенной, приходящаяся на один барион, имеет определенное, почти сохраняющееся значение

$$s \equiv \text{энтропия на барион} \sim \frac{\text{(число фотонов во Вселенной)}}{\text{(число барионов во Вселенной)}} \sim 10^8.$$

Никому не удалось пока объяснить, почему Вселенная начала расширяться с таким, а не с некоторым другим значением $s$ (например, единицей).

Рекомбинация плазмы при $t \sim 10^5$ лет была решающим событием, поскольку она положила конец взаимодействию и тепловому равновесию между излучением и веществом («отделение

излучения от вещества»). После этого, испытывая рассеяние на очень небольшом количестве свободных электронов (релеевское рассеяние на атомах и молекулах несущественно), фотоны почти свободно распространяются в пространстве. Если бы не процессы вторичной ионизации межгалактической среды, происходившие между $a/a_0 \sim 10^{-3}$ и $a/a_0 \sim 0{,}1$ и сопровождавшиеся освобождением энергии, фотоны распространялись бы свободно с момента рекомбинации плазмы. Даже если происходила вторичная ионизация, фотоны распространялись свободно, по крайней мере с момента $a/a_0 \sim 0{,}1$.

7) последующее распространение фотонов ($t \gtrsim 10^8$ лет)

Расширение Вселенной вызывало красное смещение температуры свободно распространяющихся фотонов в соответствии с законом $T \sim 1/a$ (см. дополнение 29.2). Вследствие этого фотоны сегодня имеют чернотельный спектр с температурой 2,7 К. Они отождествлены с космическим микроволновым излучением, которое было открыто в 1965 г. и дает непосредственную информацию о природе Вселенной в момент их последнего взаимодействия с веществом ($a/a_0 \sim 10^{-3}$, $t \sim 10^5$ лет, если не было вторичной ионизации; $a/a_0 \sim 0{,}1$, $t \sim 5 \cdot 10^8$ лет, если происходила вторичная ионизация).

8) конденсация звезды, галактики и скопления ($10^8$ лет $\leqslant t \leqslant 10^9$ лет)

Вернемся к истории вещества. В период до рекомбинации давление фотонов («упругость космологической жидкости») предотвращает конденсацию однородного вещества (25% $He^4$, 75% H) в звезды, галактики и скопления галактик. Однако после рекомбинации фотонное давление несущественно и может начаться конденсация. Малые возмущения плотности вещества, относящиеся, возможно, к началу расширения, начинают тогда вырастать до все больших и больших значений. Где-нибудь между $a/a_0 \sim 1/30$ и $a/a_0 \sim 1/10$ ($10^8$ лет $\leqslant t \leqslant 10^9$ лет) эти возмущения начинают развиваться в звезды, галактики и скопления галактик. Несколько позже при $a/a_0 \sim 1/4$, по-видимому, «зажигаются» квазары, испуская свет, который астрономы сегодня принимают на Земле (см. дополнение 28.1).

---

### 28.1. Неопределенности в эволюции

УПРАЖНЕНИЕ

Современные наблюдения, предположение о полной однородности и изотропии в начале расширения, допущение того, что избыток лептонов над антилептонами меньше или порядка избытка барионов над антибарионами,— все это налагает следующие пределы на сегодняшние значения космологических параметров.

Современная плотность вещества $= \rho_{\text{вещ.},0}$ заключена в интервале от $10^{-28}$ до $2 \cdot 10^{-31}$ г/см$^3$;
$k = 0$ или $+1$ или $-1$;
температура электромагнитного излучения сегодня $= 2{,}7 \pm \pm 0{,}1$ К,

УПРАЖНЕНИЕ

Полная плотность излучения (наблюдаемые фотоны, нейтрино и гравитоны, которые, вероятно, возникают в горячей модели большого взрыва в тепловом равновесии с фотонами) $= \rho_{\text{изл.}, o}$ заключена в интервале от $0{,}7 \cdot 10^{-33}$ до $1{,}2 \cdot 10^{-33}$ г/см$^3$.

(Неопределенности, которые учитываются в $\rho_{\text{изл.}, o}$, включают в себя: неопределенность, связанную с тем, были ли в ранний период квадрупольные моменты достаточны для того, чтобы создать гравитоны, в полной мере соответствующие тепловому равновесию, и неопределенность, касающуюся числа и статистических весов сортов частиц, находившихся в равновесии в момент отделения гравитонов.) Воспользовавшись уравнениями § 27.10, вычислите неопределенности в эволюционной истории (фиг. 28.1), вызванные этими неопределенностями в знании современного состояния Вселенной.

---

**Дополнение 28.1. ЭВОЛЮЦИЯ ПОПУЛЯЦИИ КВАЗАРОВ**

Тот факт, что крупномасштабные усредненные свойства Вселенной заметно изменяются со временем, можно вывести из данных, полученных при наблюдении квазаров. Короче говоря, оказывается, что при красном смещении $z \approx 2$ во Вселенной квазаров примерно в 50 раз больше, чем при $z \approx 0{,}5$, а при красных смещениях $z > 3$ их существенно меньше или они отсутствуют совсем. (Об использовании красного смещения для характеристики времени, прошедшего с момента большого взрыва, см. дополнение 29.3.) Шмидт [441] приводит следующий более подробный анализ данных [1]).

1. Шмидт с самого начала предполагает, что красные смещения квазаров по происхождению космологические [красное смещение = (постоянная Хаббла) × × (расстояние), см. § 29.2]. Приведем доказательства.
   а. Наблюдения: Некоторые квазары локализованы в скоплениях галактик (об этом свидетельствует как положение на небе, так и одинаковость красных смещений квазара и галактик в скоплении, см. [442]). Поскольку космологический характер соотношения расстояния — красное смещение не вызывает сомнений (дополнения 29.4 и 29.5), то красные смещения этих специфических квазаров *должны* быть космологическими.
   б. Теория: Наблюдаемые красные смещения квазаров ($z \sim 1 \div 3$) не могут быть гравитационными по происхождению; объекты с гравитационными красными смещениями, большими $z \approx 0{,}5$, неустойчивы относительно коллапса (см. гл. 24 и 26 и дополнение 25.9). Маловероятно, чтобы красные смещения квазаров были допплеровскими; можно ли столь массивные объекты ускорить до $v \approx 1$, не разрушив их полностью? Остается единственная возможность — красные смещения квазаров являются космологическими.

---

[1]) Мы даем упрощенный вариант аргументации Шмидта [441]. Читатель, заинтересованный в более точном рассмотрении, должен обратиться к его оригинальной работе.

По этой причине противники космологической гипотезы обычно чувствуют настоятельную необходимость взывать к нарушению в квазарах законов физики в современном их понимании. (См., например, [443] и цитированные там работы. В цитированных работах описаны также свидетельства против космологического предположения, свидетельства, которые некоторые известные исследователи находят неопределенными, однако большинство астрофизиков к 1972 г. не поддерживает эту точку зрения.)

2. Затем Шмидт спрашивает, сколько квазаров $N$ было во Вселенной в момент, соответствующий красному смещению $z$ и абсолютной светимости на единичную частоту $L_\nu$ (2500 Å) на длине волны 2500 Å, измеренной в локально лоренцевой системе отсчета квазара.
3. Имевшихся к 1972 г. данных по квазарам отнюдь не достаточно для однозначного определения $N$ [$z$, $L_\nu$ (2500 Å)]. Однако их *достаточно* для того, чтобы недвусмысленно показать:
   а. *Должна быть* эволюция; число $N$ ($z$, $L_\nu$) должно зависеть от $z$.
   б. Эволюция не может быть присущей в основном светимостям:
   полное число квазаров

$$N_{\text{полн}}(z) \equiv \sum_{L_\nu(2500\text{Å})} N(z, L_\nu)$$

   *должно* заметно изменяться со временем (с $z$).

   в. Если эволюция была обусловлена главным образом полным числом квазаров $N_{\text{полн}}(z)$, т. е. если изменения распределения относительной светимости на 2500 Å

$$f(z, L_\nu) \equiv [1/N_{\text{полн}}(z)]\, N(z, L_\nu)$$

   были бы пренебрежимо малы и если современная Вселенная характеризуется $\sigma_0 = q_0 = 1$ (обозначения см. в гл. 29), тогда данные показывают, что

$$N_{\text{полн}}(z = 2) \approx 50\, N_{\text{полн}}(z = 0{,}5).$$

   Этот крутой подъем кривой числа квазаров при движении назад во времени (и все другие основные особенности наблюдаемого красного смещения квазаров и распределения величин для $z \lesssim 2$) во Вселенной с $\sigma_0 = q_0 = 1$ можно согласовать с одним из законов эволюции

$$N_{\text{полн}}(z) \sim (1 + z)^6,$$

$$N_{\text{полн}}[z(t)] \sim 10^{5(t_0 - t)/t_0}.$$

   Здесь $t_0$ — современный возраст Вселенной, а $t$ — возраст Вселенной при красном смещении $z$.

   г. Если эти законы эволюции экстраполировать за $z \approx 2$ и скомбинировать с наблюдаемой относительной функцией светимости $f(z, L_\nu)$ для квазаров вблизи 18-й видимой величины, то они предскажут, что наблюдатель на Земле *должен видеть* следующие относительные количества квазаров 19-й

и 20-й величин, имеющие красные смещения больше $z = 2{,}5$,

| Закон эволюции | Доля квазаров (в %) с $z > 2{,}5$ | |
|---|---|---|
| | $m = 19$ | $m = 20$ |
| $(1+z)^6$ | 29 | 49 |
| $10^{5(t_0-t)/t_0}$ | 12 | 14 |

К 1972 г. было известно около 30 квазаров слабее $m = 18{,}5$, и только один из них (3%) имеет $z > 2{,}5$. По словам Шмидта, это показывает, «что закон $(1 + z)^6$ для плотности не может быть справедливым вне красных смещений приблизительно $z > 2{,}5$». Шмидт считает, что зависимость $10^{5(t_0-t)/t}$ (которая при $z > 2{,}5$ выходит почти на константу) также находится в очевидном противоречии с наблюдениями, однако он утверждает, что «для подтверждения этого сомнения необходима дальнейшая спектроскопическая работа по слабым квазарам».

Одной из причин осторожности служит трудная проблема устранения из наблюдательных данных «селекционных эффектов». Шмидт, Сэндейдж и другие независимо искали селекционные эффекты, которые могут вызывать искусственное видимое уменьшение числа квазаров при $z > 2{,}5$. Таких эффектов не было найдено. Вот слова Сэндейджа [444]: «Исследовались селекционные эффекты, которые могли бы искусственно вызвать видимое обрезание красных смещений квазаров вблизи $z = 2{,}8$. Если обрезание реально, то это может быть момент рождения первых квазаров, хотя предполагаемое красное смещение неожиданно мало. При $z = 3$ возраст Вселенной с $q_0 = 1$ составляет 89% фридмановского возраста. Оценка наблюдательных селекционных эффектов показывает, что ни один из них не способен вызвать искусственное обрезание [1]).

## § 28.2. МОДИФИКАЦИЯ СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПЕРВИЧНОГО ХАОСА

Стандартная горячая модель большого взрыва отличается необыкновенной силой и хорошим согласием с наблюдениями (обилие первичного гелия; существование, температура и изотропия космического микроволнового излучения; однородность и изотропия Вселенной в больших масштабах; близкое согласие возраста Вселенной, измеряемого временем расширения, и возрастов старейших звезд;...). Однако в 1972 г. она столкнулась с кажущейся трудностью в одном вопросе: образовании галактик. Неясно, будут ли случайные флуктуации в первоначально однородной и изотропной Вселенной создавать (после рекомбинации плазмы) возмущения плотности вещества такой амплитуды, которая достаточна для конденсации галактик. Возможно, что возмущения, которые

[1]) Проблема квазаров не ясна и в 1976 г. Поэтому мы воздерживаемся комментировать высказывания авторов.— *Прим. ред.*

в конечном счете образуют галактики, должны присутствовать в начальном взрывающемся состоянии Вселенной. (Подробный обзор и обсуждение см. в [238], см. также работы, цитированные в § 30.1.)

Разумно ли предполагать небольшую величину начальной неоднородности? Может быть, более разумно допустить или полную однородность (один экстремальный случай), или полный хаос (другой экстремальный случай)?

Что если Вселенная вначале была хаотической?

Таким образом, если идеальная начальная однородность оказывается несовместимой с рождением галактик, то привлекательно испытать «полный начальный хаос», т. е. полностью случайные начальные условия с полным спектром флуктуаций плотности, энтропии и локальной скорости расширения [158, 445]. Мыслима, однако далека от того, чтобы быть доказанной, ситуация, когда в ходе своей последовательной эволюции такая модель Вселенной будет быстро сглаживаться в результате естественных процессов (гл. 30) типа «колебаний перемешанного мира», нейтринной вязкости (см., например, [446]) [1]) и обязанного гравитационной кривизне рождения пар частиц [395]. Превратится ли такая модель после нескольких секунд или еще раньше в почти однородную и изотропную фридмановскую Вселенную, содержащую оставшиеся возмущения, которые как раз достаточны для того, чтобы в конечном итоге сконденсироваться в галактики. Теоретические расчеты пока не продвинуты настолько далеко, чтобы дать ясный ответ. Разумеется, после того как начальный хаос затухнет, если он вообще затухнет, такая модель Вселенной будет эволюционировать в соответствии со стандартной моделью большого взрыва, рассмотренной в предыдущем параграфе.

## § 28.3. ЧТО «ПРЕДШЕСТВОВАЛО» НАЧАЛЬНОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ

Никакая проблема космологии не затрагивает так глубоко основы физики, как вопрос о том, что «предшествовало начальному состоянию» бесконечной (или почти бесконечной) плотности, давления и температуры. И, к сожалению, никакая проблема (в состоянии на 1973 г.) не далека от решения в такой степени, как эта.

Начальная сингулярность и квантово-гравитационные эффекты

Общая теория относительности неумолимо предсказывает, что даже если «начальное состояние» было не гладким, а хаотическим, то оно должно содержать в себе пространственно-временную «сингулярность» некоторого рода (см. [447], а также § 34.6 этой книги). И общую теорию относительно невозможно спроектировать обратным ходом через сингулярность, чтобы сказать, что «предшествовало» сингулярности. Может быть, только разобравшись с кван-

[1]) Этот вопрос подробно проанализирован в серии работ [518—521]; обзор см. в работе [522]. —*Прим. ред.*

товыми гравитационными эффектами (соединив квантовую теорию с классической геометродинамикой), мы когда-нибудь достигнем ясного понимания начального состояния и во всяком случае того, что «предшествовало» ему (см. [312, 448]). Дальнейшее обсуждение этих глубоких вопросов см. в § 34.6, 43.4, в заключительном разделе дополнения 30.1 и в гл. 44.

## § 28.4. ДРУГИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

**Космологические модели, требующие отказа от общей теории относительности**

В этой книге мы ограничились рассмотрением космологии, основанной на общей теории относительности. При отказе от общей теории относительности мы имели бы значительно более широкий набор возможностей, включая

1) стационарную теорию [449, 450], которой не удалось объяснить космическое микроволновое излучение или наблюдаемые эффекты эволюции в радиоисточниках и квазарах (дополнение 28.1);

2) «иерархическую космологию» вещества в асимптотически плоском пространстве-времени, выдвинутую Клейном и Альфвеном [382—384, 389, 390], которая не согласуется с наблюдениями космических и $\gamma$-лучей [391];

3) космологии Бранса — Дикке [451—454], которые одинаковы качественно и почти одинаковы количественно со стандартной горячей моделью большого взрыва.

Однако отказ от общей теории относительности необоснован и неоправдан. В последнее десятилетие экспериментальные основы общей теории относительности существенно укрепились (гл. 38—40), а стандартная горячая модель Вселенной, предсказанная общей теорией относительности, необыкновенно хорошо согласуется с наблюдениями, намного лучше, чем все другие когда-либо предложенные модели!

# 29. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И БУДУЩАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ВСЕЛЕННОЙ

**Эта глава полностью относится к курсу 2. В качестве подготовительного материала к ней необходимо прочитать гл. 27 (идеализованные космологические модели), однако сама данная глава не служит подготовительным материалом для какой-либо из последующих глав.**

## § 29.1. ПАРАМЕТРЫ, КОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮТ СУДЬБУ ВСЕЛЕННОЙ

Сопоставление модели Вселенной с вечным расширением и модели с повторным сжатием

Будет ли Вселенная продолжать расширяться вечно или ее расширение замедлится, она остановится и начнет сжиматься, испытывая имплозию (взрыв внутрь), к состоянию бесконечной (или почти бесконечной) плотности, давления, температуры и кривизны? На этот вопрос пока нет определенного ответа. Поиск ответа — одна из главных задач современной космологии.

Единственный известный способ получить ответ — найти из наблюдений характеристики современного состояния Вселенной; затем, воспользовавшись эйнштейновскими уравнениями поля, рассчитать будущую эволюцию Вселенной. Уравнения поля были уже решены в § 27.10 и 27.11. Из этих решений вытекает следующая взаимосвязь между современным состоянием Вселенной и ее будущим.

Если $\Lambda = 0$ (в соответствии с эйнштейновским твердо устоявшимся принципом простоты):

вечное расширение $\leftrightarrow$ отрицательная или нулевая пространственная кривизна гиперповерхностей однородности, т. е. $k/a_0^2 \leqslant 0$ («открытая» или «плоская» Вселенная);

повторное сжатие $\leftrightarrow$ положительная пространственная кривизна однородных гиперповерхностей, т. е. $k/a_0 > 0$ («закрытая» Вселенная).

Если $\Lambda \neq 0$:

$$\text{вечное расширение} \leftrightarrow \Lambda \geqslant \Lambda_{\text{крит}} \equiv \begin{cases} 0, \text{ если } k \leqslant 0, \\ 4\pi\rho_{\text{вещ.},\,0}\, a_0^3)^{-2}, \text{ если } k > 0, \end{cases}$$

$$\text{повторное сжатие} \leftrightarrow \Lambda < \Lambda_{\text{крит}}.$$

**Параметры, требуемые для предсказания будущего Вселенной:**

Ясно, что для предсказания будущего требуются три параметра: космологическая постоянная $\Lambda$, современное значение параметра кривизны гиперповерхностей однородности $k/a_0^2$ и современная плотность вещества $\rho_{\text{вещ.},\,0}$. Для экстраполяции в прошлое, как это было сделано в предыдущей главе, необходимо, помимо этих величин, знать современную плотность излучения $\rho_{\text{изл.},\,0}$. Однако плотность $\rho_{\text{изл.},\,0}$ слишком мала сегодня и так быстро убывает ($\rho_{\text{изл}} \sim a^{-4}$; $\rho_{\text{вещ}} \sim a^{-3}$), что не может повлиять на выбор между только что перечисленными возможностями.

**1) «параметры теории относительности» $\Lambda$, $k/a_0^2$, $\rho_{\text{вещ.},\,0}$**

Задача о предсказании будущего в таком случае сводится к задаче об измерении «параметров теории относительности» $\Lambda$, $k/a_0^2$ и $\rho_{\text{вещ.},\,0}$.

**2) «наблюдательные параметры» $H_0$, $q_0$, $\sigma_0$**

Приступая к решению этой задачи, лица, занимающиеся экспериментальной космологией, предпочитают заменить три «параметра теории относительности», играющие непосредственную роль в теории относительности, параметрами, которые непосредственно наблюдаемы. Один параметр, связанный с наблюдениями,— сегодняшняя хаббловская скорость расширения, т. е. «*постоянная Хаббла*»

$$H_0 \equiv (a_{,t}/a)_0. \tag{29.1а}$$

Другой — сегодняшний безразмерный «*параметр замедления*»

$$q_0 \equiv -\frac{a_{,tt}}{a}\frac{1}{H_0^2} = -\left(\frac{aa_{,tt}}{a_{,t}^2}\right)_0. \tag{29.1б}$$

И третий — сегодняшний безразмерный «*параметр плотности*»

$$\sigma_0 \equiv \frac{4\pi\rho_{\text{вещ.},\,0}}{3H_0^2}. \tag{29.1в}$$

**3) соотношения между параметрами теории относительности и наблюдательными параметрами**

Соотношения между этими тремя «наблюдательными параметрами» и тремя «параметрами теории относительности» $\Lambda$, $k/a_0^2$ и $\rho_{\text{вещ.},\,0}$ (образующими совместно 6 «космологических параметров») можно найти, используя определения (29.1) и эйнштейновские уравнения поля (27.39), которые, будучи вычисленными в современный момент, гласят

$$\begin{aligned} H_0^2 &= -\frac{k}{a_0^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi}{3}\rho_{\text{вещ.},\,0}, \\ -2q_0H_0^2 &= -H_0^2 - \frac{|k}{a_0^2} + \Lambda. \end{aligned} \tag{29.2}$$

Комбинируя эти уравнения, находим соотношения, приведенные в дополнении 29.1, где также продемонстрирован смысл некоторых значений $\sigma_0$ и $q_0$.

**29.1. Смысл значений параметров** УПРАЖНЕНИЕ

Выведите результаты, цитируемые в дополнении 29.1.

## Дополнение 29.1. СРАВНЕНИЕ НАБЛЮДАТЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ С ПАРАМЕТРАМИ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

### А. Параметры теории относительности

1. Сегодняшняя плотность вещества

$$\rho_{\text{вещ.}, o}.$$

2. Сегодняшняя кривизна гиперповерхности однородности

$$k/a_o^2.$$

3. Космологическая постоянная

$$\Lambda.$$

4. Сегодняшняя плотность излучения $\rho_{\text{изл.}, o}$ (несущественна для современной динамики Вселенной и потому не учитывалась в этой главе).

### Б. Наблюдательные параметры

1. Постоянная Хаббла (современная хаббловская скорость расширения)

$$H_o \equiv (a_{,t}/a)_o.$$

2. Параметр замедления

$$q_o \equiv -\frac{a_{,tt}}{a}\frac{1}{H_o^2}.$$

3. Параметр плотности

$$\sigma_o \equiv \frac{4\pi\rho_{\text{вещ.}, o}}{3H_o^2}.$$

### В. Наблюдательные параметры как функции параметров теории относительности

$$H_o^2 = (8\pi/3)\,\rho_{\text{вещ.}, o} - k/a_o^2 + \Lambda/3, \tag{1}$$

$$q_o = \frac{(4\pi/3)\,\rho_{\text{вещ.}, o} - \Lambda/3}{(8\pi/3)\,\rho_{\text{вещ.}, o} - k/a_o^2 + \Lambda/3}, \tag{2}$$

$$\sigma_o = \frac{(4\pi/3)\,\rho_{\text{вещ.}, o}}{(8\pi/3)\,\rho_{\text{вещ.}, o} - k/a_o^2 + \Lambda/3}. \tag{3}$$

**Г. Параметры теории относительности как функции наблюдательных параметров**

$$\rho_{\text{вещ.},\,0} = (3/4\pi)\,H_0^2\sigma_0, \tag{4}$$

$$k/a_0^2 = H_0^2\,(3\sigma_0 - q_0 - 1), \tag{5}$$

$$\Lambda = 3H_0^2\,(\sigma_0 - q_0). \tag{6}$$

**Д. Смысл определенных значений параметров**

1. $\Lambda = 0$ (в соответствии с эйнштейновской точкой зрения) тогда и только тогда, когда $\sigma_0 = q_0$.
2. Знак $\Lambda$ совпадает со знаком $\sigma_0 - q_0$.
3. Если $\Lambda = 0$, то

а) $q_0 > \frac{1}{2} \leftrightarrow \rho_{\text{вещ.},\,0} > \rho_{\text{крит}} \equiv \frac{3}{8\pi} H_0^2 \leftrightarrow k > 0$ (положительная кривизна; «закрытая» Вселенная)

$\leftrightarrow$ в конечном итоге Вселенная будет сжиматься;

б) $q_0 = \frac{1}{2} \leftrightarrow \rho_{\text{вещ.},\,0} = \rho_{\text{крит}} \equiv \frac{3}{8\pi} H_0^2 \leftrightarrow k = 0$ (нулевая кривизна; «плоская» Вселенная)

$\rightarrow$ Вселенная будет расширяться вечно;

в) $q_0 < \frac{1}{2} \leftrightarrow \rho_{\text{вещ.},\,0} < \rho_{\text{крит}} \equiv \frac{3}{8\pi} H_0^2 \leftrightarrow k < 0$ (отрицательная кривизна; «открытая» Вселенная)

$\rightarrow$ Вселенная будет расширяться вечно.

4. Если $\Lambda \neq 0$, то

а) $\sigma_0 > \frac{1}{3}(q_0 + 1) \leftrightarrow k > 0$ (положительная кривизна; «закрытая» Вселенная),

и в этом случае при

$\sigma_0 - q_0 \geqslant \frac{1}{\sigma_0^2}\left(\sigma_0 - \frac{q_0+1}{3}\right)^3 \leftrightarrow$ Вселенная будет расширяться вечно,

$\sigma_0 - q_0 < \frac{1}{\sigma_0^2}\left(\sigma_0 - \frac{q_0+1}{3}\right) \leftrightarrow$ в конечном итоге Вселенная будет сжиматься;

б) $\sigma_0 = \frac{1}{3}(q_0 + 1) \leftrightarrow k = 0$ (нулевая кривизна; «плоская» Вселенная),

и в этом случае при

$\sigma_0 \geqslant q_0 \leftrightarrow$ Вселенная будет расширяться вечно,

$\sigma_0 < q_0 \leftrightarrow$ в конечном итоге Вселенная будет сжиматься;

в) $\sigma_0 < \frac{1}{3}(q_0 + 1) \leftrightarrow k < 0$ (отрицательная кривизна; «открытая» Вселенная),

и в этом случае при

$\sigma_0 \geqslant q_0 \leftrightarrow$ Вселенная будет расширяться вечно,

$\sigma_0 < q_0 \leftrightarrow$ в конечном итоге Вселенная будет сжиматься.

## § 29.2. КОСМОЛОГИЧЕСКОЕ КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ

**Наблюдаемые особенности космологического красного смещения**

Одной из ключевых особенностей наблюдательных данных, используемых для измерения $H_o$, $q_o$ и $\sigma_o$, является космологическое красное смещение, характеризующее сдвиг в красную сторону спектральных линий, испущенных удаленными от Земли галактиками и принятыми на Земле. Например, линия [OII] λ3727, если она испущена и наблюдается в земной лаборатории, имеет длину волны 3727 Å. Однако, если она испущена звездой в галактике 3C 295 (предположительно с той же самой длиной волны $\lambda_{\text{исп}} = 3727$ Å) и принята на Земле, то измеренная здесь длина волны этой спектральной линии должна быть равна $\lambda_{\text{прин}} = 5447$ Å. Относительное изменение длины волны составляет

$$z \equiv (\lambda_{\text{прин}} - \lambda_{\text{исп}})/\lambda_{\text{исп}} = 0{,}4614 \text{ для 3C 295.} \qquad (29.3)$$

Наблюдения показывают, что космологическое красное смещение в равной степени испытывают все спектральные линии, а не только линии видимого спектра. Так, линия водорода с длиной волны $\lambda = 21$ см, превышающей в 400 000 раз длину волны центральной области видимого диапазона, испытывает красное смещение, которое согласуется (в пределах ошибок измерений) с красными смещениями линий видимого диапазона, соответствующими скоростям удаления порядка $v \sim 0{,}005$; это следует из наблюдений 30 объектов, выполненных Детер, Эпштейном, Лилли и Робертсом [455], и последующих наблюдений Робертса [456].

Из всех когда-либо выдвигавшихся объяснений космологического красного смещения удовлетворительное объяснение дает лишь расширение Вселенной (см. ниже). В разные времена и различными авторами выдвигалась идея, что действует некоторый новый процесс («усталость света»), в котором фотоны на пути от источника к приемнику взаимодействуют с атомами и электронами и тем самым теряют часть своей энергии. Я. Б. Зельдович [457] дает проницательный анализ трудностей любой подобной идеи:

**Почему красное смещение не может быть вызвано «усталостью света»?**

1. «Если потеря энергии вызвана взаимодействием с межгалактическим веществом, то она сопровождается передачей импульса, т. е. изменением направления движения фотона. Это вызвало бы размазывание изображений; удаленная звезда имела бы вид диска, а не точки, а это не то, что наблюдается».

2. «Предположим, что фотон распадается $\gamma \to \gamma' + k$, отдавая небольшую часть своей энергии некоторой частице $k$. Из законов сохранения следует, что частица $k$ должна двигаться в направлении фотона (это, между прочим, позволяет избежать размазывания изображений) и должна иметь нулевую массу покоя. Однако из-за статистической природы процесса некоторые фотоны теряли бы энергии больше,

чем другие, что привело бы к спектральному уширению линий, которое также не наблюдается».

3. Если существует любой такой процесс распада, то простые аргументы специальной теории относительности, которые Зельдович приписывает М. П. Бронштейну и подробно разъясняет, требуют выполнения соотношения

$$\left(\begin{array}{l}\text{вероятность «распада}\\ \text{фотона» за 1 с}\end{array}\right) = \frac{\left(\begin{array}{l}\text{универсальная постоянная}\\ \text{с размерностью } c^{-2}\end{array}\right)}{(\text{частота фотона в } c^{-1})}$$

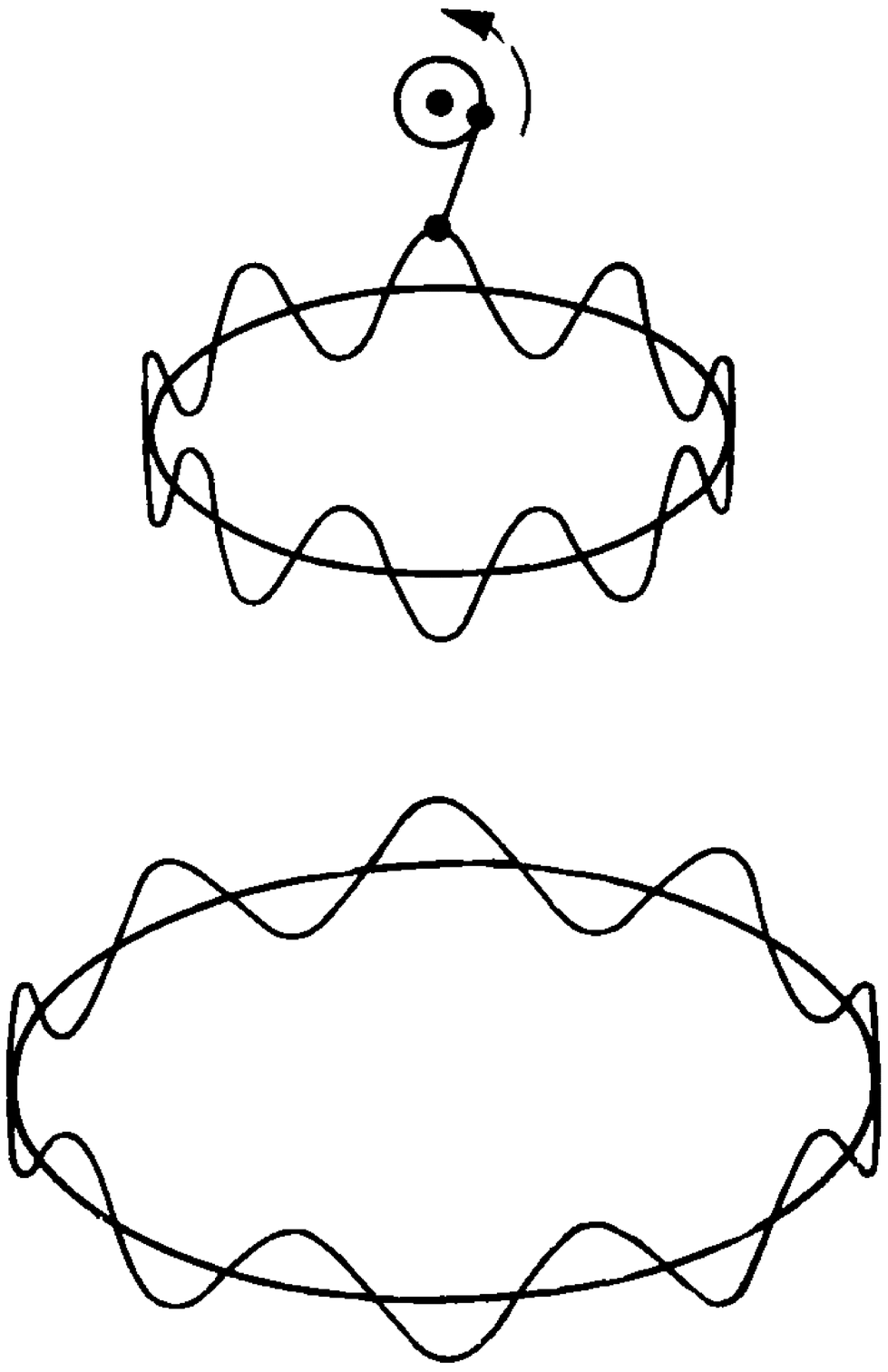
«Таким образом, — заключает Зельдович, — если распад фотона вообще возможен, то фотоны в радиоволнах должны распадаться особенно быстро! Это означает, что должно измениться уравнение Максвелла для статического электрического поля... Экспериментальное указание на существование таких эффектов отсутствует: радиочастотное излучение от удаленных источников проходит к нам ничуть не хуже, чем видимый свет, а красное смещение, измеренное в различных участках спектра, точно одинаково... Поэтому предположения о том, что имеется объяснение красного смещения, отличное от фридмановского, терпит полный провал».

Не последним среди рассуждений, приведших к принятию общего разбегания галактик в качестве объяснения красного смещения, явилось то обстоятельство, что это общее разбегание было предсказано [458] прежде, чем наблюдалось красное смещение [364].

**Вывод формулы для красного смещения:** $\lambda \sim \left(\begin{array}{l}\text{коэффициент}\\ \text{расширения}\end{array}\right)$

Космологическое красное смещение легко понять (фиг. 29.1) в рамках стандартной горячей модели большого взрыва Вселенной. Детальный анализ сосредоточивается на трех процессах: испускание света, распространение света в искривленном пространстве-времени от излучателя к приемнику и прием света. Испускание и прием происходят в собственных системах отсчета (ортонормальных тетрадах) излучателя и приемника, они представляют собой явления, описываемые специальной теорией относительности. В противоположность этому распространение является общерелятивистским процессом, оно определяется законом геодезического движения в искривленном пространстве-времени.

Для расчета всех трех процессов (испускания, распространения и поглощения) необходима система координат. Воспользуемся координатами $(t, \chi, \theta, \phi)$ или $(\eta, \chi, \theta, \phi)$, введенными в гл. 27, и ориентируем оси пространственных координат таким образом, чтобы траектории световых лучей в этой системе координат были простыми. Это лучше сделать, выбрав начало координат ($\chi = 0$), на Земле. Тогда излучающая галактика будет лежать на некотором «радиусе» $\chi_e$ и в некотором угловом положении $(\theta_e, \phi_e)$.




ФИГ. 29.1.
Красное смещение как эффект стоячих волн. В любой замкнутой сферически-симметричной (фридмановской) модели Вселенной отношение длин волн $\lambda_{\text{прин}}/\lambda_{\text{исп}}$ тождественно равно отношению размеров $a_{\text{прин}}/a_{\text{исп}}$. Атом возбуждает $n$-ю моду стоячей волны во Вселенной. При расширении число $n$ остается постоянным, поэтому длины волн растут пропорционально размерам Вселенной. При таком способе рассмотрения непосредственно видно, что красное смещение не зависит от следующих деталей: 1) почему происходит расширение (сферическая симметрия, но произвольное уравнение состояния), 2) однородна или неоднородна скорость расширения и 3) от расстояния между источником и приемником при испускании, при приеме или в любой промежуточный момент времени. Кажется, что соображения, приведенные на схеме, зависят от замкнутости Вселенной (стоячие волны $k = +1$, а не 0 или $-1$). Однако из дальнейшего обсуждения, данного в тексте, видно, что для этого простого результата замкнутости не требуется.

## Космологический линейный элемент

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,[d\chi^2 + \Sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] = \\ = a^2(\eta)\,[-d\eta^2 + d\chi^2 + \Sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)], \quad (29.4\text{а})$$

$$\Sigma = \begin{cases} \sin\chi, & \text{если } k = +1, \\ \chi, & \text{если } k = 0, \\ \operatorname{sh}\chi, & \text{если } k = -1, \end{cases} \quad (29.4\text{б})$$

сферически симметричен относительно $\chi = 0$ (т. е. относительно Земли) независимо от того, равно ли $k$ $-1$, $0$ или $+1$. Следовательно, все геодезические (мировые линии фотонов), которые проходят как через Землю, так и через излучающую галактику, должны быть радиальными

$$\theta = \theta_e, \quad \phi = \phi_e, \quad \chi = \chi(t). \tag{29.5}$$

(Тот, кто хочет воздержаться от любого обращения к симметрии, может исследовать уравнение геодезических в системе координат $(t, \chi, \theta, \phi)$ и обнаружить, что если $d\theta/d\lambda = d\phi/d\lambda = 0$, то и $d^2\theta/d\lambda^2 = d^2\phi/d\lambda^2 = 0$. Следовательно, первоначально радиальная геодезическая будет всегда оставаться радиальной.)

Рассмотрим теперь испускание. Покоящаяся в точке $(\chi_e, \theta_e, \phi_e)$ галактика (движущаяся с «космологической жидкостью») испускает по направлению к Земле в координатные времена $t_{Ae}$ и $t_{Be}$ два последовательных гребня $A$ и $B$ волнового луча. Условлено, что собственное время, измеренное на галактике, совпадает с координатным временем ($t = \tau +$ const в § 27.4 использовалось при построении системы координат). Следовательно, период излучения, фиксируемый излучателем, равен $P_{\text{исп}} = t_{eB} - t_{eA}$, а длина волны при использовании геометризованных единиц совпадает с периодом

$$\lambda_{\text{исп}} = t_{eB} - t_{eA}. \tag{29.6}$$

Далее рассмотрим распространение. Волновые гребни $A$ и $B$ распространяются по нулевым геодезическим. Этот факт дает возможность найти мировые линии волновых гребней $\chi_A(t)$ и $\chi_B(t)$ непосредственно из линейного элемента (29.4): $ds^2 = 0$ означает, что $a(t)\, d\chi = -dt$ («$-$», а не «$+$», так как свет распространяется по направлению к Земле, расположенной в $\chi = 0$). Следовательно, мировые линии имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_e - \chi_A(t \text{ или } \eta) &= \eta - \eta_{eA} = \int_{t_{eA}}^{t} a^{-1}\, dt, \\ \chi_e - \chi_B(t \text{ или } \eta) &= \eta - \eta_{eB} = \int_{t_{eB}}^{t} a^{-1}\, dt. \end{aligned} \tag{29.7}$$

В заключение рассмотрим прием. Приемник на Земле, как и удаленный излучатель, движется с «космологической жидкостью». («Пекулярным движением» Земли относительно жидкости, т. е. движением Земли вокруг Солнца, движением вокруг центра нашей Галактики и т. д. пренебрегаем; его можно учесть посредством обычной допплеровской поправки.) Поэтому для приемника, как и для излучателя, собственное время совпадает с координатным и

$$\lambda_{\text{прин}} = t_{rB} - t_{rA}, \tag{29.8}$$

где $t_{rB}$ и $t_{rA}$ — времена приема последовательных волновых гребней.

Для получения красного смещения теперь достаточно скомбинировать равенства (29.6)—(29.8). Приемник расположен в $\chi = 0$. Поэтому уравнения (29.7) гласят:

$$0 = \chi_e - \int_{t_{eA}}^{t_{rA}} a^{-1}\,dt,$$
$$0 = \chi_e - \int_{t_{eB}}^{t_{rB}} a^{-1}\,dt. \qquad (29.9)$$

Вычитая эти уравнения друг из друга

$$0 = \int_{t_{eB}}^{t_{rB}} a^{-1}\,dt - \int_{t_{eA}}^{t_{rA}} a^{-1}\,dt =$$
$$= \int_{t_{rA}}^{t_{rB}} a^{-1}\,dt - \int_{t_{eA}}^{t_{eB}} a^{-1}\,dt \approx \frac{t_{rB}-t_{rA}}{a(t_r)} - \frac{t_{eB}-t_{eA}}{a(t_e)}$$

и комбинируя с равенствами (29.6) и (29.8), находим

$$\frac{\lambda_{\text{прин}}}{a(t_r)} = \frac{\lambda_{\text{исп}}}{a(t_e)}, \qquad (29.10)$$

т. е.

$$z \equiv \Delta\lambda/\lambda = a(t_r)/a(t_e) - 1. \qquad (29.11)$$

Эти формулы для красного смещения подтверждают простой результат, представленный на фиг. 29.1. При распространении светового луча его длина волны (измеренная наблюдателями, движущимися с «жидкостью») увеличивается прямо пропорционально линейному расширению Вселенной. *Отношение длины волны к коэффициенту расширения $\lambda/a$ остается постоянным.* Важные приложения этого результата см. в дополнениях 29.2 и 29.3.

---

**29.2. Другой вывод формулы для красного смещения** УПРАЖНЕНИЯ

Заметим, что для светового луча линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,d\chi^2,$$

поскольку вдоль его мировой линии $d\theta = d\phi = 0$ (сферическая симметрия!). Считая световой луч состоящим из фотонов с 4-импульсом $\mathbf{p}$, покажите из уравнения геодезических (или, для читателя, изучившего гл. 25, на основании аргументов, связанных

УПРАЖНЕНИЯ

с векторами Киллинга), что

$$p_\chi \equiv \mathbf{p}\cdot(\partial/\partial x)$$

сохраняется вдоль мировой линии фотона. Используя этот факт и то, что 4-импульс фотона равен нулю, $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=0$, а также выражение $E \equiv -\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}$ для энергии, измеренной наблюдателем, движущимся с 4-скоростью $\mathbf{u}$, выведите формулу (29.11) для красного смещения.

### 29.3. Красное смещение дебройлевской длины волны частицы

Частица конечной массы покоя $\mu$ движется вдоль геодезической мировой линии в расширяющейся космологической жидкости. Пусть

$$p \equiv (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p})^{1/2} \equiv \frac{\mu v}{(1-v^2)^{1/2}}$$

— пространственный 4-импульс частицы, измеренный наблюдателями, покоящимися в жидкости. (Обычная скорость, которую они измеряют в своих собственных системах отсчета, равна $v$.) Соответствующая «длина волны де-Бройля» частицы равна $\lambda \equiv h/p$.

а. Покажите, что эта длина волны де-Бройля испытывает такое же красное смещение, что и длина волны фотона

$$\lambda/a = \text{const}.$$

б. Воспользовавшись этим результатом, покажите, что средняя кинетическая энергия молекул идеального газа, заполняющего Вселенную, уменьшается обратно пропорционально $a^2$ в случае нерелятивистского газа и (подобно энергиям фотона) обратно пропорционально $a$ для ультрарелятивистского газа.

---

### Дополнение 29.2. КОСМОЛОГИЧЕСКОЕ КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ РЕЛИКТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В качестве важного приложения формулы красного смещения

$$\lambda/a = \text{const} \qquad (1)$$

[формула (29.10)] рассмотрим излучение, оставшееся от горячего большого взрыва. Поскольку это реликтовое излучение первоначально находилось в тепловом равновесии с веществом, оно имело планковский чернотельный спектр. Последующие взаимодействия с веществом не могут изменить спектр, так как вещество остается в тепловом равновесии с излучением, пока происходят взаимодействия. Однако космологическое красное смещение может и должно изменять спектр. В упраж-

нении 22.17 было показано, что, как следует из кинетической теории, если излучение для одного наблюдателя имеет планковский спектр, то оно имеет планковский спектр для всех наблюдателей, однако наблюдаемая температура сдвинута в красную сторону, точно так же сдвинута в красную сторону частота отдельного фотона. Следовательно, для наблюдателей, покоящихся относительно «жидкости», температура реликтового излучения смещается в красную сторону по закону

$$T \sim 1/a. \qquad (2)$$

Этот закон справедлив после рекомбинации плазмы, когда вещество и излучение отделились, а также до рекомбинации, когда они взаимодействовали. Он справедлив не только для первичных фотонов, но также и для термализованных нейтрино и гравитонов, возникших в горячем большом взрыве.

Формулу (2) для красного смещения можно вывести иначе, используя выражение

$$\rho_{\text{изл}} \sim T^4 \qquad (3)$$

для плотности энергии чернотельного излучения как функции температуры и выражение

$$\rho_{\text{изл}} \sim (\text{объем})^{-4/3} \sim (a^3)^{-4/3} \sim a^{-4}, \qquad (4)$$

описывающее уменьшение плотности энергии при адиабатическом расширении.

### Дополнение 29.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРАСНОГО СМЕЩЕНИЯ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССТОЯНИЙ И ВРЕМЕНИ

*Расстояние*: Если обсуждаемые объекты расположены в земной группе галактик, то астрономы обычно описывают расстояния в световых годах или парсеках. Однако, рассматривая более удаленные объекты (галактики, квазары и т. д.), астрономы находят, что удобнее описывать расстояние через фактически наблюдаемую величину — красное смещение. Например, утверждение «галактика 3С 295 имеет красное смещение 0,4614» означает, что «3С 295 находится на таком расстоянии от Земли [определяемым равенством (29.16)], которое соответствует красному смещению $z = 0{,}4614$».

*Время*: Обсуждая события, произошедшие в течение последних нескольких миллиардов лет, астрономы обычно измеряют время в годах. *Пример*: «Солнечная система сконденсировалась из межзвездного газа $4{,}6 \cdot 10^9$ лет назад» [459]. Однако, рассматривая события, значительно более близкие к началу расширения Вселенной, которые по существу имеют тот же самый возраст около $12 \cdot 10^9$ лет, астрономы находят более удобным описывать время через красное смещение. *Пример*: «Первичная плазма рекомбинировала при красном смещении 1000» означает, что, «если фотон испущен в момент рекомбинации плазмы и с этой поры распространялся свободно, за время между моментом рекомбинации и сегодняшним моментом он испытает полное красное смещение $z = 1000$». Эквивалентно, поскольку $1 + z = (a_0/a)$ [см. выражение (29.11)], «плазма рекомбинировала, когда Вселенная была в $1 + z \approx 1000$ раз меньше современной Вселенной». [*Приложение*: На фиг. 28.1, где кратко изложена прошедшая эволюция Вселенной, можно свободно заменить горизонтальную шкалу $a/a_0$ на $1/(1 + z)$ и тем самым увидеть, что

образование первичных элементов произошло при красном смещении $z \approx 10^9$.] Переход от красного смещения ко времени сильно зависит от параметров $\rho_{\text{вещ.},o}$, $\rho_{\text{изл.},o}$ и $k/a_o^2$ [см. § 27.10 и 27.11, а также уравнение (29.15)].

## § 29.3. СООТНОШЕНИЕ РАССТОЯНИЕ — КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ; ИЗМЕРЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ ХАББЛА

Выражение (29.11) определяет красное смещение через изменение коэффициента расширения в промежутке между событием испускания и событием приема. Для «ближайших» излучателей (излучателей, расположенных на расстояниях, много меньших «хабблов-ской длины» $1/H_o$) удобнее выразить красное смещение через расстояние между излучателем и Землей. Это расстояние («сегодняшнее расстояние») определено на гиперповерхности однородности, которая сегодня проходит через Землю, поскольку эта гиперповерхность сегодня совпадает с поверхностью одновременности приемника, а также локально с поверхностью одновременности для любого наблюдателя, движущегося сегодня с «космологической жидкостью».

**Вывод соотношения расстояние — красное смещение**

Расстояние между излучателем и наблюдателем сегодня [расстояние вдоль пространственной геодезической при постоянных $(t, \theta, \phi)$, соединяющее $(t_r, 0, \theta_e, \phi_e)$ с $(t_r, \chi_e, \theta_e, \phi_e)$] можно получить непосредственно из линейного элемента (29.4)

$$\ell = a(t_r)(\chi_e - \chi_r) = a(t_r)\,\chi_e. \tag{29.12}$$

Воспользовавшись выражением (29.9) для $\chi_e$, находим

$$\ell = a(t_r)\int_{t_e}^{t_r} a^{-1}\,dt. \tag{29.12'}$$

Значение $a(t)$ в недавнем прошлом дается разложением

$$a(t) = a(t_r) + (a_{,t})_{t_r}(t-t_r) + \frac{1}{2}(a_{,tt})_{t_r}(t-t_r)^2 + \ldots =$$

$$= a(t_r)\left[1 + H_o(t-t_r) - \frac{1}{2}q_o H_o^2 (t-t_r)^2 + \ldots\right], \tag{29.13}$$

где использованы определения (29.1) для постоянной Хаббла $H_o$ и параметра замедления $q_o$. Подставляя это разложение в равенство (29.12') и интегрируя, находим следующее выражение для расстояния:

$$\ell = (t_r - t_e) + \frac{1}{2}H_o(t_r - t_e)^2 + \ldots,$$

или, эквивалентно,

$$t_r - t_e = \ell - \frac{1}{2}H_o\ell^2 + \ldots. \tag{29.14}$$

Используя разложение (29.13), можно выразить красное смещение [формула (29.11)] в виде ряда по $t_r - t_e$

$$z = \frac{a(t_r) - a(t_e)}{a(t_e)} = \frac{a(t_r)\left[H_o(t_r - t_e) + \frac{1}{2} q_o H_o^2 (t_r - t_e)^2 + \dots\right]}{a(t_r)\left[1 - H_o(t_r - t_e) + \dots\right]} =$$

$$= H_o(t_r - t_e) + H_o^2\left(1 + \frac{1}{2} q_o\right)(t_r - t_e)^2 + \dots . \qquad (29.15)$$

Комбинируя это с равенством (29.14) для $t_r - t_e$ как функции $\ell$, окончательно получаем

$$z = H_o \ell + \frac{1}{2}(1 + q_o)(H_o \ell)^2 + O([H_o \ell]^3). \qquad (29.16)$$

Результат: соотношение расстояние — красное смещение

Это и есть «*соотношение расстояние — красное смещение*» для стандартной модели большого взрыва Вселенной.

Сравнивая это соотношение расстояние — красное смещение с астрономическими наблюдениями (см. дополнение 29.4, которое лучше всего прочесть после следующего параграфа), Аллан Сэндейдж [358] получает следующее значение для постоянной Хаббла:

Измерение постоянной Хаббла $H_o$

$$H_o = 55 \pm 7 \text{ км/(с·Мпс)}, \qquad (29.17)$$

т. е.

$$H_o^{-1} = (18 \pm 2) \cdot 10^9 \text{ лет}. \qquad (29.18)$$

(*Замечание*: 1 Мпс ≡ один мегапарсек = $3{,}26 \cdot 10^6$ св. лет, или $3{,}08 \cdot 10^{24}$ см.) Указанная здесь неопределенность $\pm 7$ км/(с·Мпс) — это статистическая неопределенность «одна-сигма», связанная с данными по соотношению расстояние — красное смещение. Непонятые на сегодня систематические ошибки могут быть до некоторой степени больше; однако истинное значение $H_o$ почти определенно, с точностью до коэффициента порядка 2, совпадает со значением $H_o^{-1} = 55$ км/(с·Мпс), приводимым Сэндейджом.

Заметим, что если $\Lambda = 0$, то «критическая плотность», разделяющая «закрытую» Вселенную и «открытую» Вселенную, т. е. возможный переход к сжатию и вечное расширение, равна

$$\rho_{\text{крит}} = \frac{3}{8\pi} H_o^2 = 5 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3. \qquad (29.19)$$

Значение критической плотности

(Как описано в дополнении 29.1, $\rho > \rho_{\text{крит}} \leftrightarrow$ «закрытая» модель $\leftrightarrow$ повторное сжатие; $\rho < \rho_{\text{крит}} \leftrightarrow$ «открытая» модель $\leftrightarrow$ вечное расширение.) Сравнение с действительной плотностью будет отложено до § 29.6.

Измерения расстояния недостаточно точны, чтобы дать полезную информацию о параметре замедления $q_o$.

## § 29.4. СООТНОШЕНИЕ ВЕЛИЧИНА — КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ; ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРА ЗАМЕДЛЕНИЯ

Информацию о $q_0$ лучше всего получить, сравнивая видимые величины галактик с их красными смещениями.

Определение видимой величины

В астрономии видимая (болометрическая) величина $m$ объекта определяется формулой

$$m = -2{,}5 \lg (S/2{,}52 \cdot 10^{-5} \text{ эрг/(см}^2 \text{ с)} = \\ = -2{,}5 \lg S + \text{const}, \tag{29.20}$$

где $S$ — поток энергии (энергия в единицу времени на единицу площади), приходящий от объекта на Землю. [Конечно, невозможно измерить поток во всем интервале длин волн $0 < \lambda < \infty$, поэтому выделяют различные видимые величины ($m_U, m_B, m_V, \ldots$), соответствующие потокам в различных интервалах длин волн («$U$» ≡ «ультрафиолет», «$B$» ≡ «голубая» часть спектра, «$V$» ≡ ≡ визуальная часть спектра). Однако эти тонкости слишком далеки от гравитационной физики, чтобы рассматривать их здесь.]

Вывод соотношения величина — красное смещение

Вычислим видимую величину для галактики, обладающей собственной светимостью $L$ и красным смещением $z$. Для упрощения расчетов поместим излучатель в начало пространственных координат ($\chi_e = 0$), а Землю — в точку ($\chi_r$, $\theta_r$, $\phi_r$). (Заметим, что эти положения обратны по сравнению с теми, которые были использованы в § 29.2 при вычислении красного смещения.) Поместим на Земле перпендикулярно падающему лучу фотопластинку площадью $A$. Тогда в момент времени $t_r$ пластинка выделяет крошечный сегмент сферической двумерной поверхности ($t = t_r$, $\chi = \chi_r$; $\theta$ и $\phi$ меняются), проведенной вокруг галактики. Полная площадь 2-сферы, окружающей галактику, равна

$$\mathcal{A} = 4\pi [a(t_r)\, \Sigma(\chi_r)]^2. \tag{29.21}$$

Поэтому отношение площади пластинки к площади 2-сферы составляет

$$\frac{A}{\mathcal{A}} = \frac{A}{4\pi [a(t_r)\, \Sigma(\chi_r)]^2}. \tag{29.22}$$

Пластинка захватывает долю $A/\mathcal{A}$ энергии, проходящей через 2-сферу.

Если бы красное смещение отсутствовало, то мощность, проходящая в момент $t_r$ через всю 2-сферу, была бы точно равна светимости излучателя в момент $t_e$. Однако красное смещение видоизменяет результат в двух пунктах.

1. Энергия каждого фотона, который пересекает 2-сферу, измеренная там в локально лоренцевой системе отсчета жидкости, меньше энергии этого же фотона, измеренной излучателем

$$E_{\text{прин}}/E_{\text{исп}} = \lambda_{\text{исп}}/\lambda_{\text{прин}} = 1/(1+z). \tag{29.23}$$

2. Два фотона с одинаковыми $\theta$ и $\phi$, которые разделены временем $\Delta t_r$, измеренным наблюдателем, стационарным относительно «космологической жидкости» на 2-сфере, с точки зрения наблюдателя, расположенного на излучателе, были разделены более коротким временем $\Delta t_e$

$$\Delta t_r/\Delta t_e = \lambda_r/\lambda_e = 1 + z. \tag{29.24}$$

Светимость $L$, измеренная на источнике, есть сумма энергий $E_{\text{исп}, J}$ индивидуальных фотонов (характеризуемых индексом $J$), испущенных в интервале времени $\Delta t_e$, деленная на $\Delta t_e$:

$$L = (1/\Delta t_e) \sum_J E_{\text{исп.}, J}. \tag{29.25}$$

Мощность, которая пересекает 2-сферу позже в момент $t_r - t_e$, измеренная на 2-сфере наблюдателем, покоящимся относительно жидкости, равна

$$P = (1/\Delta t\ ) \sum_J E_{\text{прин.}, J}, \tag{29.26}$$

где суммирование проводится по тому же самому набору фотонов.

Комбинируя равенства (29.23)—(29.26), мы находим мощность, проходящую через 2-сферу

$$P = L/(1 + z)^2,$$

Через фотопластинку проходит часть этой мощности

$$P_A = \frac{A}{\mathscr{A}} P = \frac{AL}{4\pi \left[(1+z)\, a\,(t_r) \sum (\chi_r)\right]^2},$$

поэтому измеренный на Земле поток равен

$$S = \frac{P_A}{\mathscr{A}} = \frac{L}{4\pi R^2 (1+z)^2}, \tag{29.27}$$

где $R$ — «радиус кривизны» 2-сферы, окружающей излучатель и проходящей через приемник в момент приема:

$$R = a_0 \sum_t (\chi_r - \chi_e) = \begin{cases} a_0 \operatorname{sh} (\chi_r - \chi_e). & \text{если } k = -1, \\ a_0\, (\chi_r - \chi_e), & \text{если } k = 0, \\ a_0 \sin (\chi_r - \chi_e), & \text{если } k = +1 \end{cases} \tag{29.28}$$

[напомним, что, согласно принятым соглашениям, $\chi_e = 0$ и $a_0 = a\,(t_r)$]. Соответствующая видимая величина [выражение (29.20)] имеет вид

$$m = +\,5 \lg [(1 + z)\, R] - 2{,}5 \lg L + \text{const}. \tag{29.29}$$

Чтобы связать видимую величину с красным смещением излучателя, необходимо выразить величину $R$ через $z$. Из уравнения (29.7), описывающего распространение фотона (с обратным знаком, поскольку приемник и излучатель поменялись местами),

известно, что

$$\chi_r - \chi_e = \int_{t_e}^{t_r} a^{-1}\,dt = \int_{1}^{a(t_r)/a(t_e)} \left[\frac{a'}{a(t_r)}\right]\left[\frac{dt}{da}\right] d\left[\frac{a(t_r)}{a}\right], \quad (29.30)$$

а из выражения (29.11) следует

$$z = a(t_r)/a(t_e) - 1.$$

Таким образом,

$$\chi_r - \chi_e = \int_{1}^{1+z} \left[\frac{a}{a(t_r)}\right]\left[\frac{dt}{da}\right] d\left[\frac{a(t_r)}{a}\right]. \quad (29.31)$$

Уравнения (4)—(6) дополнения 29.1 и уравнение (27.40) позволяют выразить функцию $dt/da$ через $a/a(t_r)$ и постоянные $H_0$, $q_0$, $\sigma_0$. Подставляя этот результат в уравнение (29.31) и интегрируя, получаем $\chi_r - \chi_e$ как функцию красного смещения $z$ и космологических параметров $H_0$, $q_0$, $\sigma_0$:

$$\chi_r - \chi_e = |1 + q_0 - 3\sigma_0|^{1/2} \int_{1}^{1+z} \frac{du}{[2\sigma_0 u^3 + (1 + q_0 - 3\sigma_0)\,u^2 + \sigma_0 - q_0]^{1/2}}. \quad (29.32a)$$

Радиус кривизны 2-сферы $R$ находится путем подстановки этого выражения в равенство

$$R = \frac{H_0^{-1}}{|1 + q_0 - 3\sigma_0|^{1/2}} \sum (\chi_r - \chi_e) \quad (29.32б)$$

[формула (29.28) с $a_0$, вычисленным из уравнения (5) дополнения 29.1].

Выражения (29.29) и (29.32) определяют видимую величину $m$ как функцию красного смещения $z$.

В отсутствие космологической постоянной ($\sigma_0 = q_0$; $\Lambda = 0$) интеграл (29.32а) можно выразить через элементарные функции; в результате имеем

$$R = \frac{H_0^{-1}}{q_0^2(1+z)}\left[-q_0 + 1 + q_0 z + (q_0 - 1)\,(2q_0 z + 1)^{1/2}\right] \approx$$

$$\approx H_0^{-1} z\left[1 - \frac{1}{2}(1 + q_0)\,z + O(z^2)\right], \quad (29.33)$$

так что

Результат: соотношение величина — красное смещение

$$m = 5\lg\left[1 - q_0 + q_0 z + (q_0 - 1)\,(2q_0 z + 1)^{1/2}\right] - 2{,}5\lg L + \text{const} \approx 5\lg z + 1{,}086\,(1 - q_0)\,z + O(z^2) - 2{,}5\lg L + \text{const для } z \ll 1. \quad (29.34)$$

(*Замечание*: Коэффициент 1,086 в действительности равен 2,5/ln 10.) В случае ненулевого $\Lambda$ (для $q_0 \neq \sigma_0$) решение в виде

степенного ряда обнаруживает зависимость от $\sigma_o$ только в членах $O(z^2)$ и более высокого порядка:

$$R \approx H_0^{-1} z \Big[ 1 - \frac{1}{2}(1+q_o)\, z + \\ + (\text{поправки } O(z^2), \text{ зависящие от } \sigma_o \text{ и } q_o) \Big], \quad (29.35a)$$

$$m \approx 5 \lg z + 1{,}086\,(1 - q_o)\, z + O(z^2) - 2{,}5 \lg L + \text{const}. \quad (29.35б)$$

Шелдон [460] приводит точное решение для $\Lambda \neq 0$, выраженное через эллиптические функции Вейерштрасса. Точное решение в виде таблиц и графиков см. в работе [461].

Измерение параметра замедления $q_o$

Сравнивая теоретическое соотношение величина — красное смещение, (29.35а), с наблюдениями ярчайших галактик в 82 скоплениях, Аллан Сэндейдж [358, 462, 463] получает следующее значение параметра замедления:

$$q_o = 1{,}0 \pm 0{,}5, \text{ если } \sigma_o = q_o \text{ (т. е. } \Lambda = 0). \quad (29.36)$$

(*Замечание*: 0,5 — это неопределенность в «одну-сигму». Сэндейдж оценивает с 68%-ной достоверностью, что $0{,}5 < q_o < 1{,}5$, и с 95%-ной достоверностью, что $0 < q_o < 2$, — в пренебрежении неизвестными эффектами эволюции.) Наблюдения, ведущие к этому результату и неопределенности, вызванные эффектами эволюции, описаны в дополнении 29.4. В дополнении 29.5 кратко рассказано об Эдвине Хаббле, который заложил основы таких космологических измерений.

---

УПРАЖНЕНИЯ

### 29.4. Вывод соотношения $m(z)$ из статистической физики

Выведите соотношение величина — красное смещение, используя статистическое описание распределения фотонов [ср. уравнение (22.49) и связанное с ним обсуждение].

### 29.5. Сопоставление допплеровского сдвига и космологического красного смещения

а. Рассмотрим в плоском пространстве-времени галактику, движущуюся по направлению от Земли со скоростью $v$ и испускающую свет, который принимается на Земле. Пусть расстояние между Землей и галактикой, измеренное в некоторый определенный момент испускания в связанной с Землей лоренцевой системой отсчета, равно $r$ и пусть допплеровский сдвиг принимаемого в конечном итоге излучения равен $z = \Delta\lambda/\lambda$. Покажите, что поток энергии $S$, принимаемый на Земле, связан с собственной светимостью галактики $L$ соотношением

$$S = \frac{L}{4\pi r^2 (1+z)^4}. \quad (29.37)$$

**УПРАЖНЕНИЯ**

[Читатели курса 2 найдут более удобным использовать статистический формализм равенства (22.49).]

б. Сравните эту формулу для потока с формулой (29.27), в которой красное смещение имеет космологическое происхождение. Почему число коэффициентов $1+z$ в этих двух формулах различно? (Математический ответ: см. уравнение (6.28а) из [207].)

---

**Дополнение 29.4. ИЗМЕРЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ ХАББЛА И ПАРАМЕТРА ЗАМЕДЛЕНИЯ**

**I. Постоянная Хаббла $H_0$**

А. *Цель*: Измерение постоянной Хаббла $H_0$ путем сравнения наблюдательных данных с соотношением расстояние — красное смещение

$$z = H_0 \ell + \frac{1}{2}(1+q_0)(H_0\ell)^2 + O([H_0\ell]^3).$$

Здесь $\ell$ — современное расстояние от Земли до источника; $z$ — красное смещение источника, измеренное на Земле.

Б. *Ключевая трудность*: Соотношение расстояние — красное смещение неприменимо к звездам в нашей Галактике: Галактика гравитационно связана и поэтому не подвергается универсальному расширению. Неприменимо соотношение расстояние — красное смещение и к интервалам между нашей Галактикой и соседними галактиками («Местная группа»); гравитационное притяжение между нашей Галактикой и ее соседями столь велико, что оно существенно отклоняет движения галактик «Местной группы» от универсального расширения. Лишь на масштабах, включающих много галактик (масштабы, на которых каждую галактику или скопление галактик можно представлять себе в виде «частицы пыли», причем пылинки распределены грубо однородно), и только на таких больших масштабах соотношение расстояние — красное смещение должно выполняться с высокой точностью. Однако очень трудно провести надежные измерения расстояний $\ell$ до столь удаленных галактик!

В. *Метод, с помощью которого была измерена постоянная Хаббла* $H_0$ [1]:

1. Цефеиды представляют собой пульсирующие звезды, периоды пульсаций которых (измеренные по колебаниям светоотдачи) тесно связаны с их светимостями $L$, или, эквивалентно, с их абсолютными (болометрическими) величинами $M$

$$M \equiv \left(\begin{array}{c}\text{видимая величина звезды, которую она}\\ \text{имела бы на расстоянии 10 пс} = 32{,}6 \text{ св. лет}\end{array}\right) =$$
$$= -2{,}5 \lg (L/3{,}0\cdot 10^{35} \text{ эрг/с}). \qquad (1)$$

[См. формулу (29.20).] По измерениям в пределах нашей Галактики астрономы получили «соотношение период — светимость» для цефеид.

2. Цефеиды в галактиках ясно видны вплоть до $\sim 4$ Мпс ($4$ Мпс $\equiv 4\cdot 10^6$ пс). В каждой такой галактике измеряются периоды цефеид; затем из соотношения период — светимость выводятся их абсолютные величины $M$; изме-

[1] Ее измерили Сэндейдж и Тамман, как это кратко изложено в работе [358].

ряются их видимые величины $m$ и затем с помощью соотношения

$$m - M = 5 \lg (\ell/10 \text{ пс}) \qquad (2)$$

вычисляются их расстояния $\ell$ от Земли. Таким способом получаются расстояния $\ell$ до всех ближайших галактик, расположенных в радиусе $\sim$4 Мпс от нашей Галактики. К сожалению, такие галактики расположены слишком близко, чтобы принять непосредственное участие в универсальном расширении. (Они входят только в «Местную группу», «группу M81» и «Южную полярную группу».) Таким образом, прежде чем пытаться измерять $H_0$, необходимо продвинуть шкалу расстояний еще дальше.

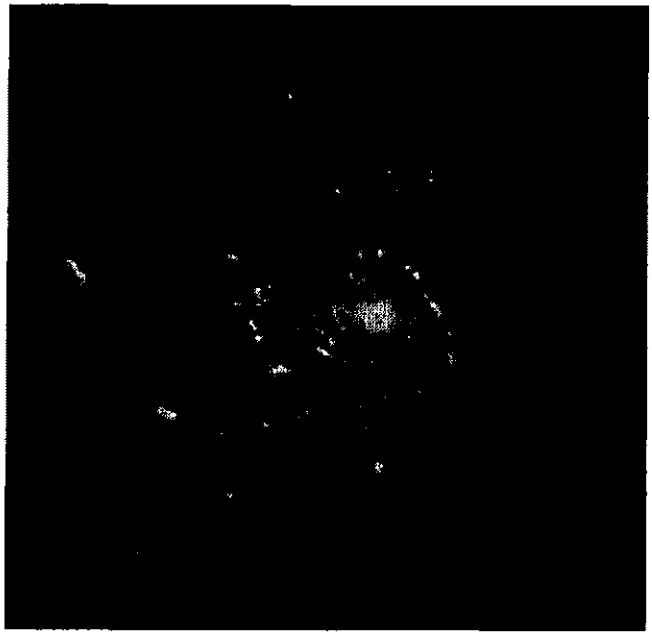
3. Галактики типа Sc, Sd, Sm и Ir, расположенные в пределах $\sim$4 Мпс, содержат гигантские облака ионизованного водорода, которые ярко светятся в $H_\alpha$. Эти облака, называемые «HII областями», обнаруживают очень тесную зависимость между их диаметром $D$ и светимостью $L$ галактики (или, эквивалентно, между $D$ и абсолютной величиной галактики $M$). Фактически для данной светимости галактики $L$ относительный разброс диаметров H II областей составляет $\sigma\,(\Delta D/D) \approx 0{,}12$. Используя а) расстояния ($\lesssim$4 Мпс) до этих галактик, определенные с помощью цефеид, б) видимые величины галактик и в) угловые диаметры H II областей галактик, вычисляют действительные диаметры $D$ этих областей и светимости галактик $L$ и тем самым получают «соотношение диаметр — светимость» $D$ ($L$).
4. H II области достаточно велики, так что их можно ясно различить в галактиках, удаленных на расстояния до $\sim$60 Мпс. Измеряя угловые диаметры $\alpha = D/\ell$ H II областей и видимые (болометрические) величины галактик

$$m = -2{,}5 \lg \left( \frac{L/4\pi\ell^2}{2{,}52 \cdot 10^{-5} \text{ эрг/(см}^2 \cdot \text{с)}} \right) \qquad (3)$$

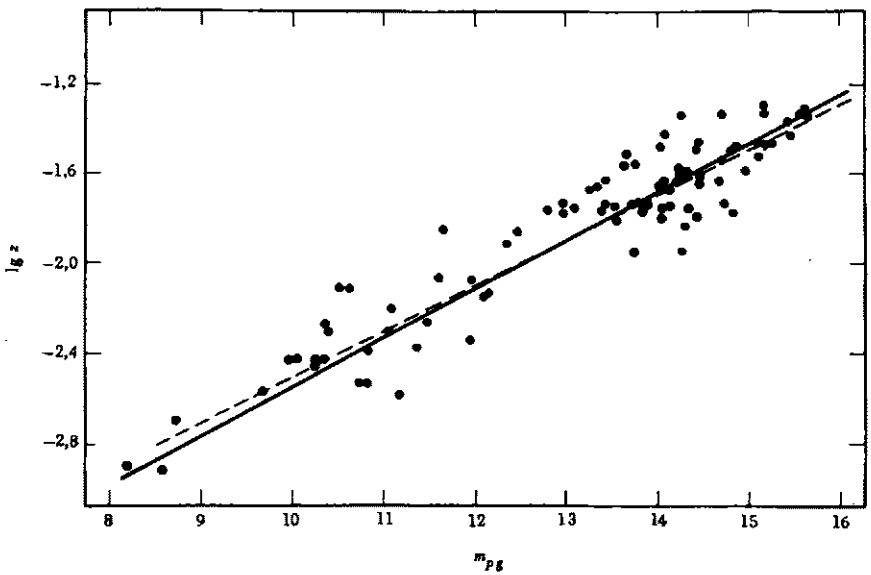
и объединяя это с соотношением диаметр — светимость, получают расстояния $\ell$ до всех галактик типа Sc, Sd, Sm и Ir, которые обладают H II областями и лежат в пределах $\sim$60 Мпс от Земли. К сожалению, это *еще* не столь далеко, чтобы локальные движения были пренебрежимо малы по сравнению с универсальным расширением.
5. Обнаружено, что в пределах $\sim$60 Мпс находится достаточное число галактик типа Sc I, светимости которых (абсолютные величины) почти постоянны (различие в $L$ при переходе от одной Sc I галактики к другой $\leqslant$50%). Используя расстояния до таких Sc I галактик, измеренные с помощью H II областей, и используя их видимые величины, можно вычислить, что абсолютная величина (измеренная фотографически) этих галактик составляет $M_{pq} = -21{,}2$.
6. После этого исследуются все известные Sc I галактики на расстояниях, превышающих $\sim$70 Мпс. Для каждой из них измеряется видимая величина и после сравнения с универсальной абсолютной величиной вычисляется расстояние $\ell$ от Земли. Для каждой измеряется красное смещение $z = \Delta\lambda/\lambda$ спектральных линий. Из получающегося соотношения красное смещение — расстояние, учитывая статистические неопределенности на всех ведущих к нему шагах, Сэндейдж и Тамман (работа выполнена в 1965—1972 гг.; обзор см. в [358]) находят величину

$$H_0 = dz/d\ell = 55 \pm 7 \text{ (км/с) Мпс}^{-1} = 1/[(18 \pm 2) \cdot 10^9 \text{ лет}].$$

Приведенная ошибка чисто статистическая. Систематические ошибки, конечно, больше, однако они почти несомненно вносят коэффициент, не превышающий 2 [т. е. $30 < H_0 < 110$ км/(с·Мпс)].



Фотография Sc*I* галактики M101, расположенной на расстоянии $\ell \sim 3$ Мпс от Земли, полученная на 200-дюймовом телескопе.




Соотношение величина — красное смещение для Sc *I* галактик, расположенных на расстояниях $\gtrsim 70$ Мпс. Сплошная линия получена из наблюдательных данных методом наименьших квадратов; пунктирная линия (теория) имеет наклон, равный 5.

## II. Параметр замедления $q_0$

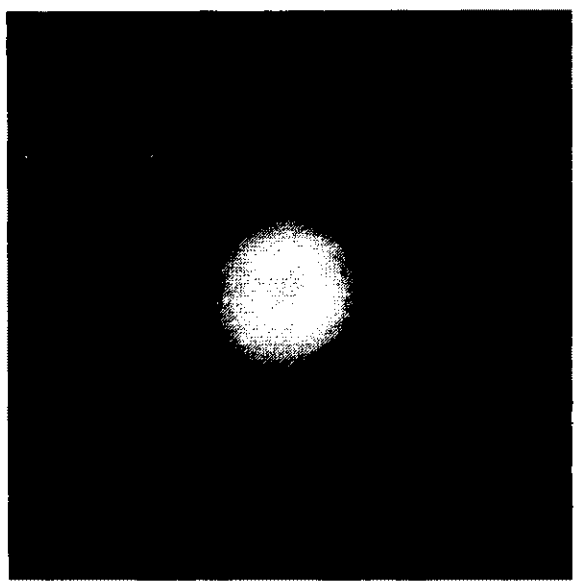
А. *Цель*: Измерение постоянной $q_0$ путем сравнения наблюдательных данных с соотношением величина — красное смещение

$$m = 5 \lg z + 1{,}086\,(1 - q_0)\,z + O\,(z^2) - 2{,}5 \lg L + \text{const.} \qquad (4)$$

[*Замечание*: Это соотношение справедливо, даже если космологическая постоянная не равна нулю, т. е. даже если $\sigma_0 \neq q_0$. Зависимость $m$ от $\sigma_0$ проявляется только при учете членов порядка $O\,(z^2)$ и выше.]

Б. *Ключевая трудность*: Необходимо использовать данные для объектов с одинаковыми абсолютными светимостями $L$ («стандартные свечи»). Однако невозможно измерить $L$ на достаточно больших расстояниях, на которых проявляются эффекты $q_0$.

В. *Поиск стандартной свечи*: Одним из очевидных кандидатов на стандартную свечу могли бы быть Sc I галактики, поскольку они почти все имеют одинаковые светимости $L$ (см. выше). Однако они недостаточно ярки, чтобы их можно было наблюдать на довольно больших расстояниях, на которых проявляются эффекты $q_0$. Альтернативный выбор представляют квазары, которые достаточно ярки, так что их можно наблюдать при очень больших красных смещениях $z$

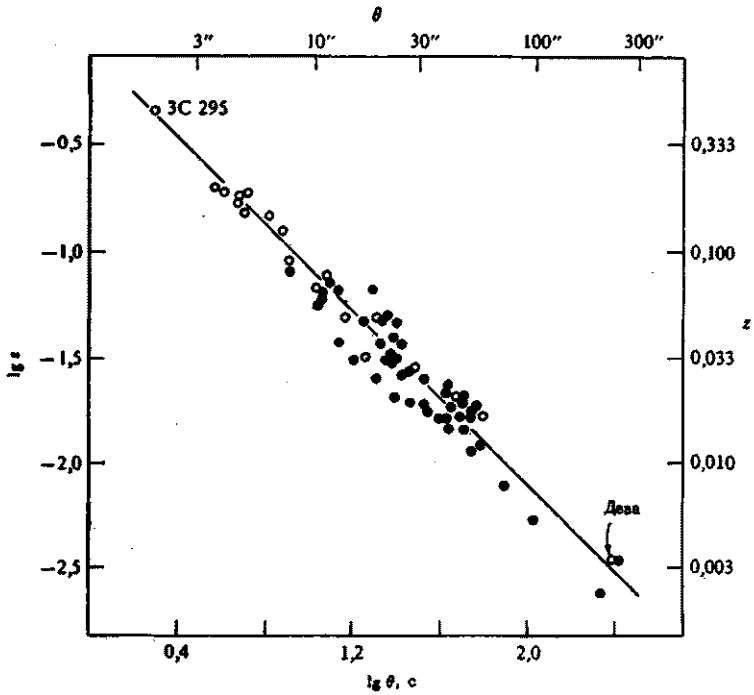


Фотография эллиптической галактики M87, расположенной на расстоянии $\ell \sim 11$ Мпс от Земли, полученная на 200-дюймовом телескопе.

($z$ больше $\sim 3$). Однако их абсолютные светимости имеют огромный разброс; это можно видеть из того, что даже при малых $z$ квазары не ложатся на прямую линию на графике величина — красное смещение. Более подходящими

являются объекты ярчайшего типа, которые имеют небольшой разброс в $L$. Сэндейдж [358, 462, 463] выбирает ярчайшую галактику в «разрешенном регулярном скоплении галактик». Такие скопления составлены преимущественно из эллиптических галактик, а ярчайшие члены в скоплениях этого типа необыкновенно схожи (разброс в $L$ составляет $\sim 25\%$). Схожесть проявляется в их спектрах и очень точных прямых линиях, на которые они ложатся, если их нанести на график зависимости углового диаметра от красного смещения, или видимой величины от красного смещения, или углового диаметра от видимой величины.

Г. *Метод, с помощью которого измерен параметр замедления* $q_0$ [358, 462]




**Зависимость углового диаметра от красного смещения для ярчайшей галактики в разрешенных регулярных скоплениях [358, 463]. (Эти данные недостаточно точны, чтобы дать полезную информацию относительно $q_0$ и $\sigma_0$, однако в будущем может быть достигнута необходимая точность, см. § 29.5.)**

1. Для ярчайшей галактики с 82 разрешенными регулярными скоплениями (см. выше) были собраны данные относительно зависимости величины от красного смещения.
2. Данные ложатся на прямую линию с наклоном

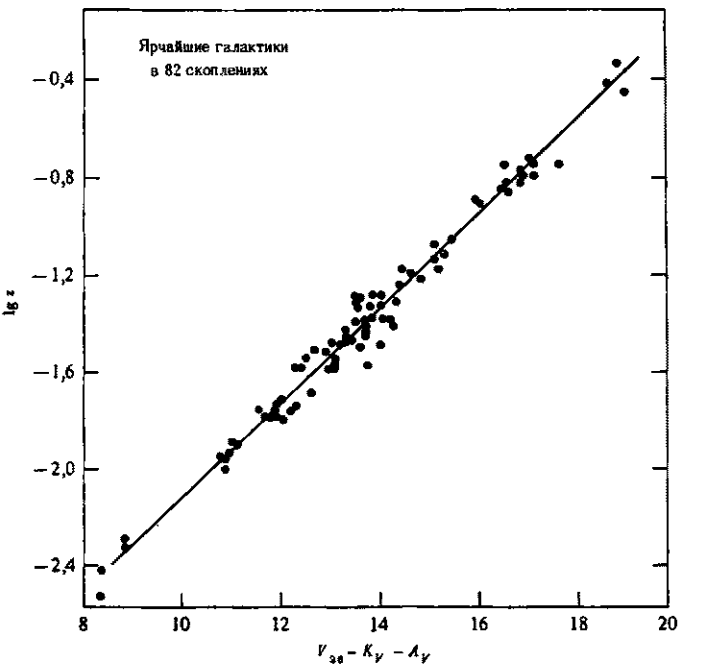
$$dm/d \lg z = 5{,}150 \pm 0{,}268 \quad \text{(среднеквадратичное отклонение)}, \qquad (5)$$

в то время как, согласно теории, наклон равен 5.

3. При сопоставлении этих данных с теоретическим соотношением

$$m = 5 \lg z + 1{,}086\,(1 - q_0)\,z + O(z^2) + \text{const} \qquad (6)$$

[с учетом членов порядка $O(z^2)$ и выше; см. выражения (29.29), (29.32)




Зависимость величины от красного смещения для ярчайшей галактики в разрешенных регулярных скоплениях. $V_{26} - K_V - A_V$ — видимая величина с учетом определенных поправок. Линия, нанесенная на фигуре, соответствует $\sigma_0 = q_0 = 1$ (прямая линия с наклоном, равным 5) [358].

и (29.34)] получаем

$$q_0 = \begin{cases} 1 \pm 0{,}5 & \text{(одна-сигма)}, \\ +1 \pm 1 & \text{(две-сигмы)}, \end{cases} \qquad \text{если } \sigma_0 = q_0\ (\Lambda = 0). \qquad (7)$$

По этим данным невозможно одновременно определить $\sigma_0$ и $q_0$. (При сопоставлении данных члены $O(z^2)$, которые зависят от $\sigma_0$, играют существенную роль. Графическое изображение теоретических эффектов, возникающих от этих членов, см. на фиг. 2 работы Рефсдала и др. [461].)

Д. *Неопределенности эволюции*

1. При сопоставлении данных с теорией, проведенном Сэндиджом, предполагается, что его «стандартные свечи» постоянны во времени. Если из-за эволюции старых и образования новых звезд его галактики должны были тускнеть на 0,09 величины за $10^9$ лет, тогда галактики, расположенные на рас-

стоянии $10^9$ св. лет, которые он наблюдает такими, какими они были $10^9$ лет назад, должны быть на самом деле на 0,09 величины ярче, чем тождественные соседние галактики. Поправка, вносимая этим эффектом, должна понижать наиболее вероятное значение $q_0$ от 1 до 0 [462].

2. Знание эволюции галактик (к 1973 г.) находится в довольно рудиментарном состоянии, так что пока нельзя подтвердить или исключить такой эффект (См. работы, цитированные Сэндейджом [462].) [1])

**Дополнение 29.5. ЭДВИН ПАУЭЛЛ ХАББЛ, 20 ноября 1889 г., Маршфилд, Миссури,— 28 сентября 1953 г., Пасадена, Калифорния[2])**

В возрасте 24 лет Эдвину Хабблу присвоили правовую степень в Оксфордском университете, и он начал юридическую практику в Луизиане, Кентукки. После года практики он был сыт этим по горло и, по его словам, «бросил юриспруденцию в угоду астрономии и знал, что даже если будет второсортным или третьесортным астрономом, только астрономия имеет значение». В качестве места для своего астрономического образования он выбрал Чикагский университет и Йёркскую обсерваторию и три года спустя (в 1917 г.) защитил докторскую диссертацию на тему «Фотографические исследования слабых туманностей».

Когда Хаббл входил в астрономию, подозревали, что некоторые туманности лежат за пределами Галактики, однако доказательств этого почти не было. В течение последующих двух десятилетий Хаббл больше, чем кто-либо другой, помог людям открыть просторы внегалактической Вселенной. Работая с 60- и 100-дюймовыми телескопами на Маунт-Вилсон, Хаббл привел неопровержимые свидетельства в пользу внегалактической природы спиральных туманностей, эллиптических туманностей и нерегулярных туманностей (называемых теперь галактиками). Он придумал схему классификации галактик, которая используется по сей день. Он систематизировал весь предмет внегалактического исследования: определение шкалы расстояний, светимостей, звездных плотностей и пекулярного движения в нашей Галактике; получение обстоятельных доказательств того, что законы физики вне Галактики такие же, как и вблизи Земли (по словам Хаббла: «проверка принципа однородности природы»). Он обнаружил и доказал количественно

[1]) Указанные здесь, а также другие неопределенности делают крайне затруднительным определение таким образом геометрии Вселенной и, следовательно, полной плотности материи $\rho$. Не надежны и другие способы [238]. По-видимому, согласно современным наблюдательным данным, средняя плотность материи во Вселенной не превышает критическую.— *Прим. ред.*

[2]) Это дополнение основано главным образом на биографии Хаббла, данной Мэйоллом [464].

крупномасштабную однородность Вселенной. И (это его самый выдающийся триумф!) он открыл расширение Вселенной.

Детали пионерской работы Хаббла лучше всего отражены в его собственных словах:

*«О природе туманностей известно крайне мало, и вдобавок не была предложена их классификация... Согласие [между скоростью испарения из спиральной туманности и скоростью испарения из нашей Галактики] таково, что это придает некоторую окраску гипотезе, согласно которой спирали представляют собой звездные системы, находящиеся на расстояниях, часто измеряемых в миллионах световых лет».*

1920 г.; докторская диссертация [465]; публикация ее из-за первой мировой войны задержалась на 3 года.

*«Настоящее исследование [использующее цефеиды в качестве индикатора расстояний за пределами Магеллановых Облаков] отождествляет NGC 6822 с изолированной системой звезд и туманностью того же типа, что и Магеллановы Облака, хотя несколько меньшей и значительно более удаленной. Соответствующая структура основана, таким образом, на критерии цефеид, согласно которому размеры, светимости и плотности, как всей системы [NGC 6822], так и отдельных ее членов, определяются значениями величин, которые полностью известны. Единственная новая величина — это расстояние. Таким образом, принцип однородности природы, по-видимому, спокойно властвует в этой удаленной области пространства».*

1925 г. [466]

*«Критические тесты, выполненные на 100-дюймовом рефлекторе, на котором достигнута высочайшая разрешающая способность, не выявляют различия между фотографическими изображениями так называемых «конденсаций в Месье 33» и изображениями обычных галактических звезд... Для 35 цефеид прослеживается соотношение период — светимость, из которого получают расстояние, в 8,1 раза превышающее расстояние до Малого Магелланова Облака. Если использовать для последнего расстояния значение Шепли, то расстояние до спиральной галактики составит приблизительно 263 000 пс».*

1926 г. [467]

*«(В настоящей статье [468]) введена общая классификация туманностей... различные типы [внегалактических туманностей] однородно распределены по небу... В настоящее время имеются данные для получения порядка величины плотности пространства. Это достигнуто благодаря наличию формул для числа туманностей до данной предельной величины и для расстояния как функции величины. [В результате]*

$$\rho = 1{,}5 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3.$$

*Это значение следует рассматривать в качестве нижнего предела, поскольку полностью пренебрегалось неопределенным количеством материала, рассеянного между системами. Среднюю плотность пространства можно использовать для определения размеров конечной, но безграничной Вселенной, опи-*

*сываемой общей теорией относительности*

$$R = \frac{c}{\sqrt{4\pi k}} \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \ldots = 2{,}7 \cdot 10^{10} \text{ пс.»}$$

1926 г. [468]

*«Данные... указывают на линейную зависимость между расстояниями и скоростями [для внегалактических туманностей]. Было получено два решения: в одном использовались 24 индивидуальные туманности, в другом они комбинировались в 9 групп с близким направлением и расстоянием. Результаты таковы... 24 объекта: K = 465 ± 50 км/с на $10^6$ пс; 9 групп: K = 513 ± 60 км/с на $10^6$ пс... Однако выдающаяся особенность — это возможность того, что соотношение скорость — расстояние может представлять эффект де Ситтера и, следовательно, в обсуждения, касающиеся общей кривизны пространства, можно ввести числовые данные».*

1929 г. [364] [1])

*«С учетом новых 40 скоростей соотношение скорость — расстояние пересмотрено... Новые данные охватывают расстояния, приблизительно в 18 раз превышающие расстояние, фигурировавшее в первой формулировке соотношения скорость — расстояние, однако форма соотношения остается неизменной, за исключением изменения единицы расстояния [шеплиевские 10%]».*

1931 г. [469]

*«Известно много факторов, способных вызвать такие эффекты [красные смещения во внегалактических туманностях], однако из всех факторов только один будет вызывать красные смещения, не создавая других эффектов, которые должны были быть заметны, но в действительности не найдены. В этом единственном известном допустимом объяснении считается, что красные смещения вызваны действительным движением от наблюдателя».*

1934 г. [470]

*«Мы имеем теперь беглую схематическую зарисовку некоторых общих характерных свойств наблюдаемой области как целого. Следующим шагом за разведкой должно следовать обследование — необходимо тщательно повторить исследования с точки зрения точности и завершенности. Программа с ударением на методы будет представлять собой утомительный ряд последовательных приближений».*

1934 г. [356]

Бóльшая часть остальной карьеры Хаббла была посвящена этому «утомительному ряду последовательных приближений». Вскоре после смерти Хаббла на Маунт-Паломар вошел в строй 200-дюймовый телескоп, и студент Хаббла Алан Сэндейдж начал использовать его для продолжения хаббловского поиска истинной природы Вселенной. (См. дополнение 29.4.)

---

[1]) Хаббловское значение величины K («постоянной Хаббла») было позже пересмотрено и снижено благодаря работам Бааде и Сэндейджа; см. в дополнении 27.1 стр. 378, 379.

## § 29.5. ПОИСК «ЭФФЕКТА ЛИНЗЫ» ВСЕЛЕННОЙ

Искривленное пространство должно действовать подобно линзе, обладающей большим фокальным расстоянием. Искривление световых лучей мало влияет на видимый размер близлежащих объектов. Однако ожидается, что удаленные галактики — галактики, находящиеся на расстояниях, составляющих от 1/4 до 1/2 пути вокруг Вселенной, имеют сильно увеличенные угловые диаметры [471]. Не может быть и речи о том, чтобы увидеть нормальную галактику на таком большом расстоянии с помощью оптического телескопа. Однако радиотелескопы разрешают особенности в квазизвездных источниках и других радиогалактиках с красными смещениями $z = 2$ или больше. Кроме того, спаренные радиотелескопы, расположенные друг от друга на межконтинентальных расстояниях (например, в Голдстоуне, Калифорния, и Вумере, Австралия), разрешают удаленные источники с точностью, лучшей $0'',001$ или $4{,}8 \cdot 10^{-9}$ рад или 15 св. лет для объекта, находящегося на расстоянии $3 \cdot 10^9$ св. лет (временно предполагается справедливость евклидовой геометрии). Еще лучшее угловое разрешение способна дать система, состоящая из радиотелескопа в космическом пространстве и радиотелескопа на Земле. Способны ли мы найти какую-нибудь опорную характеристику расстояния какого-нибудь класса объектов, которая могла бы служить естественным стандартом длины для очень больших расстояний (от $z = 2$ до $z = 3$), а также для расстояний до близлежащих галактик? Возможно, нет. Однако было бы неразумно не принимать в расчет эту возможность со всеми преимуществами, которые бы она принесла, в свете неоднократно продемонстрированной способности искусных наблюдателей находить закономерности в том месте, где мы не имели права ожидать их заранее.

**Можно ли найти опорную характеристику расстояния для удаленных объектов?**

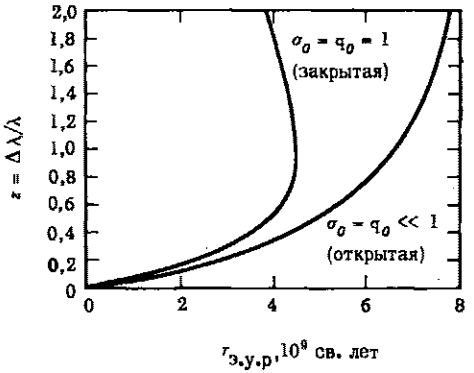
Пусть $L$ означает действительную длину элемента (если он вообще найден), принятого за основу сравнения в галактике, и пусть $\delta\theta$ (радианы!) означает видимую длину объекта в предположении, что он расположен перпендикулярно лучу зрения наблюдателя. Отношение этих двух величин определяет «эффективное угловое расстояние» источника

**Определение эффективного углового расстояния**

$$(\text{эффективное угловое расстояние}) = r_{\text{э. у. р}} = L/\delta\theta. \quad (29.38a)$$

В плоском пространстве и для объектов с нулевой относительной скоростью это расстояние следует отождествить с действительным расстоянием $r$ до источника или с действительным временем $t$ движения света от источника к наблюдателю. В расширяющейся Вселенной положение изменяется.

Для расчета эффективного углового расстояния как функции красного смещения поместим Землю (приемник) в точку $\chi_r = 0$, а исследуемый объект (излучатель) — в точку $\chi_e$. Пусть принятая за основу сравнения длина $L$ лежит на сфере радиусом $\chi_e$ (перпендикулярно лучу зрения) и занимает интервал от $\theta_e$ до $\theta_e + \delta\theta$




ФИГ. 29.2.
Зависимость эффективного углового расстояния от красного смещения для двух типичных космологических моделей: открытой ($0 < \sigma_0 = q_0 \ll 1$) и закрытой ($\sigma_0 = q_0 = 1$); космологическая постоянная в обоих случаях равна нулю и $H_0^{-1} = 18 \cdot 10^9$ лет.

[один конец элемента, принятого за основу сравнения находится в точке $(\chi_e, \theta_e, \phi_e)$, другой — в точке $(\chi_e, \theta_e + \delta\theta, \phi_e)$].
Тогда

$$L = a(t_e)\,\Sigma(\chi_e)\,\delta\theta$$

и

$$r_{в.\,у.\,р} = a(t_e)\,\Sigma(\chi_e) = [a(t_r)\,\Sigma(\chi_e - \chi_r)]\,a(t_e)/a(t_r),$$

**Эффективное угловое расстояние как функция красного смещения**

т. е. [см. выражение (29.28), где $\chi_r$ и $\chi_e$ обменялись местами]

$$r_{в.\,у.\,р} = R/(1+z). \qquad (29.38б)$$

Здесь $R$ как функция красного смещения источника $z$ и космологических параметров $H_0$, $q_0$, $\sigma_0$ дается в общем случае выражением (29.32б) или формулой (29.33), если $\Lambda = 0$. (Выражение (29.38б) видоизменяется, если луч преимущественно пересекает области с низкой плотностью («вакуум между галактиками»); см. формулу (22.37) и работу [472].)

**Эффективное угловое расстояние как средство для определения, замкнута ли Вселенная?**

На фиг. 29.2 показана зависимость эффективного углового расстояния от красного смещения для нескольких выбранных наборов необходимых параметров. Если Вселенная замкнута, то очевидно, что эффективное угловое расстояние имеет максимум, грубо говоря, при красном смещении $z \sim 1$. Однако, если Вселенная открыта, поведение кривой существенно различается (фиг. 29.2). Быстрый прогресс радиоастрономии делает все более привлекательной возможность проверки того, является ли Вселенная замкнутой, как это утверждал Эйнштейн (см. [10], стр. 107, 108). Далее, даже с оптическими телескопами мы находимся (в 1973 г.) на грани измерения $q_0$ по эффективному угловому рас-

стоянию; в предварительных исследованиях [463] предполагается, что в качестве употребительной длины, которую можно принять за основу сравнения, может быть оптический размер ярчайшей из галактик эллиптического типа.

## § 29.6. СОВРЕМЕННАЯ ПЛОТНОСТЬ ВСЕЛЕННОЙ

Измерения средней плотности вещества во Вселенной:

1) светящееся вещество в галактиках

Измерение современной средней плотности вещества во Вселенной $\rho_{\text{вещ.},\,o}$ — задача исключительно трудная. Большое количество вещества может быть в таких формах, которые астрономы еще не ухитрились наблюдать (межгалактическое вещество, черные дыры и т. д.). Поэтому лучшее, что можно сделать, — это сложить все светящееся вещество в галактиках и рассматривать получающееся число в качестве нижнего предела для $\rho_{\text{вещ.},\,o}$. Даже сложение светящегося вещества представляет собой трудную и рискованную задачу, настолько трудную, что по сей день нет более определенного рассмотрения, чем классическая работа Оорта [473]. (См., однако, очень подробный обзор проблемы в гл. 4 книги Пиблса [363].) Результат Оорта

$$\rho_{\text{светящегося вещества}} \sim (2 \cdot 10^{-31}\ \text{г/см}^3) \cdot [H_o/55\ \text{км/(с} \cdot \text{Мпс)}]^2 \qquad (29.39)$$

соответствует

$$\sigma_o \gtrsim 0{,}02 \text{ (независимо от величины } H_o). \qquad (29.40)$$

В качестве примера (хотя и нетипичного) опасности, присущей любой такой оценке, Оорт указывает на скопление галактик в созвездии Дева. Если скопление в Деве не является гравитационно связанным, тогда приблизительно за один миллиард лет его ~2500 галактик, разлетаясь друг от друга, разрушат внешний вид скопления. Если же оно гравитационно связано, зная среднюю скорость галактик скопления друг относительно друга, согласно теореме вириала, можно оценить полную массу скопления. Эта оценка приводит к значению полной массы скопления, в 25 раз превышающему величину массы, полученную по методу Оорта путем сложения светящейся массы скопления.

2) вещество в межгалактическом пространстве

Хотя *определенного* свидетельства за или против наличия большого количества вещества (достаточного для замыкания Вселенной) в межгалактическом пространстве нет, имеются косвенные экспериментальные пределы:

1. Если (в соответствии с Эйнштейном) $\Lambda = 0$, тогда $\sigma_o = q_o$; следовательно, значение параметра замедления, даваемое Сэндейджом $q_o \leqslant 1$, которое при наиболее диких предположениях относительно эволюции галактики можно протянуть до $q_o < 10$, означает, что

$$\rho_{\text{м.г.}} < 10^{-28}\ \text{г/см}^3 \quad (\sigma_o = q_o < 10).$$

2. Готт и Ган [474] указывают, что если плотность газа в межгалактическом пространстве была бы $\geqslant 10^{-30}$ г/см$^3$ (т. е. если бы $\sigma_0$ была бы $\geqslant 0{,}1$), то можно было ожидать падение газа на скопление галактик в созвездии Кома с образованием ударной волны, которая бы сильно излучала в рентгеновском диапазоне. Из современных наблюдений в рентгеновской области можно получить верхний предел на количество такого падающего вещества, а отсюда найти предел на плотность газа в межгалактическом пространстве

$$\rho_{\text{м. г}} \lesssim 10^{-30} \text{ г/см}^3 \quad (\sigma_0 \lesssim 0{,}1).$$

Однако эти пределы, как и другие, полученные иными способами (обзор см. в гл. 4 книги Пиблса [363]) далеки от определенности; пока они столь сильно зависят от теоретических расчетов, что мы не можем чувствовать себя вполне спокойными [1]).

## § 29.7. КРАТКАЯ СВОДКА СОВРЕМЕННЫХ СВЕДЕНИЙ О КОСМОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРАХ

**Краткая сводка наблюдательных параметров Вселенной**

Лучшие из имевшихся к 1973 г. данных приводят [выражения (29.18), (29.36), (29.40)] к следующим значениям для наблюдательных параметров Вселенной:

$$H_0^{-1} = (18 \pm 2)\cdot 10^9 \text{ лет},$$

$$q_0 = 1 \pm 0{,}5 \text{ (одна-сигма)}, \text{ если } \sigma_0 = q_0 \ (\Lambda = 0), \qquad (29.41)$$

$$\sigma_0 \geqslant 0{,}02.$$

Эти числа недостаточны для того, чтобы обнаружить, открыта или замкнута Вселенная и будет ли она расширяться вечно или, в конечном счете, ее расширение замедлится, остановится и Вселенная начнет сжиматься.

**Некоторые качественные достижения космологии**

Если эти сведения разочаровали читателя, он может по крайней мере утешить себя следующим.

1. Имеется отличное согласие между теорией и наблюдением для линейных (малые $z$) частей соотношений расстояние — красное смещение, величина — красное смещение и угловой диаметр — красное смещение (дополнение 29.4).

2. Имеется замечательное согласие между а) возрастом Все-

---

[1]) На возможность большого количества горячего газа между галактиками было указано в работах [403, 517]. Важные ограничения на количество горячего межгалактического газа были даны в работе [523]; обзор наблюдательных данных о количестве труднонаблюдаемых масс во Вселенной см. в [524], важные новые работы о «скрытой» массе вокруг галактик см. в [525, 526]. — *Прим. ред.*

ленной $\left(18\right.$ миллиардов лет, если $q_0 = \sigma_0 \ll 1$, и 12 миллиардов лет, если $q_0 = \sigma_0 = \frac{1}{2}\left.\right)$, вычисленным по измеренной величине $H_0$; б) возрастами старейших звезд ($\sim 10 \cdot 10^9$ лет), вычисленными путем сравнения теории звездной эволюции со свойствами наблюдаемых звезд, в) временем ($\sim 9$ миллиардов лет), прошедшим после ядерного синтеза атомов урана, тория и плутония, найденных на Земле, которое вычислено по измеренным относительным обилиям различных нуклеидов, и г) возрастами (4,6 миллиардов лет) старейших метеоритов и старейших образцов лунных пород, вычисленными по измеренным относительным обилиям других нуклеидов. Более подробно см., например, [459, 475—478].

**Яркие перспективы наблюдательной космологии**

3. Наблюдения космического микроволнового излучения и измерения обилия гелия способны теперь дать непосредственную информацию о физических процессах во Вселенной, имевших место при красных смещениях $z \gg 1$ (гл. 28).

4. Можно найти «длины, принятые за основу сравнения» в радиоисточниках, видимых при $z \gtrsim 1$, с помощью которых по методу углового эффективного расстояния можно измерить $q_0$ и $\sigma_0$ (§ 29.5).

5. Может быть еще раскрыта загадка природы квазаров и их характерного распределения по красным смещениям (большое скопление квазаров при $z \sim 2$, отсутствие их при $z \gtrsim 3$) [1]), и в процессе раскрытия можно получить много новой информации о происхождении структуры Вселенной (дополнение 28.1).

6. Следующее десятилетие вполне может принести столь же много больших наблюдательных сюрпризов и соответствующих новых представлений, сколько их было в прошедшем десятилетии.

## 29.6. Подсчет источников

**УПРАЖНЕНИЯ**

Предположим, что можно найти (чего сделать нельзя) семейство оптических источников или радиоисточников, которые 1) все имеют тождественные внутренние светимости $L$, 2) однородно распределены во Вселенной и 3) рождаются и умирают с одинаковой скоростью, так что число их в единичном сопутствующем координатном объеме навсегда фиксировано.

а. Покажите, что число таких источников $N(z)$ с красными смещениями, меньшими $z$, наблюдаемых сегодня на Земле, было бы равно

$$N(z) = \text{const} \cdot z^3 \left[1 - \frac{3}{2}(1 + q_0)\, z + O(z^2)\right]. \qquad (29.42)$$

[1]) Уже известен квазар с $z \approx 3{,}5$. — *Прим. ред.*

УПРАЖНЕНИЯ

б. Покажите, что число источников $N(S)$ с потоками, превышающими $S$, наблюдаемых сегодня на Земле, составляло бы

$$N(S) = (\text{const})\underbrace{\left(\frac{LH_0^2}{4\pi S}\right)^{3/2}}_{=z^2+O(z^3)}\left[1-3\underbrace{\left(\frac{LH_0^2}{4\pi S}\right)^{1/2}}_{\text{поправки первого порядка, не зависящие от } q_0 \text{ и } \sigma_0}+O\left(\frac{LH_0^2}{4\pi S}\right)\right]. \quad (29.43)$$

(*Ответ*: См. § 15.7 из книги [24].) [1])

### 29.7. Плотность космических лучей [2])

Предположим, что как бы мы неограниченно не уходили в прошлое, Вселенная содержала бы одинаковое число галактик. Предположим далее, что космические лучи во Вселенной рождались в галактиках и что с момента образования деградировала или была потеряна незначительная доля космических лучей. Выведите выражение для средней плотности энергии космических лучей во Вселенной как функцию 1) сегодняшней плотности числа галактик $N_0$ и 2) непостоянной скорости $dE/dz$, с которой средняя галактика порождала космические лучи в течение предыдущей истории Вселенной. [При красном смещении $z$ в интервале $dz$ средняя галактика освобождает в виде космических лучей энергию $(dE/dz)\,dz$.]

### 29.8. Доля неба, покрытая галактиками

Предположим, что красные смещения квазаров являются космологическими. Пусть число галактик на единицу физического объема во Вселенной сегодня равно $N_0$, и пусть с момента времени, соответствующего красному смещению $z \geqslant 7$, галактики не рождались и не разрушались. Пусть $D$ — средний угловой диаметр галактики. Вычислите вероятность того, что свет от квазара с красным смещением $z$ прошел при своем движении к Земле по меньшей мере через одну препятствующую галактику. (Подробное обсуждение этой проблемы см. в [479].)

---

[1]) О реальных подсчетах радиоисточников и значении их для космологии см. в [527]. — *Прим. ред.*

[2]) Задача предложена Мартином Шмидтом.

# 30. АНИЗОТРОПНЫЕ И НЕОДНОРОДНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

**Эта глава полностью относится к курсу 2. Основной текст не требует специальной подготовки, хотя знакомство с гл. 27—29 было бы полезным.**

**Дополнение 30.1 содержит разделы, носящие более технический характер: идеальной подготовкой для их чтения была бы проработка гл. 4, 9—14, 21, 27—29 и § 25.2; минимальной подготовкой были бы упражнения 9.13, 9.14 и 25.2, § 21.8, 27.8, 27.11 и 29.2.**

**Данная глава не служит подготовительным материалом для какой-либо из последующих глав.**

## § 30.1. ПОЧЕМУ ВСЕЛЕННАЯ ТАК ОДНОРОДНА И ИЗОТРОПНА?

В последних трех главах изучались фридмановские космологические модели и была дана относительно удовлетворительная картина Вселенной и ее эволюции. В данной главе описываются менее упрощенные космологические модели, которые используются для того, чтобы приступить к ответу на вопрос: «Почему удовлетворительны очень простые фридмановские модели?» Вопрос предполагает более глубокое расследование, чем первый очевидный ответ, а именно, что модели удовлетворительны, поскольку они не противоречат наблюдениям. Принимая согласие с наблюдениями, мы хотим понять, *почему законы физики должны требовать* (*а не просто позволять*), *чтобы в больших масштабах Вселенная была с высокой точностью однородна и изотропна.* Поскольку пока (в 1972 г.) на этот вопрос нельзя дать определенного ответа, многие читатели предпочтут опустить эту главу при первом чтении и вернуться к ней только после того, как они познакомятся с основными результатами в других областях гравитационной физики, таких, как черные дыры (гл. 33), гравитационные волны (гл. 35—37) и эксперименты в солнечной системе (гл. 40).

**Основание для изучения однородных и анизотропных космологических моделей: почему Вселенная так однородна?**

Излагаемый здесь подход к вопросу «Почему Вселенная обладает такой высокой симметрией?» заключается в описании с помощью уравнений Эйнштейна того, что случилось бы, если бы Вселенная начала расширяться из сильно неупорядоченного состояния.

Первый шаг в этом подходе начинается с вопроса, что случилось бы, если бы в начале расширения Вселенной отклонения от регу-

лярности были малы. Эту проблему можно распутать путем рассмотрения малых возмущений высоко симметричных фридмановских моделей [1]). Такое рассмотрение наиболее плодотворно при обсуждении начал теории образования галактик, оно также позволяет связать малые верхние пределы на сегодняшнюю анизотропию микроволнового фонового излучения с пределами на неоднородности плотности и температуры, которые могли существовать десять миллиардов лет назад, в то время когда было испущено излучение. Эти исследования настолько хорошо описаны в книге Зельдовича и Новикова [238] (см. также работы [480—483] и цитированную там литературу), что здесь мы их опускаем.

Другой подход заключается в том, чтобы допустить большие отклонения от симметрии фридмановских Вселенных, но вложить асимметрию лишь в несколько степеней свободы.

## § 30.2. КАЗНЕРОВСКАЯ МОДЕЛЬ АНИЗОТРОПНОЙ ВСЕЛЕННОЙ

**Метрика Казнера: пример анизотропной Вселенной**

Прототипом космологических моделей с большой асимметрией в нескольких степенях свободы служит метрика Казнера [484]

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1}dx^2 + t^{2p_2}dy^2 + t^{2p_3}dz^2, \qquad (30.1)$$

которую впервые изучили как космологическую модель Гекман и Шюкинг [485]. В этой метрике $p_i$ — постоянные, удовлетворяющие соотношению

$$p_1 + p_2 + p_3 = (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 = 1. \qquad (30.2)$$

Каждая гиперповерхность $t = \text{const}$ такой космологической модели представляет собой плоское трехмерное пространство. Мировые линии постоянных $x$, $y$, $z$ являются времениподобными геодезическими, вдоль которых, как можно представить себе, движутся галактики или другое вещество, рассматриваемые как пробные частицы. Данная модель описывает расширяющуюся Вселенную, поскольку элемент объема

$$\sqrt{-g} = \sqrt{{}^{(3)}g} = t$$

постоянно увеличивается. Однако это анизотропно расширяющаяся Вселенная. Интервал между двумя стандартными (постоянные $x$, $y$, $z$) наблюдателями, если только их координаты $x$ различны, равен $t^{p_1}\Delta x$. Расстояния, параллельные оси $x$, растягиваются с одной скоростью $\ell_1 \sim t^{p_1}$, а расстояния, параллельные оси $y$, могут растягиваться с другой скоростью $\ell_2 \sim t^{p_2}$. Вероятно, наиболее примечателен тот случай, когда вдоль одной из осей расстояния сокращаются, а не растягиваются. Математически

[1]) Теория малых возмущений фридмановской модели была создана Е. М. Лифшицем в 1946 г. [528].— *Прим. ред.*

это сокращение проявляется в том, что в соотношении (30.2) одна из постоянных, скажем $p_1$, должна быть отрицательной:

$$-\frac{1}{3} \leqslant p_1 \leqslant 0. \tag{30.3}$$

Как следствие, если во Вселенной такого рода в момент $t$ было испущено чернотельное излучение, которое в последующем никогда не рассеивалось, более поздние наблюдатели увидели бы голубые смещения вблизи одной пары антиподов на небе и красные смещения в большинстве других направлений. Исходя из этого примера, фундаментальный космологический вопрос можно переформулировать так: почему метрики Фридмана должны быть более точным приближением к реальной Вселенной, чем метрика Казнера?

## § 30.3. АДИАБАТИЧЕСКОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ АНИЗОТРОПИИ

В поисках ответа полезно задать вопрос. Спросим, в частности, во что превратится Вселенная, которая начала расширяться вблизи $t = 0$, причем это расширение описывается метрикой Казнера (30.1). Эта метрика — точное решение вакуумных уравнений Эйнштейна $\mathbf{G} = 0$. Оно приближенно отвечает ситуации, когда члены, связанные с веществом, в уравнениях Эйнштейна пренебрежимо малы по сравнению с типичными ненулевыми компонентами тензора Римана. Гекман и Шюкинг [485] получили решения для случая вещества в виде пылевидной (давление отсутствует) жидкости. В этой ситуации кривизна пустого пространства-времени доминирует как над геометрией, так и над скоростью расширения в ранние моменты времени $t \to 0$, однако после некоторого характеристического времени $t_m$ становятся более существенными члены, связанные с веществом и метрика асимптотически приближается к однородной, изотропной модели с $k = 0$.

**Казнеровская модель с веществом становится изотропной по мере «старения»**

Этот пример иллюстрирует вероятность того, что Вселенная может достигнуть изотропии и однородности в пожилом возрасте, даже если она родилась в сильно неупорядоченном состоянии. Можно ли объяснить симметрию нашей Вселенной таким образом, пока (в 1972 г.) не ясно. Только что упомянутая модель Вселенной — это лишь теоретическое построение, в особенности потому, что критическому параметру $t_m$ можно придать любое, какое бы то ни было значение.

Классическую общерелятивистскую эйнштейновскую физику этой модели можно описать на другом языке [445], приписывая анизотропным движениям в пустом пространстве-времени «эффективную плотность энергии» $\rho_{\text{аниз}}$, которая на равных основаниях с плотностью энергии вещества входит в компоненты $G_{00}$ уравнения Эйнштейна и вследствие этого помогает объяснить рас-

**Энергия анизотропии**

ширение Вселенной:

$$H^2 = \left(\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\ln\sqrt{{}^{(3)}g}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho_{\text{аниз}} + \rho_{\text{вещ}}). \qquad (30.4)$$

Найдено, что плотность энергии анизотропии удовлетворяет уравнению состояния

$$\rho_{\text{аниз}} \sim {}^{(3)}g^{-1} = (\text{объем})^{-2},$$

тогда как

$$\rho_{\text{вещ}} \sim {}^{(3)}g^{-\gamma/2} = (\text{объем})^{-\gamma}.$$

Для пылевидного вещества $\gamma = 1$; для жидкости в форме излучения $\gamma = {}^4/_3$; для нерелятивистского идеального газа $\gamma = {}^5/_3$.

Адиабатическое охлаждение анизотропии

Эта аранжировка уравнения Эйнштейна позволяет считать, что анизотропные движения, подобно тепловым движениям идеального газа при расширении Вселенной, испытывают адиабатическое охлаждение. Поскольку показатель адиабаты $\gamma$ для однородной анизотропии равен 2, анизотропия будет источником «эффективной энергии», преобладающим в высоко сжатом состоянии, тогда как вещество будет преобладать в более разряженном состоянии.

## § 30.4. ВЯЗКАЯ ДИССИПАЦИЯ АНИЗОТРОПИИ

Схематически изображенную выше модель Вселенной можно развить дальше, введя диссипативные механизмы, превращающие энергию анизотропии в тепловую энергию. Предположим, что такая анизотропная Вселенная была в какой-то момент времени наполнена тепловым излучением. Если излучение было бы бесстолкновительным или почти бесстолкновительным, то кванты, движущиеся параллельно сжимающейся оси $x$, испытывали бы голубое смещение и создавали бы распределение энергии, соответствующее высокой температуре. Кванты, движущиеся параллельно другой (расширяющейся) оси, испытывали бы красное смещение и создавали бы распределение энергии, соответствующее низкой температуре. Любые столкновения, имеющие место между этими двумя системами частиц, будут создавать между ними «тепловой контакт» и будут переносить энергию от горячей системы к холодной с соответствующим возрастанием энтропии. В результате возникнет необратимый диссипативный процесс, уменьшающий $\rho_{\text{аниз}}$ и увеличивающий $\rho_{\text{изл}}$ по сравнению с теми значениями, которые они имели бы в условиях адиабатического расширения. (Более подробно см., например, [446]). [1])

Возможно, что как адиабатическое охлаждение анизотропии, так и диссипация анизотропии посредством ее воздействия на газ почти бесстолкновительных квантов играли существенную роль

[1]) См. примечание на стр. 447.— *Прим. ред.*

в эволюции нашей Вселенной. В частности, нейтрино с температурой выше $10^{10}$ К могут благодаря достаточному числу $\nu - e$ рассеяний обеспечить сильную диссипацию в течение первых нескольких секунд жизни Вселенной.

## § 30.5. РОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ В АНИЗОТРОПНОЙ ВСЕЛЕННОЙ

Адиабатическое охлаждение и вязкая диссипация могут не быть главными разрушителями анизотропии в расширяющейся Вселенной. Более мощным может быть другой в высокой степени диссипативный процесс, который может иметь место на очень ранних стадиях, очень близко к начальной «сингулярности». Это процесс рождения частиц; он был впервые рассмотрен де Виттом [486], затем исследован Паркером [487, 488] для изотропных космологических моделей и, наконец, Зельдовичем [393] для анизотропных космологических моделей. В этом процессе мы вновь обращаемся к метрике Казнера как простейшему примеру, однако теперь используем еще квантовомеханические соображения. Мы полагаем, что красные и голубые смещения будут испытывать не только реальные кванты, распространяющиеся в различных направлениях, но также и виртуальные кванты. Вакуумные флуктуации (нулевые колебания) создают определенное минимальное число виртуальных квантов, которые под действием сильных гравитационных полей испытывают красные и голубые смещения. Виртуальные кванты, сдвинувшиеся достаточно сильно в синюю сторону благодаря приобретенной энергии, могут превратиться в реальные частицы. Здесь слова «достаточно сильно» означают — *неадиабатически*.

**Рождение частиц, вызванное анизотропией расширения**

При адиабатическом расширении число частиц не изменяется, хотя энергия каждой частицы изменяется. Этот адиабатический предел в точности соответствует приближению геометрической оптики для волновых уравнений, которое обсуждалось в § 22.5. Там было показано, что если в масштабе длины волны пространство-время не является плоским, то нельзя переходить от волнового уравнения к одночастичному описанию с сохранением числа частиц. Поэтому адиабатическое приближение (приближение геометрической оптики) нарушается в начале расширения Вселенной вблизи сингулярности, когда достигаются большие кривизны.

Количественные следствия нарушения адиабатического приближения вблизи сингулярности рассмотрены Зельдовичем и Старобинским [489], исследовавшими волновые уравнения на фоне метрики Казнера. С классической точки зрения амплитуды волн с частотами, сравнимыми с постоянной Хаббла, для любой данной эпохи увеличиваются быстрее, чем это дает простой расчет голубого смещения (усиление посредством параметрического резонанса). С квантовомеханической точки зрения то же самое уси-

ление в применении к нулевым колебаниям приводит к рождению пар частица — античастица. Расчеты показывают, что эффект значителен на характеристическом времени $t_q = \sqrt{G\hbar/c^5} \approx 10^{-43}$. (Все выполненные таким образом расчеты неадекватны, когда эффект становится сильным, в частности при $t \leqslant t_q$.)

Существенно, что для рождения безмассовых частиц следует постулировать анизотропно расширяющуюся Вселенную (исключение представляют скалярные частицы, для которых рождение происходит уже во фридмановской Вселенной, если только частица не удовлетворяет конформно инвариантному волновому уравнению). В ранний период все изотропные фридмановские Вселенные конформно плоские, так что решения волнового уравнения для поля с нулевой массой покоя могут быть выражены через решения волновых уравнений в плоском пространстве, где рождение частиц отсутствует. Даже в изотропной фридмановской Вселенной имеется некоторое рождение частиц, если частица обладает конечной массой покоя и низкой энергией. Однако, как правило, процесс рождения частиц черпает энергию из энергии анизотропии, превращая ее в энергию излучения.

**Анизотропия может породить материальное содержание нашей Вселенной, погубив себя в этом процессе**

Продолжением пионерской работы Паркера и Зельдовича будет подробное изучение космологических моделей с начальной сингулярностью, в которых квантовые эффекты вблизи момента $t = t_q$ приводят к диссипации всех видов анизотропии и одновременно порождают материальное содержание модели. Эта программа исследования, находящаяся пока в младенческом состоянии, по-видимому, требует экстраполяции законов физики к очень естественно выглядящим, но несообразно малым размерам $\sqrt{G\hbar/c^3} \approx 10^{-33}$ см, или, эквивалентно, очень малым временам $\sqrt{G\hbar/c^5} \approx 10^{-43}$ с [1]).

## § 30.6. НЕОДНОРОДНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

**Неоднородные космологические модели:**

**1) со сферической симметрией**

Все рассмотренные выше модели Вселенной были однородными, хотя и анизотропными. Представляется решающим также изучение неоднородных космологических моделей, в которых метрика нетривиально зависит от пространственных координат. Один класс таких моделей — это сферически симметричные модели Вселенной, в которых плотность вещества, скорость расширения и все другие локально измеряемые физические величины обладают сферической симметрией относительно некоторого избранного начала. Модели такого рода впервые рассматривали Леметр [490, 491],

---

[1]) Важные работы в русле указанных идей выполнены Ю. Б. Зельдовичем, А. А. Старобинским, И. Д. Новиковым и В. Н. Лукашем [529—531]. — *Прим. ред.*

Толман [492] и Датт [493], а также обсуждал Бонди в 1947 г. [494]. Эти модели позволяют изучать возмущения плотности большой амплитуды.

2) с (почти симметричными) гравитационными волнами

Современные средства делают возможным изучение изменяющихся в пространстве возмущений кривизны большой амплитуды с другими симметриями; таким средством служат метрики Гоуди [159, 495]. Эти метрики, представляющие собой точные решения уравнений Эйнштейна, описывают закрытые модели Вселенной с различными топологиями ($S^3$, $S^1 \times S^2$, $T^3$), содержащие гравитационные волны. Форма волны, описываемая этими решениями, по существу произвольна, однако все волны распространяются вдоль одного преимущественного направления и имеют общую поляризацию.

3) вблизи сингулярности с некоторой симметрией или в отсутствие симметрии

Весьма отличающийся от этого подход к пониманию поведения анизотропных и неоднородных решений уравнений Эйнштейна был развит Лифшицем, Халатниковым и их сотр. [1]) Вместо того, чтобы сосредоточиваться на рассмотрении специальных ситуаций в теории Эйнштейна, для которых можно получить точные решения, они пытались изучить по возможности самый общий класс решений, но описать их поведение только в непосредственной окрестности сингулярности. Эти исследования придают большое значение некоторым точным решениям и показывают, что явления, описываемые ими, в действительности типичны для более широких классов решений.

Так, в первом большом классе решений, изученных Лифшицем и Халатниковым [496, 497], было найдено, что вблизи сингулярности решения, отвечающие веществу, не проявляют новых особенностей по сравнению с вакуумными решениями. Кроме того, в этих решениях уравнений Эйнштейна пространственные производные становятся пренебрежимо малыми вблизи сингулярности, откуда следует, что поведение пространства-времени вблизи сингулярности описывается метрикой казнеровского вида [формула (30.1)], однако с различными наборами значений $p_i$ в каждой точке сингулярной гиперповерхности. Впоследствии более полное изучение решений вблизи сингулярности [498] показало, что еще лучшим прототипом поведения решения вблизи сингулярности по сравнению с метрикой Казнера является модель перемешанного мира [158, 499].

## § 30.7. ПЕРЕМЕШАННЫЙ МИР

Перемешанный мир:

1) объяснение «анизотропных колебаний» на основе казнеровской модели

Простейший пример перемешанного мира описан в дополнении 30.1. Он демонстрирует, как вблизи сингулярности казнеровские показатели $p_i$ могут стать функциями времени. Результат проще всего описывается с помощью параметра Лифшица — Халат-

[1]) См. работы [499, 500, 532].— *Прим. ред.*

никова $u$:

$$p_1 = -u/(1+u+u^2),$$
$$p_2 = (1+u)/(1+u+u^2), \qquad (30.5)$$
$$p_3 = u(1+u)/(1+u+u^2).$$

Экстраполируя назад во времени по направлению к сингулярности, находим, что скорости расширения по трем главным направлениям соответствуют скоростям расширения, полученным из метрики Казнера (30.1), причем значения $p_i$ отвечают некоторому фиксированному параметру $u$. В этих моделях перемешанного мира, однако, метрика не зависит от пространственных координат (пространственноподобные гиперповерхности могут, например, иметь ту же топологию 3-сферы, что и закрытые фридмановские модели Вселенной).

Режим казнеровского типа с фиксированным $u$ может быть устойчивым в течение многих декад объемного расширения, прежде чем вступят в игру эффекты пространственных производных метрики. Роль, которую затем играет пространственная кривизна, коротка и решительна. Расширение типа, соответствующего значению параметра $u = u_0$, превращается в расширение типа, соответствующего значению параметра $u = -u_0$ (которое при изменении обозначения осей эквивалентно $u = u_0 - 1$). Экстраполируя еще дальше назад к сингулярности, находим предшествующий период с $u = u_0 - 2$. На всем протяжении полной последовательности $u = u_0$, $u_0 - 1$, $u_0 - 2$, $u_0 - 3$, . . ., с $u_0 \gg 1$ почти все объемное расширение обусловлено расширением по 3-му направлению, тогда как 1- и 2-е направления изменяют его незначительно, вызывая на каждом шагу попеременные расширения и сжатия. Однако при достаточно далекой экстраполяции в прошлое такая последовательность приводит к значению $u$, расположенному в интервале от 0 до 1. Это значение посредством преобразования $u \to 1/u$, которое ведет к перемене обозначений осей 2 и 3, может быть интерпретировано как начальная точка для другой, аналогичной последовательности.

Экстраполяция эволюции Вселенной назад по направлению к сингулярности при $t = 0$ демонстрирует, следовательно, чрезвычайно сложное поведение решения, при котором аналогичные, однако не точно тождественные последовательности режимов повторяются бесконечное число раз. В функции временной переменной, которая приближенно равна $\lg(\lg t^{-1})$, эти режимы являются квазипериодическими. В общем примере, к которому ведут методы Лифшица — Халатникова, мы имеем метрику, асимптотическое поведение которой вблизи сингулярности в каждой точке сингулярной гиперповерхности описывается режимом, характерным для перемешанного мира, однако главные оси расширения на каждом шагу изменяют свои направления и меняются ролями (характеризуемыми параметром $u$), а параметры перемешанного мира изменяются в пространстве. (Более подробно см. [500—503].)

**2) как прототип общего поведения решений вблизи сингулярностей**

Имеются ли другие общие типы поведения решений вблизи сингулярностей?

Однако еще не известно (1972 г.), существуют ли важные решения или классы решений космологической проблемы, асимптотическое поведение которых вблизи сингулярности *не* описывается общим решением Лифшица — Халатникова. Трудность, препятствующая здесь определенной оценке, заключается в том, что Лифшиц и Халатников используют существенно локальные методы, ограничивающиеся рассмотрением отдельного куска координатного пространства, тогда как желаемая оценка ставит существенно глобальный вопрос. Глобальные подходы (описываемые в гл. 34) не дали, однако, сколь-нибудь сравнимого описания природы сингулярности, необходимость которой они доказывают. Попытка проложить мост между этими различиями в методе и содержании предпринята в работе Иадли, Лианга и Сакса [504].

### Дополнение 30.1. МОДЕЛЬ ПЕРЕМЕШАННОГО МИРА

Модель перемешанного мира — ценный пример. Как описано в § 30.7, поведение этой модели вблизи сингулярности иллюстрирует большинство особенностей многих известных общих примеров. В частности, она показывает, как вблизи космологической сингулярности проявляются свойства пустого пространства, делающие его похожим на упругое твердое тело.

Математический подход к этому примеру, приведенный в данном дополнении, иллюстрирует также некоторые важные приемы использования вариационных принципов для уравнений Эйнштейна с целью объяснения решения этих уравнений. Модель перемешанного мира можно использовать также для получения простых примеров суперпространственных представлений и квантовых формулировок законов тяготения [505].

#### Обобщенная модель Казнера

Чтобы продвинуться от казнеровского примера космологической сингулярности (30.1) к модели перемешанного мира, необходимо осуществить два обобщения. Первое заключается в том, чтобы допустить более общую зависимость от времени, сохраняя в то же время простоту условий (30.2), наложенных на показатели $p_i$. Отметим, что эти показатели удовлетворяют, например, тождеству

$$p_2 \equiv d \ln g_{22}/d \ln g.$$

Поэтому мы приходим к тому, чтобы параметризовать пространственную метрику $(3 \times 3)$:

$$g_{ij} = e^{2\alpha} (e^{2\beta})_{ij}, \tag{1}$$

или, эквивалентно,

$$(\ln g)_{ij} = 2\alpha\delta_{ij} + 2\beta_{ij},$$

где $\beta_{ij}$ — симметричная матрица $(3 \times 3)$, не имеющая следа, а экспонента представляет собой матричный степенной ряд, поэтому $\det e^{2\beta} = 1$ и

$$\sqrt{g} = e^{3\alpha}. \tag{2}$$

Только для целей этого параграфа определим матрицу $p_{ij} = d\,(\ln g)_{ij}/d \ln \det g$. Тогда из выражений (1) и (2) получаем

$$p_{ij} = \frac{1}{3}\left[\delta_{ij} + (d\beta_{ij}/d\alpha)\right];$$

поэтому одно из казнеровских условий

$$1 = \sum_i p_i \equiv \operatorname{Sp} p_{ij} = 1 + \frac{1}{3}\operatorname{Sp}(d\beta/d\alpha) \tag{3}$$

в силу того, что $\operatorname{Sp} \beta_{ij} = 0$, превращается в тождество. Второе условие на казнеровские показатели

$$\operatorname{Sp}(p^2) = 1$$

благодаря выражению (3) превращается в $(d\beta_{ij}/d\alpha)^2 = 6$. Это не тождество, а следствие уравнений Эйнштейна в пустом пространстве. Для метрики (Бианки тип I)

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\alpha}\,(e^{2\beta})_{ij}\,dx^i\,dx^j \tag{4}$$

и в случае, когда матрица $\beta_{ij}$ диагональна, уравнения Эйнштейна имеют вид

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\left[T^{00} + \frac{1}{16\pi}(d\beta_{ij}/dt)^2\right] \tag{5}$$

и

$$e^{-3\alpha}\frac{d}{dt}\left(e^{3\alpha}\frac{d\beta_{ij}}{dt}\right) = 8\pi\left(T_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}\right) \tag{6}$$

плюс еще избыточное уравнение, включающее $T_{kk}$, и уравнение $T_{0k} = 0$. [Компоненты тензора энергии-импульса относятся здесь к ортонормальной системе отсчета с базисными 1-формами $\omega^i = e^{\alpha}\,(e^{\beta})_{ij}\,dx^j$.] Из уравнения (5) немедленно получаем формулу для эффективной плотности энергии анизотропии типа I, дающей вклад в постоянную Хаббла $H = d\alpha/dt$ на равных основаниях с плотностью энергии вещества [уравнение (30.4)]:

$$\rho_{\text{аниз (I)}} = (c^3/16\pi G)\,(d\beta_{ij}/dt)^2. \tag{7}$$

Аналогично, для случая жидкости (изотропные давления) члены, связанные с напряжениями, в уравнении (6) исчезают, и мы получаем $\rho_{\text{аниз (I)}}\,e^{6\alpha} = \text{const}$ [см. выражение, следующее за уравнением (30.4)]. Казнеровское условие $\sum p_i^2 = 1$ или $(d\beta_{ij}/d\alpha)^2 = 6$ вытекает из уравнения (5), как только $T^{00} \ll \rho_{\text{аниз}}$.

Если матрица $\beta_{ij}$ — диагональная, она имеет только две независимые компоненты, которые иногда удобно определить в явном виде с помощью параметризации

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \\ \beta_{22} &= \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-, \\ \beta_{33} &= -2\beta_+. \end{aligned} \tag{8}$$

Казнеровское условие $(d\beta_{ij}/d\alpha)^2 = 6$ в этом случае принимает вид

$$(d\beta_+/d\alpha)^2 + (d\beta_-/d\alpha)^2 = 1. \tag{9}$$

$\beta_\pm$ связаны с казнеровскими показателями $p_i$ или с параметром $u$ из уравнений (30.5) соотношениями

$$d\beta_+/d\alpha = \frac{1}{2}(1-3p_3) = -1+(3/2)(1+u+u^2)^{-1},$$
$$d\beta_-/d\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}(p_1-p_2) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}(1+2u)(1+u+u^2)^{-1} \tag{10}$$

**Введение пространственной кривизны**

Делая первый шаг в обобщении метрики Казнера, мы сосредоточили свое внимание на «скорости» $\beta' \equiv (d\beta_+/d\alpha,\ d\beta_-/d\alpha)$, которая представляет собой производную от анизотропии по расширению. Под влиянием вещества или, как будет вскоре показано, пространственной кривизны величина $\| \beta' \|$ может отклониться от казнеровского единичного значения. Второй шаг в обобщении состоит в том, чтобы ввести пространственную кривизну. Этого можно достичь простым способом, сохраняя метрические коэффициенты уравнения (1), но применяя их в неголономном базисе. Воспользуемся базисными векторами, введенными в упражнениях 9.13 и 9.14, посвященных группе вращения SO (3), дуальные 1-формы которых имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma^1 &= \cos\psi\, d\theta + \sin\psi \sin\theta d\phi,\\ \sigma^2 &= \sin\psi\, d\theta - \cos\psi \sin\theta d\phi,\\ \sigma^3 &= d\psi + \cos\theta d\phi,\end{aligned} \tag{11}$$

и образуем метрику

$$ds^2 = -N^2\, dt^2 + e^{2\alpha}\,(e^{2\beta})_{ij}\,\sigma^i\sigma^j, \tag{12}$$

где $N$, $\alpha$ и $\beta_{ij}$ — функции только $t$. Если $\alpha = 0 = \beta_{ij}$, то трехмерная пространственная метрика из (12) сводится к метрике, изученной в упражнении 13.15, которая обладает самой высокой симметрией в пространстве группы SO (3). Просто связанное покрытие пространства имеет топологию 3-сферы и получается, если, расширив область значений эйлерова угла $\psi$, придать ему период $4\pi$ [SU (2) (или спин $^1/_2$; покрытие группы вращений]. При $N = 1$, $\frac{1}{2}a = e^{\alpha}$ и $\beta_{ij} = 0$ мы получаем из (12) ту же самую метрику (в других координатах), которая рассматривалась в упражнении 14.4 и в гл. 27 при обсуждениях закрытой фридмановской космологической модели. Отличие $\beta_{ij}$ от нуля позволяет иметь различные длины окружностей на больших кругах 3-сферы в каждом из 3-х взаимно ортогональных главных направлений, нарушая таким образом изотропию 3-сферы, но не ее однородность.

Рассмотрим только случай диагональной матрицы $\beta_{ij}$, воспользовавшись выражениями (8). Тогда уравнение Эйнштейна для $T^{00}$ принимает вид (в качестве координатно-временного условия выбрано $N = 1$)

$$3\,(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_+^2 - \dot{\beta}_-^2) + \frac{1}{2}\,({}^{(3)}R_{\mathrm{IX}}) = 8\pi T^{00}; \tag{13}$$

это уравнение отличается от уравнения (5) только членом

$${}^3R_{\mathrm{IX}} = \frac{1}{2}\,e^{-2\alpha}\,\mathrm{Sp}\,(2e^{-2\beta} - e^{4\beta}). \tag{14}$$

Член (14) [см. уравнение (21.92)] представляет собой скалярную кривизну трехмерного сечения $t = \mathrm{const}$ [которое имеет свойства симметрии, известные как «Бианки типа IX» в применении к метрикам (11) и (12)]. Если интерпретировать

уравнение (13) через плотность энергии анизотропии, дающей вклад вместе с $T^{00}$ в объемное расширение $\dot{\alpha}^2$, то тогда появятся не только члены $\dot{\beta}^2$ типа кинетической энергии [как в уравнениях (5) и (7)], но также и член типа потенциальной энергии. Этот член показывает, что отрицательная скалярная кривизна, которую можно создать анизотропией ($\beta \neq 0$), эквивалентна положительной потенциальной (или «внутренней») энергии, кроме того, он позволяет предположить, что пустое пространство обладает свойствами, делающими его похожим на упругое твердое тело, оказывающее сопротивление сдвиговым деформациям. Более детальный анализ, который следует далее, показывает, что если скалярная кривизна положительна, то она всегда пренебрежимо мала вблизи сингулярности.

Однако в этой замкнутой Вселенной из-за больших сдвиговых деформаций ($\dot{\beta}$) вблизи сингулярности возникают отрицательные кривизны, которые становятся настолько большими, что останавливают одно казнеровское движение [величина $u$ и т. д. уравнения (10)] и заменяют его другим.

Эти условия и дальнейшие детали эволюции во времени перемешанного мира (11) и (12) требуют в принципе изучения всех уравнений Эйнштейна, а не только уравнения (13) для $T^{00}$. Однако, как описано в гл. 21, это уравнение связи ($T^{00}$) является основным и фактически при подходящей формулировке полностью включает в себя все содержание уравнений Эйнштейна.

### Вариационные принципы

Одна из адекватных формулировок, принятая здесь, включает в себя рассмотрение уравнения (13) не как уравнения энергии (содержащего скорости), а как гамильтониана (содержащего импульсы). Возьмем эйнштейновский вариационный принцип (21.15) в форме АДМ, (21.95), и выполним интегрирование по пространству, используя

$$\int \sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge \sigma^3 = \int \sin\theta \, d\phi \wedge d\theta \wedge d\psi = (4\pi)^2;$$

в результате получим интеграл действия в виде

$$I = (\pi) \int \left\{ \pi^{ij} dg_{ij} + Ne^{3\alpha} \left[ {}^3R_{\text{IX}} + e^{-6\alpha} \left( \frac{1}{2} (\pi^{\ell}_{\ell})^2 - \pi^{ik}\pi_{ik} \right) \right] dt \right\}. \tag{15}$$

Если ввести для $g_{ij}$ специальную форму (1) и (8), то удобно также параметризовать диагональную матрицу $\pi^i{}_k$ следующим образом:

$$\begin{aligned} p_\alpha &= (2\pi)\, \pi^k{}_k, \\ p^i{}_k &= (2\pi) \left( \pi^i{}_k - \frac{1}{3} \delta^i{}_k \pi^{\ell}{}_{\ell} \right), \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} 6p^1{}_1 &= p_+ + p_- \sqrt{3}, \\ 6p^2{}_2 &= p_+ - p_- \sqrt{3}, \\ 6p^3{}_3 &= -2p_+ \end{aligned} \tag{17}$$

[см. равенство (8)]. В результате находим

$$I = \int p_+ \, d\beta_+ + p_- \, d\beta_- + p_\alpha \, d\alpha - \frac{Ne^{-3\alpha}}{24\pi} \left[ -p_\alpha{}^2 + p_+{}^2 + p_-{}^2 - 24\pi^2 e^{6\alpha} ({}^3R_{\text{IX}}) \right] dt.$$

Для дальнейшего изучения этот интеграл удобно преобразовать следующим образом.
Запишем

$$ {}^3R_{\mathrm{IX}} = \frac{3}{2}\, e^{-2\alpha}(1-V), \tag{18} $$

где

$$ V = V(\beta) = \frac{1}{3}\,\mathrm{Sp}\,(1 - 2e^{-2\beta} + e^{4\beta}), \tag{19} $$

поэтому $V(0) = 0$; выберем нуль $\alpha$ ($\alpha \to \alpha - \alpha_0$) так, чтобы $e^{2\alpha} \to (6\pi)^{-1}\, e^{2\alpha}$. Тогда *метрика примет вид*

$$ ds^2 = -N^2 dt^2 + (6\pi)^{-1} e^{2\alpha}\, (e^{2\beta})_{ij} \sigma^i \sigma^j, \tag{20} $$

*а для вариационного интеграла* будем иметь

$$ I = \int p_+\, d\beta_+ + p_-\, d\beta_- + p_\alpha\, d\alpha - (3\pi/2)^{1/2} N e^{-3\alpha} \mathscr{H}\, dt, \tag{21} $$

где

$$ 2\mathscr{H} = -p_\alpha{}^2 + p_+{}^2 + p_-{}^2 + e^{4\alpha}(V-1). \tag{22} $$

*Требование, чтобы $\delta I = 0$ для произвольных независимых вариаций $p_\pm$, $p_\alpha$, $\beta_\pm$, $\alpha$, $N$, приводит к уравнениям Эйнштейна.* Варьируя $N$, находим фундаментальное уравнение связи $\mathscr{H} = 0$ [которое при замене импульсов на скорости (с помощью уравнений, получающихся при варьировании $p$) сводится к вакуумному варианту уравнения (13), если наложить координатное условие $N = 1$].

### Гамильтониан Арновитта, Дезера и Мизнера (АДМ)

Вариационный принцип, изложенный выше, можно свести к канонической (гамильтоновой) форме, выполняя стандартное предписание АДМ; оно заключается в том, что выбирают одну из полевых переменных или один из импульсов в качестве координаты времени и решают уравнение связи для сопряженного ей гамильтониана. В данном случае очевидно и удовлетворительно выбрать $t = \alpha$ и решить уравнение $\mathscr{H} = 0$ для

$$ H_{\mathrm{ADM}} = -p_\alpha = [p_+{}^2 + p_-{}^2 + e^{4\alpha}(V-1)]^{1/2}. \tag{23} $$

Уравнение для $\dot{\alpha}$ [варьирование $p_\alpha$ в вариационном интеграле (21)] имеет вид

$$ \dot{\alpha} = (-3\pi/2)^{1/2} N e^{-3\alpha} p_\alpha \tag{24} $$

и показывает, что выбор $\alpha = t$ (отсюда $\dot{\alpha} = 1$) приводит к требованию:

$$ N_{\mathrm{ADM}} = (2/3\pi)^{1/2}\, e^{3\alpha}/H_{\mathrm{ADM}}. \tag{25} $$

Приведенный канонический вариационный принцип, который получается, если воспользоваться для исключения $p_\alpha$ равенством (23), гласит: $\delta I_{\text{прив}} = 0$, где

$$ I_{\text{прив}} = \int p_+\, d\beta_+ + p_-\, d\beta_- - H_{\mathrm{ADM}}\, d\alpha \tag{26} $$

и должно быть учтено выражение (25).

### Супергамильтониан

Более удобен здесь по сравнению с подходом АДМ подход, тесно связанный с дираковскими гамильтоновыми методами. Заметим, однако, что, выбрав функцию хода, равной некоторой определенной функции координат $N(t)$, мы не устраним в ней произвол. Вместо этого, согласно принятой здесь процедуре, исключим функцию $N$ из вариационного принципа (21), положив ее (координатное условие!) равной некоторой выбранной функции полевых переменных и импульсов $N = N(\alpha, \beta_\pm, p_\alpha, p_\pm)$. При подстановке в (21) любая такая функция оставляет вариационный интеграл в канонической гамильтоновой форме. Содержание нового вариационного принципа становится эквивалентным первоначальному, если только его дополнить связью

$$\mathscr{H} = 0, \tag{27}$$

которая не может быть выведена из вариационного принципа. (Другие уравнения Эйлера — Лагранжа для этих двух вариационных принципов отличаются только членами, пропорциональными $\mathscr{H}$, и, таким образом, эквивалентны при наложении связи $\mathscr{H} = 0$ на начальные условия.) Выбор функции

$$N = (2/3\pi)^{1/2} e^{3\alpha} \tag{28}$$

очевиден и удобен. Тогда гамильтониан $\mathscr{H}$ превращается в супергамильтониан в получающемся вариационном принципе

$$I = \int p_+ \, d\beta_+ + p_- \, d\beta_- + p_\alpha \, d\alpha - \mathscr{H} \, d\lambda, \tag{29}$$

где $t \equiv \lambda$; тем самым отмечен специальный выбор координаты времени, определяемый выражением (28).

### Динамика перемешанного мира

Если включить члены, связанные с веществом и не обладающие дополнительными степенями свободы, то супергамильтониан в формуле (29) модифицируется просто. Например, для плотности энергии вещества в системе отсчета с осью времени $\mathbf{e}_{\hat{0}} = N^{-1}(\partial/\partial t)$ выберем

$$T^{\hat{0}\,\hat{0}} = -T^0{}_0 = (3/4)^2 (\mu e^{-3\alpha} + \Gamma e^{-4\alpha}). \tag{30}$$

Два члена, входящие в выражение (30), описывают соответственно нерелятивистскую идеальную жидкость ($\rho \sim V^{-1}$) и излучение ($\rho \sim V^{-4/3}$) и приводят к гамильтониану

$$2\mathscr{H} = -p_\alpha{}^2 + p_+{}^2 + p_-{}^2 + e^{4\alpha}(V - 1) + \mu e^{3\alpha} + \Gamma e^{2\alpha}. \tag{31}$$

Этот гамильтониан, обладающий простой квадратичной зависимостью от импульсов, отличается от гамильтониана элементарной механики только 1) знаком члена $p_\alpha^2$ и 2) детальной формой «потенциального» члена как функции $\alpha$ и $\beta_\pm$, изучение которого сводится к изучению функции $V(\beta)$. Гамильтоновы уравнения, полу-

чающиеся в результате варьирования $\alpha$, $\beta_\pm$, $p_\alpha$ и $p_\pm$, в (29) дают

$$\frac{d^2\beta_\pm}{d\lambda^2} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \beta_\pm} = -\frac{1}{2} e^{4\alpha} \frac{\partial V}{\partial \beta_\pm} \tag{32}$$

и

$$\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2} = +\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \alpha} = 2e^{4\alpha}(V-1) + \frac{3}{2}\mu e^{3\alpha} + \Gamma e^{2\alpha}. \tag{33}$$

Таким образом, знак члена $p_\alpha^2$ говорит об ускорении $\alpha$ (а не о замедлении), приводящем к более высоким значениям «потенциальных» членов $e^{4\alpha}(V-1) + \mu e^{3\alpha} + \Gamma e^{2\alpha}$. Если $|V| \ll 1$ (малая анизотропия), то уравнение (33) по форме тождественно уравнению для изотропной модели Фридмана и допускает замедление только тогда, когда $\alpha$ достаточно велико и член с положительной кривизной ($-e^{4\alpha}$) доминирует над членами с веществом ($\mu e^{3\alpha}$) и излучением ($\Gamma e^{2\alpha}$). Вблизи сингулярности ($\alpha \to -\infty$) член с положительной кривизной всегда пренебрежимо мал по сравнению с излучением и веществом.

Для исследования поведения модели вблизи сингулярности достаточно изучить упрощенный супергамильтониан

$$2\mathscr{H} \sim -p_\alpha^2 + p_+^2 + p_-^2 + e^{4\alpha}V(\beta), \tag{34}$$

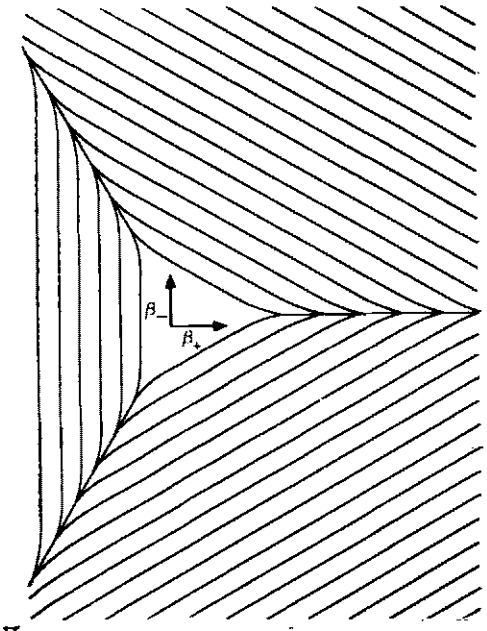
поскольку другие члены, очевидно, исчезают при $\alpha \to -\infty$. Тогда в ${}^3R_{IX} = \frac{3}{2}e^{-2\alpha}(1-V)$ сохраняется лишь член с $V$, который доминирует, если кривизна замкнутой Вселенной становится отрицательной, $V \gg 1$. Если бы член с $V(\beta)$ был также пренебрежимо мал, то супергамильтониан $\mathscr{H} = -p_\alpha^2 + p_+^2 + p_-^2$ приводил бы к постоянству $p_\alpha$ и $p_\pm$, т. е. казнеровскому решению

$$d\beta_\pm/d\alpha = p_\pm/p_\alpha = \text{const}$$

и $|d\beta/d\alpha|^2 = 1$, как и следовало ожидать (поскольку вещество и кривизна были пренебрежимо малы). Чтобы продвинуться дальше, необходимо изучить $V(\beta)$, отправляясь от выражений (19), (8) и их прямого следствия

$$V(\beta) = \frac{1}{3}e^{-8\beta_+} - \frac{4}{3}e^{-2\beta_+}\operatorname{ch} 2\sqrt{3}\beta_- + 1 + \frac{2}{3}e^{4\beta_+}(\operatorname{ch} 4\sqrt{3}\beta_- - 1). \tag{35}$$

Отсюда находим, что $V(\beta)$ представляет собой *положительно определенную* «потенциальную яму», которая обладает той же симметрией, что и равносторонний треугольник в плоскости $\beta_+\beta_-$. Вблизи начала $\beta_\pm = 0$ эквипотенциалы являются окруж-




Показано несколько эквипотенциалов $V(\beta) = \text{const}$ для функции, определенной уравнением (35). Эквипотенциалы для $V < 1$ вблизи начала $\beta$-плоскости являются замкнутыми кривыми и здесь опущены.

ностями, поскольку

$$V(\beta) = 8(\beta_+^2 + \beta_-^2) + O(\beta^3). \tag{36}$$

Для больших значений $\beta$ находим

$$V(\beta) \sim \frac{1}{3} e^{-8\beta_+}, \quad \beta_+ \to -\infty \tag{37}$$

и

$$V(\beta) \sim 1 + 16\beta_-^2 e^{4\beta_+}, \quad \begin{matrix} \beta_+ \to +\infty, \\ |\beta_-| \ll 1. \end{matrix} \tag{38}$$

Эти две асимптотические формы (вместе с симметрией треугольника) дают полное асимптотическое описание $V(\beta)$, что схематически представлено на фигуре, где на последовательных уровнях, разделенных интервалом $\Delta\beta = 1$, потенциал $V$ возрастает в $e^8 = 3 \cdot 10^3$ раз.

**«Скачки», прерывающие казнеровские шаги к сингулярности**

Доминирующей особенностью потенциала $V(\beta)$, очевидно, являются его крутые (экспоненциальные) треугольные стенки; типичная стенка описывается формулой (37). Эволюция модели Вселенной под действием этой потенциальной стенки определяется супергамильтонианом

$$2\mathcal{H} \sim -p_\alpha^2 + p_+^2 + p_-^2 + \frac{1}{3} e^{4(\alpha - 2\beta_+)}. \tag{39}$$

Если $\alpha \to -\infty$ и $d\beta_+/d\alpha > 1/2$ [напомним, что $d\beta_+/d\alpha = \text{const}$, $|d\beta/d\alpha| = 1$, если последний член в (39) мал], то потенциальный член растет и в конечном счете становится настолько большим, что начинает влиять на движение. Простое «лоренцевское» преобразование, допускаемое метрикой суперпространства (коэффициенты которой квадратичны по импульсам), упрощает дальнейший расчет. Полагая

$$\bar{\beta}_+ = \left(\beta_+ - \frac{1}{2}\alpha\right)/\sqrt{3/4},$$

$$\bar{\alpha} = \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta_+\right)/\sqrt{3/4},$$

находим

$$2\mathcal{H} = -\bar{p}_\alpha^2 + \bar{p}_+^2 + p_-^2 + \frac{1}{3}\exp(-4\sqrt{3}\,\bar{\beta}_+). \tag{40}$$

Для этого супергамильтониана обе величины $\bar{p}_\alpha$ и $p_-$ являются интегралами движения, тогда как $\bar{\beta}_+$-гамильтониан, $\bar{p}_+^2 + \frac{1}{3} e^{-4\sqrt{3}\,\bar{\beta}_+}$, описывает простой скачок на одномерной потенциальной стенке с начальным и конечным значениями $\bar{p}_+$, отличающимися только знаком. Поведение параметров анизотропии $\beta_\pm$ вблизи сингулярности состоит, таким образом, из простого казнеровского шага (где $d\beta_\pm/d\alpha = \text{const}$ с $d\beta_+/d\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, или с эквивалентными благодаря симметрии условиями, которым удовлетворяет одна из трех стенок), за которым следует скачок от этой стенки, дающий начало новому казнеровскому шагу с другими казнеровскими параметрами. (Наиболее подробное описание этого режима и его связи

с более общими космологическими моделями можно найти в работе Белинского, Лифшица и Халатникова [499] см. также более краткое сообщение Халатникова и Лифшица [506], где использованы совершенно другие методы. Детальное развитие гамильтоновых методов, которым уступают неполные лагранжевы методы Мизнера [158], см. в [502, 503, 505, 507].)

### Стационарное состояние, квазипериодическая бесконечность «скачков» при приближении к сингулярности

Некоторые глубокие особенности поведения решения вблизи сингулярности, содержащего много казнеровских шагов, можно показать, используя другое преобразование параметрического пространства (суперпространства) метрического поля. Преобразование вводит «радиальную» $t$-координату, исходящую из начала пространства $\alpha\beta_\pm$, но в то же время сохраняет метрические свойства этого суперпространства, следующие из вида супергамильтониана. Определим поэтому (для любого постоянного $\alpha_0$)

$$\begin{aligned} \alpha_0 - \alpha &= e^t \operatorname{ch}\zeta, \\ \beta_+ &= e^t \operatorname{sh}\zeta \cos\phi, \\ \beta_- &= e^t \operatorname{sh}\zeta \sin\phi \end{aligned} \tag{41}$$

и найдем

$$2\mathscr{H} = e^{-2t}[(-p_t^2 + p_\zeta^2 + q_\phi^2 \operatorname{sh}^{-2}\zeta) + e^{2t}e^{4\alpha}V]. \tag{42}$$

Преимущество этого преобразования заключается в том, что в пределе при $t \to \infty$ ($\alpha \to -\infty$, сингулярность) потенциальные члены в первом приближении становятся не зависящими от $t$. Поэтому из формулы (37) для одной потенциальной стенки получаем

$$e^{2t}e^{4\alpha}V \sim \frac{1}{3}e^{2t}\exp[4\alpha_0 - 8e^t(\operatorname{sh}\zeta\cos\phi + \tfrac{1}{2}\operatorname{ch}\zeta)]. \tag{43}$$

При $t \to \infty$ (в зависимости от знака выражения, стоящего в круглых скобках) эта величина стремится, очевидно, к нулю или к бесконечности. Поэтому определим асимптотические потенциальные стенки в секторе $|\phi - \pi| < \pi/3$ выражением

$$\operatorname{th}\zeta + \tfrac{1}{2}\sec\phi = 0 \tag{44}$$

и эквивалентными выражениями, в которых $\phi$ заменено на $\phi \pm (2\pi/3)$, для других сторон треугольника. Следовательно, асимптотическое приближение к супергамильтониану имеет вид

$$2\mathscr{H} = e^{-2t}[-p_t^2 + p_\zeta^2 + p_\phi^2 \operatorname{sh}^{-2}\zeta + V'(\zeta, \phi)], \tag{45}$$

где потенциал $V'(\zeta, \phi)$ исчезает внутри асимптотических стенок (44) и равен $+\infty$ снаружи. Поскольку остаточная зависимость от $t$ входит в (45) в виде общего множителя, то, сделав простую замену независимой переменной $e^{-2t}\,d\lambda = d\lambda'$ в интеграле (29), — это эквивалентно выбору уравнения

$$N = (2/3\pi)^{1/2}e^{-2t}\exp[3(\alpha_0 - e^t \operatorname{ch}\zeta)] \tag{46}$$

вместо (28), — получим новый супергамильтониан $\mathscr{H}' = e^{2t}\mathscr{H}$ с вариационным интегралом

$$I = \int p_t\,dt + p_\zeta\,d\zeta + p_\phi\,d\phi - \mathscr{H}'\,d\lambda'. \tag{47}$$

Из асимптотического приближения, в котором

$$2\mathscr{H}' = -p_t^2 + p_\zeta^2 + p_\phi^2\,\mathrm{sh}^{-2}\zeta + V'(\zeta, \phi), \tag{48}$$

непосредственно видно, что $p_t$ — интеграл движения и что «скачок» значений $\zeta\phi$ внутри асимптотических потенциальных стенок есть стационарный процесс, квазипериодический по этой координате времени $\lambda'$ (или $t$, поскольку $dt/d\lambda' = -p_t = \mathrm{const}$). (Более детальное исследование, основанное на асимптотическом супергамильтониане, показывает, что движение является даже эргодическим: $\zeta\phi$ при $t \to \infty$ произвольно близко подходит бесконечное число раз к любому заданному значению, см. [508].)

### Резюме

Поведение перемешанного мира вблизи сингулярности оказывается чрезвычайно активным. В простейшей казнеровской сингулярности две оси сжимаются, а третья растягивается простой приливной деформацией, которая сопровождается объемным сжатием. Однако в модели перемешанного мира каждая попытка такого сжатия разрушается благодаря высокой отрицательной кривизне, которая следует из этой модели. Или, вернее, поскольку сжатие неумолимо продолжается, она склоняется к другой попытке, но приливные деформации покушаются сначала на одну конфигурацию, затем на другую, переходя к неограниченному зондированию всех возможных конфигураций.

### Соображения, касающиеся времени и сингулярности

Космологическая сингулярность (во всех примерах, где известно, что она не носит неустойчивый характер) включает в себя бесконечную кривизну и бесконечную плотность. Наше отвращение к такому теоретическому заключению особенно усилилось в связи с предсказанием, что эти бесконечности имели место в конечное собственное время в прошлом и будут, если они повторятся, иметь место в некоторое конечное время в будущем. Предсказание о сингулярности было бы более терпимым, если бы момент достижения бесконечной плотности можно было сдвинуть в бесконечно удаленное прошлое. Естественным состоянием Вселенной было бы тогда, как это имеет место сегодня, расширение, поэтому любая *конечная* плотность достигалась бы в некоторый подходящим образом удаленный момент в прошлом, а *бесконечная* плотность стала бы формальной абстракцией, никогда не реализуемой в ходе эволюции.

Устранение бесконечной кривизны из конечного прошлого может быть достигнуто двумя способами. Неизвестно, какой из двух способов работает, если они вообще работают. Один путь состоит в том, чтобы изменить физические законы, приводящие к сингулярности, а изменить их возможно лишь очевидными и желаемыми способами, например сформулировав законы тяготения на подходящем квантовом языке. Расчеты квантовой геометрии еще не отличаются определенностью.

а некоторые (возможно, неадекватные) приближения [505] не устраняют проблему сингулярности.

Другой способ устранения сингулярности заключается в том, чтобы принять математику классических уравнений Эйнштейна, но переинтерпретировать ее, исходя из бесконечного времени в прошлом. Имеются, конечно, простые, но недостаточные способы осуществить это путем произвольных координатных преобразований типа $t = \ln \tau$, которые переводят сингулярность $\tau = 0$ в сингулярность $t = -\infty$. Однако произвольная координата не имеет физического смысла. Проблема в том, что сингулярность имеет место в конечное *собственное* время в прошлом, а собственное время имеет наибольший физический смысл, т. е. физически это наиболее реальное время, которое мы знаем. Оно соответствует тиканию физических часов и измеряет ритмы действительных событий. Чтобы переинтерпретировать конечное время в прошлом как бесконечное, следует подойти к собственному времени именно на этих основаниях и объявить его недостаточно физичным. На локальном основании, когда справедлива специальная теория относительности, оспаривать физическую значимость собственного времени невозможно. Ее необходимо пересмотреть на более глобальной шкале.

«Космологическая сингулярность имела место десять тысяч миллионов лет назад». В этом утверждении речь идет о времени, означающем собственное время вдоль мировой линии Солнечной системы, т. е. эфемеридное время. Утверждение имело бы более непосредственный физический смысл, если бы оно означало, что с начала расширения Вселенной Земля сделала $10^{10}$ оборотов вокруг Солнца. Однако собственное время не обязательно тесно связано с действительными физическими явлениями. Утверждение просто означает, что эти $5 \cdot 10^9$ оборотов, которые фактически могла совершить Земля, дают стандарт времени; последний следует экстраполировать заданным образом, придавая таким образом теоретический смысл другим $5 \cdot 10^9$ годам, предшествовавшим, как утверждается, образованию Солнечной системы.

Более жесткие стандартные часы влияют на детали вывода, однако качественно не меняют его. Чтобы интерпретировать $10^{10}$ лет на основе секунд системы SI (СИ), припишем прошедшей истории Вселенной $3 \cdot 10^{27}$ колебаний сверхтонкого перехода в нейтральном цезии. Однако при этом вновь будет отсутствовать решающее тиканье часов на ранней стадии (необходимое для локализации сингулярности во времени с помощью действительных физических событий). Из-за времени, необходимого для создания первого цезия в звездном нуклеосинтезе, в соответствии с историей возникновения элементов эти часы непригодны, а если этот элемент предшествовал образованию звезд, то еще раньше, до звездного нуклеосинтеза, при высоких температурах, достигающихся вблизи сингулярности, он уже был полностью ионизован.

Таким образом, собственное время вблизи сингулярности это не прямой счет простых и действительных физических явлений, а искусно сработанная математическая экстраполяция. Каждые реальные часы имеют свои «тиканья», исправленные на подходящий множитель: $3 \cdot 10^7$ с в случае, когда маятником служит система Земля — Солнце; $1{,}1 \cdot 10^{-10}$ с на колебание для цезиевого перехода и т. д. Поскольку на всем пути назад по направлению к сингулярности немыслимы одни часы (так как они имеют конечный размер и ограниченную прочность), то утверждение о собственном времени, прошедшем с момента сингулярности, содержит в себе понятие бесконечной последовательности постепенно уменьшающихся и все

более прочных часов, тикания которых затем исправляются и складываются. «Конечное собственное время» в таком случае не обязательно подразумевает, что была возможна любая конечная последовательность событий. В любой физически мыслимой истории оно может быть с необходимостью описано бесконечным рядом событий («тиканий»), преобразованным с помощью математики в конечную сумму посредством нелокально сходящегося множителя, «поправки», превращающей «тикание» в «собственное время».

Мы имеем здесь концептуальное обращение парадокса Зенона. Мы отвергаем предположение Зенона о том, что одно качание маятника бесконечно сложно — состоит из половины периода плюс четверть периода плюс $2^{-n}$ *ad infinitum* — поскольку члены в этом ряду суть математические абстракции, а не физически достижимые дискретные акты в драме, которая должна разыгрываться. Благодаря сравнимому стандарту следовало бы игнорировать как математическую абстракцию конечную сумму последовательностей собственных времен для возраста Вселенной, если бы можно было доказать, что там должен быть бесконечный ряд дискретных актов, разыгрывавшихся во время прошедшей истории Вселенной. В обоих случаях о конечности следует судить по подсчету числа дискретных тиканий реализуемых часов, а не оценкой веса нереализуемых математических абстракций.

Остается определить, является ли по этим стандартам Вселенная бесконечно старой. В частности, остается вычислить квантовые явления. Решающее значение имеет вопрос, подвержено ли каждое современное событие влиянию бесконечного числа предшествующих дискретных событий. В таком случае сильнейшим образом могут войти в теоретическую космологию статистические предположения (большие числа, случайные фазы и т. д.). В этом смысле космологическая модель перемешанного мира должна иметь бесконечную историю в прошлом, поскольку каждый «скачок» от одного казнеровского движения к другому представляет собой признанное космологическое событие, бесконечное число которых должно реализоваться между любой конечной эпохой и сингулярностью [1]).

## § 30.8. ГОРИЗОНТЫ И ИЗОТРОПИЯ МИКРОВОЛНОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

**Горизонты Фридмановской Вселенной**

Фундаментальный космологический вопрос «Должна ли Вселенная, которая родилась хаотической, с необходимостью стать однородной и изотропной, каковой является наша Вселенная, и успеть это сделать прежде, чем разовьется жизнь?» влечет за собой дальнейший спорный вопрос, вопрос о *горизонтах*. Как было показано в § 27.10, в любую данную эпоху расширения фридмановской

[1]) Следует подчеркнуть, что, по нашему мнению, существуют две альтернативы: 1) если понятие метрического времени применимо вплоть до сингулярности и справедливы законы общей теории относительности, то сингулярность была в конечном прошлом (несмотря на бесконечное число осцилляций перемешанного мира вблизи сингулярности и т. п.), 2) если вблизи сингулярности квантовые и (или) другие эффекты приводят к изменению понятия непрерывного метрического пространства-времени, то изменится и постановка вопроса. Подробнее см. в [238]. — *Прим. ред.*

Вселенной (например, в современную эпоху) могут существовать области Вселенной, световой сигнал от которых или другое причинно связанное влияние не успевает достигнуть Земли за время, прошедшее с момента начальной сингулярности. Возникает вопрос: «Если бы мы жили очень долго, то будут ли новые области Вселенной, которые попадут в поле нашего зрения в течение последующих десяти миллиардов лет, выглядеть статистически тождественными ближайшим областям Вселенной, которые уже видимы?»

К счастью, вопрос относится не только к будущему. Его можно было задать в некоторый прошедший момент времени и ответ был бы положительным. Микроволновое фоновое излучение поступает на Землю из всех направлений на небе с почти одинаковой температурой. (Согласно данным Бона, Фрэма и Патриджа [362] и Конклина [509] $\Delta T/T \leqslant 0{,}004$.) Плазма, которая испускает микроволновое излучение, приходящее на Землю из одного направления на небе, не способна до момента испускания установить причинную связь с плазмой, испускающей излучение, которое приходит из других направлений. Если принять фридмановскую модель Вселенной, тогда различные секторы микроволнового неба не связаны друг с другом в этом смысле, если они отделены друг от друга на угол, больший 30°, даже если микроволновое излучение было испущено недавно, при $z = 7$. (Критический угол намного меньше, если микроволны испытали последнее рассеяние при $z = 1000$.) Отсюда мы заключаем, что основы однородности и изотропии Вселенной были заложены задолго до того, как Вселенная стала приблизительно фридмановской. Ибо если статистическая однородность и изотропия Вселенной уже не достигались ранее на длинных волнах, ограничения, возникающие из-за наличия горизонта, предотвратили бы любую дальнейшую синхронизацию условий в больших масштабах в то время, когда Вселенная была в почти фридмановском состоянии, и сегодня должны были бы наблюдаться небольшие (10%) отклонения от изотропии.

**Наблюдаемая изотропия микроволнового излучения доказывает, что однородность имела место до того, как Вселенная стала фридмановской**

Перемешанному миру было присвоено такое название в надежде, что он внесет вклад в решение этой проблемы. Очень большие значения $u$, которые спорадически бесконечное число раз реализуются вблизи сингулярности в перемешанном мире дают геометрию, близкую к геометрии казнеровской модели с $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = 0$. Эту модель можно записать в виде

**Что сделало Вселенную однородной и изотропной?**

**1) колебания в перемешанном мире? По-видимому, нет**

$$ds^2 = e^{2\eta}\,(-d\eta^2 + dx^2) + dy^2 + dz^2, \qquad (30.6)$$

где $\eta = \ln t$. Если метрику (30.6) превратить в закрытую модель Вселенной, интерпретируя $x$, $y$, $z$ как угловые координаты с периодом $4\pi$, тогда мы увидим, что световой луч может совершить кругосветное путешествие вокруг Вселенной в направлении $x$ за интервал времени $\Delta\eta = 4\pi$, который соответствует увеличению

объема в $\sqrt{-g_1}/\sqrt{-g_2} = e^{4n}$ раз. К сожалению, количественный анализ степени и частоты, с которой перемешанный мир принимает эту характерную казнеровскую форму, предполагает, что такое разрушение горизонта недостаточно для объяснения современного состояния Вселенной [508, 510, 511]. Может оказаться, что проблема горизонта будет решена благодаря рождению частиц вблизи сингулярности, а это обеспечит также диссипацию анизотропии. Надежда основывается на том факте, что рождение частиц, описываемое классически, имеет некоторые непричинные проявления, даже если это строго причинный процесс на квантовом уровне [395].

**2) рождение частиц вблизи сингулярности?**

# ЛИТЕРАТУРА

Приведенный ниже список, подобно библиографии в работе [29], может служить лишь отправной точкой при ознакомлении с литературой, которая слишком обширна, чтобы можно было составить всеобъемлющий перечень. Более подробную библиографию по некоторым разделам можно найти, например, в работах [233—237] [1]). Иногда приводится не самое первое издание, а более позднее и более доступное. Почти все докторские диссертации в США можно получить в виде микрофильмов [2]). Мы хотим выразить свою благодарность Грегори Черлину, подготовившему первый вариант списка литературы, и Нигелю Куту, внесшему многочисленные исправления, а также всем коллегам, без помощи которых многие из наиболее важных и труднодоступных работ так и не попали бы в данный список.


1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*, Теория поля, изд. 4, Физматгиз, М., 1962. [Форзац, § 20.3, 20.5.]
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*, Теория поля, изд. 5, изд-во «Наука», М., 1967. [Форзац.]
3. *Adler R., Bazin M., Schiffer M.*, Introduction to General Relativity, McGraw-Hill, New York, 1965. [Форзац.]
4. *Anderson J. L.*, Principles of Relativity Physics, Academic Press, New York, 1967. [Форзац, § 17.6.]
5. *Bergmann P. G.*, Introduction to the Theory of Relativity, Prentice-Hall, New York, 1942. (Имеется перевод: *П. Бергман*, Введение в теорию относительности, ИЛ, М., 1947.) [Форзац.]
6. *Cartan É.*, Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris, 1928 and 1946. (Имеется перевод: *Э. Картан*, Риманова геометрия в ортогональном репере, изд-во МГУ, М., 1960.) [Форзац, упр. 21.4.]
7. *Davis W. R.*, Classical Theory of Particles and Fields and the Theory of Relativity, Gordon and Breach, New York, 1970. [Форзац, § 21.3.]
8. *Eddington A. S.*, The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1922. [Форзац.]


---

[1]) Список литературы [234] составлен на основе библиографии в книге [90].

[2]) University Microfilms, Inc., Ann. Arbor, Mich., 48106.

9. *Ehlers J.*, General Relativity and Kinetic Theory в книге General Relativity and Cosmology, proceedings of course 47 of the International School of Physics «Enrico Fermi», ed. Sachs R. K., Academic Press, New York, 1971. [Форзац, § 22.6, упр. 22.7.]
10. *Einstein A.*, The Meaning of Relativity, 3d ed., Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1950. (Имеется перевод: *А. Эйнштейн*, Сущность теории относительности, ИЛ, М., 1955.) [Форзац, § 21.12, 29. 5, доп. 27.1.]
11. *Eisenhart L. P.*, Riemannian Geometry, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1926. (Имеется перевод: *Л. Эйзенхарт*, Риманова геометрия, ИЛ, М., 1948.) [Форзац, § 21.5, 21.12, упр. 27.4.]
12. *Фок В. А.*, Теория пространства, времени и тяготения, М., 1959. [Форзац, эпиграф к гл. 21.]
13. *Fokker A. D.*, Time and Space, Weight and Inertia, Pergamon Press, London, 1965. [Форзац.]
14. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.*, The Large Scale Structure of Space-time, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1973. [Форзац.]
15. *Hicks N. J.*, Notes on Differential Geometry, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1965. [Форзац.]
16. *Infeld L., Plebanski J.*, Motion and Ralativity, Pergamon Press, New York, 1960. (Имеется перевод: *Л. Инфельд, Е. Плебаньский*, Движение и релятивизм, ИЛ, М., 1962.) [Форзац, § 20.6.]
17. *Lichnerowicz A.*, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Masson, Paris, 1955. [Форзац.]
18. *McVittie G. C.*, General Relativity and Cosmology, Chapman and Hall, London, 1956. [Форзац.]
19. *Misner C. W.*, Gravitational collapse, в книге Brandeis Summer Institute 1968, Astrophysics and General Relativity, eds. Chrétien M., Deser S., Goldstein J., Gordon and Breach, New York, 1969, vol. I. [Форзац.]
20. *Møller C.*, The Theory of Relativity, Oxford Univ. Press, London, 1952; 2d ed., 1972. (Имеется перевод: *К. Меллер*, Теория относительности, Атомиздат, М., 1975.) [Форзац.]
21. *Pauli W.*, Theory of Relativity, Pergamon Press, London, 1958. [Форзац.]
22. *Penrose R.*, Structure of Spacetime в книге Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics, eds. DeWitt C., Wheeler J. A., Benjamin, New York, 1968.( Имеется перевод: *Р. Пенроуз*, Структура пространства-времени, изд-во «Мир», 1972.) [Форзац.]
23. *Pirani F. A. E.*, Introduction to Gravitational Radiation Theory в книге *Trautman A., Pirani F. A. E., Bondi H.*, Lectures on General Relativity, vol. I, Prentice-Hall, Englewood, Cliffs, N. J., 1965. [Форзац.]
24. *Robertson H. P., Noonan T. W.*, Relativity and Cosmology, Saunders, Philadelphia, 1968. [Форзац, § 27.11, упр. 27.4, 29.6.]
25. *Sachs R. K.*, Gravitational Radiation в книге Relativity, Groups and Topology, eds. DeWitt C., DeWitt B. S., Gordon and Breach, New York, 1964. [Форзац, § 21.5, 21.13, упр. 22.14.]
26. *Schild A.*, Lectures on General Relativity Theory, в книге Relativity Theory and Astrophysics: I, Relativity and Cosmology; II, Galactic Structure; III, Stellar Structure, ed. Ehlers J., American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967, p. 1. [Форзац.]
27. *Schouten J. A.*, Ricci-calculus, Springer, Berlin, 1954. [Форзац, § 21.5, упр. 17.8, 21.8.]
28. *Schrödinger E.*, Space-Time Structure, Cambridge Univ. Press, England, 1950. [Форзац.]
29. *Synge J. L.*, Relativity: The General Theory, North-Holland, Amsterdam, 1960. (Имеется перевод: *Дж. Синг*, Общая теория относительности, ИЛ, М., 1963.) [Форзац.]
30. *Thorne K. S.*, The General Relativistic Theory of Stellar Structure and Dynamics в книге High-Energy Astrophysics, vol. III, eds. DeWitt C., Schatzman E., Veron P., Gordon and Breach, New York, 1967. [Форзац, § 24.4.]

31. *Tolman R. C.*, Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Clarendon Press, Oxford, 1934. (Имеется перевод: *Р. Толмен*, Относительность, термодинамика и космология, изд-во «Наука», М., 1974.) [Форзац, упр. 22.7.]
32. *Trautman A.*, Foundations and Current Problems of General Relativity Theory в книге *Trautman A., Pirani F. A. E., Bondi H.*, Lectures on General Relativity, Brandeis 1964 Summer Institute on Theoretical Physics, vol. I, Prentice-Hall, Eglewood Cliffs, N.J., 1965. [Форзац.]
33. *Weber J.*, General Relativity and Gravitational Waves, Wiley-Interscience, New York, 1961. (Имеется перевод: *Дж. Вебер*, Общая теория относительности и гравитационные волны, ИЛ, М., 1962.) [Форзац.]
34. *Weinberg S.*, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, Wiley, New York, 1972. (Имеется перевод: *С. Вейнберг*, Гравитация и космология, изд-во «Мир», 1975.) [Форзац.]
35. *Weyl H.*, Space-Time-Matter, Methuen, London, 1922. [Форзац.]
36. *Wheeler J. A.*, Geometrodynamics and the Issue of the Final State в книге Relativity, Groups and Topology, eds. DeWitt C., DeWitt B. S., Gordon and Breach, New York, 1964. [Форзац, § 21.10, 21.11, доп. 27.7, упр. 21.18.]
37. *Merzbacher E.*, Quantum Mechanics, Wiley, New York, 1961. [§ 16.3.]
38. *Pauli W.*, Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, в книге Handbuch der Physik, Bd. 24, Teil 1, 2. Aufl., 1934. (Имеется перевод: *В. Паули*, Общие принципы волновой механики, Гостехиздат, М.— Л., 1947.) [§ 16.3.]
39. *Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.*, The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1964. (Имеется перевод: *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс*, Фейнмановские лекции по физике, изд-во «Мир», 1967.) [§ 21.3, доп. 16.3.]
40. *Marzke R. F., Wheeler J. H.*, в книге Gravitation and Relativity, eds. Chiu H.-Y., Hoffman W. F., Benjamin, New York, 1964. [Доп. 16.4.]
41. *Ehlers J., Pirani F. A. E., Schild A.*, The geometry of free-fall und light propagation, в книге General Relativity, Papers in Honor of J. L. Synge, ed. O'Raifeartaigh L., Oxford Univ. Press, London, 1972. [Доп. 16.4.]
42. *Forward R. L.*, Geodesy with Orbiting Gravity Gradiometers, в книге The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Geophysical Monograph Series, vol. 15, American Geophysical Union, Washington, 1972, p. 239. [Доп. 16.5.]
43. *Bell C. C., Forward R. L., Williams H. P.*, Simulated terrain Mapping with the Rotating Gravity в книге Advances in Dynamic Gravimetry, ed. Kattner W. T., Instrument Society of America, Pittsburgh, 1970, p. 115. [Доп. 16.5.]
44. *Einstein A.*, Mein Weltbilde, Querido Verlag, Amsterdam, Holland, 1933. [Эпиграф к гл. 17, § 21.12, 27.11, 27.12.]
45. *Зельдович Я. Б.*, Письма ЖЭТФ, 6, 883 (1967). [§ 17.3, доп. 17.2, упр. 17.5, п. 6.]
46. *Зельдович Я. Б.*, Усп. физ. наук, 95, 209 (1968). [Упр. 17.5.]
47. *Hilbert D.*, Die Grundlagen der Physik, Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachr., Math.-Phys., Kl. 1915, S. 395; см. также Math. Ann., 92, 1 (1924). [§ 17.7, 21.2, доп. 17.2.]
48. *Feynman R. P.*, The Principle of Least Action in Quantum Mechanics, докторская диссертация, Princeton University, 1942. [Доп. 17.2, 21.1.]
49. *Gerlach U.*, Phys. Rev., 177, 1929 (1969). [Доп. 17.2, п. 4.]
50. *Deser S.*, Gen. Rel. and Grav., 1, 9, 1970. [§ 18.1, доп. 17.2, п. 5.]
51. *Сахаров А. Д.*, ДАН СССР, 177, 70 (1967). [Доп. 17.2, п. 6.]
52. *Welton T. A.*, Phys. Rev., 74, 1157 (1948). [Доп. 17.2, п. 6.]
53. *Dyson F. J.*, Advanced Quantum Mechanics, multilithographed lecture notes, Physics Department, Cornell University, 1954. [Доп. 17.2, п. 6.]
54. *Hepp K.*, Théorie de la renormalisation, Springer, 1969. [Доп. 17.2, п. 6.]
55. *Рузмайкина Т. В., Рузмайкин А. А.*, ЖЭТФ, 57, 680 (1969). [Доп. 17.2, п. 6.]

56. *Berger M.*, Compt. Rend., Acad. Sci. Paris, **263**, 13 (1966). [Доп. 17.2, п. 6.]
57. *De Witt B. S.*, Phys. Rev., **162**, 1239 (1967). [Доп. 17.2, п. 6.]
58. *Полиевктов-Николадзе Н. М.*, ЖЭТФ, **57**, 2010 (1969), [Доп. 17.2, п. 6.]
59. *Berger M.*, *Gauduchon P.*, *Mazet E.*, Le Spectre d'une variété riemannienne, Springer, Berlin and New York, 1971. [Доп. 17.2, п. 6.]
60. *Ni W.-T.*, Astrophys. Journ., **176**, 769 (1972). [§ 17.6.]
61. *Thorne K. S.*, *Ni W. T.*, *Will C. M.*, Theoretical frameworks for testing relativistic gravity в книге Proceedings of the Conference on Experimental Tests of Gravitational Theories, California Institute of Technology, J.P.L. Technical Memorandum, 1971, p. 10. [§ 17.6.]
62. *Brans C.*, *Dicke R. H.*, Phys. Rev., **124**, 925 (1961). [§ 17.6, 28.4.]
63. *Nordstrøm G.*, Ann. Phys. (Germany), **42**, 533 (1913). [§ 17.6.]
64. *Einstein A.*, *Fokker A. D.*, Ann. Phys. (Germany), **44**, 321 (1914.) [§ 17.6.]
65. *Kretschmann E.*, Ann. Phys. (Germany), **53**, 575 (1917). [§ 17.6.]
66. *Whitehead A. N.*, The Principle of Relativity, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1922. [Доп. 17.3.]
67. *Will C. M.*, Astrophys. Journ., **169**, 141 (1971). [Доп. 17.3.]
68. *Einstein A.*, Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen, Jarb. Radioakt., **4**, 411 (1908). [§ 17.7.]
69. *Einstein A.*, *Grossmann M.*, Zs. Math. Phys., **62**, 225 (1913). [§ 17.7.]
70. *Einstein A.*, *Grossmann M.*, Zs. Math. Phys., **63**, 215 (1914). [§ 17.7.]
71. *Einstein A.*, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber., **778**, November 11 (1915). [§ 17.7.]
72. *Einstein A.*, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber., 799, November 18 (1915). [§ 17.7, доп. 27.8.]
73. *Einstein A.*, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber., **47**, 831, November 25 (1915). [§ 17.7.]
74. *Einstein A.*, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber., 844, December 2 (1915). [§ 17.7, доп. 27.7.]
75. *Einstein A.*, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber., 1111, (1916). [§ 17.7.]
76. *Einstein A.*, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber., 688 (1916). [§ 17.7.]
77. *Hilbert D.*, Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachr. Math.-Phys. Kl., 53 (1917). [§ 17.7.]
78. *Fierz M.*, *Pauli W.*, Proc. Roy. Soc., London, **A173**, 211 (1939). [§ 18.1, 18.3.]
79. *Gupta S. N.*, Phys. Rev., **96**, 1683 (1954). [§ 18.1.]
80. *Gupta S. N.*, Rev. Mod. Phys., **29**, 337 (1957). [§ 18.1.]
81. *Gupta S. N.*, Quantum theory of gravitation, в книге Recent Developments in General Relativity, Pergamon, New York, 1962, p. 251. [§ 18.1.]
82. *Kraichnan R. H.*, Phys. Rev., **55**, 1118 (1955). [§ 18.1.]
83. *Thirring W. E.*, Ann. Phys. (USA), **16**, 96 (1961). [§ 18.1.]
84. *Feynman R. P.*, Lectures on Gravitation, Calif. Inst. of Technol., 1963, не опубликовано. [§ 18.1.]
85. *Weinberg S.*, Phys. Rev., **B138**, 988 (1965). [§ 18.1.]
86. *Bondi H.*, Nature, **179**, 1072 (1957). [Упр. 18.5, фиг. 18.1.]
87. *Trautman A.*, *Pirani F. A. E.*, *Bondi H.*, Lectures on General Relativity, Brandeis 1964 Summer Institute on Theoretical Physics, vol. I, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965. [Упр. 18.5.]
88. *Bondi H.*, *McCrea W. H.*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **56**, 410 (1960). [Упр. 18.5.]
89. *Stokes W.*, The Tripartite Life of St. Patrick With Other Documents Relating to That Saint, Her Majesty's Stationery Office, London, 1887. [§ 19.4.]
90. Albert Einstein: Philosopher-Scientist, Library of Living Philosophers, ed. Schilpp P. A., Evanston, 1949. [Эпиграф к гл. 20.]
91. *Hartle J. B.*, Astrophys. Journ., **161**, 111 (1970). [§ 20.5.]
92. *Teitelboim C.*, Phys. Rev., **D1**, 1572 (1970). [§ 20.6, упр. 20.8.]
93. *Teitelboim C.*, Phys. Rev., **D4**, 345 (1971). [§ 20.6.]
94. *Burke W. L.*, Phys. Rev., **A2**, 1501 (1970). [§ 20.6.]

95. *Infeld L., Schild A.*, Rev. Mod. Phys., **21**, 408 (1949). [§ 20.6.]
96. *Chase D. M.*, Phys. Rev., **95**, 243 (1954). [§ 20.6.]
97. *Callaway J.*, Phys. Rev., **92**, 1567 (1953). [§ 20.6.]
98. *Einstein A., Grommer J.*, Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys. Tech., 2, 235 (1927). [§ 20.6.]
99. *Papapetrou A.*, Proc. Roy. Soc., London, **A209**, 248 (1951). [§ 20.6.]
100. *Pirani F. A. E.*, Acta Phys. Pol., **15**, 389 (1956). [§ 20.6.]
101. *Wheeler J. A.*, Rev. Mod. Phys., **33**, 63 (1961). [§ 20.6.]
102. *Misner C. W., Wheeler J. A.*, Ann. Phys. (USA), **2**, 525 (1957). [§ 20.6, 21.8, 21.9, доп. 21.2, упр. 20.7.]
103. *Einstein A.*, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber., 142 (1917). [§ 17.3, доп. 27.1, 27.7.]
104. *Lao-tzu, Tao Tê Ching*, Poem 1, 3d century B.C. [Эпиграф к гл. 18.]
105. *Maupertuis P. L. M. de*, Recherche des loix du mouvement, Acad. Sci. Berlin, 1746. [Эпиграф к гл. 21.]
106. *Leibniz G. W.*, Philosophischen Schriften, Bd. 7, ed. Gerhardt C. J., Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1961, S. 200. [Эпиграф к гл. 21.]
107. *Cartan É.*, Journ. Math. Pures. Appl., 1, 141 (1922). [§ 21.1.]
108. *DeWitt B. S.*, Phys. Rev., **160**, 1113 (1967). [§ 21.1.]
109. *Kramers H. A.*, Quantum Mechanics, North Holland Pub. Co., Amsterdam, Holland, 1957. [§ 21.1.]
110. *Wheeler J. A.*, Superspace and the nature of quantum geometrodynamics в книге Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics, eds. DeWitt C., Wheeler J. A., Benjamin, New York, 1968. [§ 21.1, 21.8.]
111. *Kuchař K.*, Phys. Rev., **D4**, 955 (1971). [§ 21.1, 21.10.]
112. *Kuchař K.*, Journ. Math. Phys., **13**, 768 (1972). [§ 21.1, 21.10, 21.11, упр. 21.24.]
113. *Palatini A.*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **43**, 203 (1919). [§ 21.2.]
114. *Tomonaga S.*, Prog. Theor. Phys., **1**, 27 (1946). [Доп. 21.1.]
115. *Mercier A.*, Analytical and Canonical Formalism in Physics, North-Holland, Amsterdam, 1953. Paperback reprint, Dover, New York, 1963. [Доп. 21.1.]
116. *Lanczos K.*, The Variational Principles of Mechanics, Univ. of Toronto Press, Toronto, 4th ed. 1970. (Имеется перевод: *К. Ланцош*, Вариационные принципы механики, изд-во «Мир», 1965.) [Упр. 21.1.]
117. *Yourgrau W., Mandelstam S.*, Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory, Saunders, Philadelphia, Pa., 1968. [Доп. 21.1.]
118. *Newton I.*, Philosophiae naturalis principia mathematica, 1st ed., Streater, London; final ed., in English translation by A. Motte, 1729, revised by A. Cajori, Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World, Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1934; paperback, 1962. (Имеется перевод: *И. Ньютон*, Математические начала натуральной философии, с примечаниями и пояснениями А. Н. Крылова, в книге *А. Н. Крылов*, Собр. трудов, т. 7, М.— Л., 1936.) [Доп. 21.1, 27.7.]
119. *Feynman R. P.*, Rev. Mod. Phys., **20**, 367 (1948). [Доп. 21.1.]
120. *Feynman R. P.*, Phys. Rev., **76**, 769 (1949). [Доп. 21.1.]
121. *Feynman R. P.*, The concept of probability in quantum mechanics, в книге Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, ed. Neyman J., Univ. of California Press, Berkeley, Calif., 1951, p. 533. [Доп. 21.1.]
122. *Feynman R. P.*, Phys. Rev., 97, 660 (1955). [Доп. 21.1.]
123. *Feynman R. P., Hibbs A. R.*, Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, New York, 1965. (Имеется перевод: *Р. Фейнман, А. Хибс*, Квантовая механика и интегралы по траекториям, 1968.) [§ 21.1, доп. 17.2, 21.1.]
124. *Hibbs A. R.*, Quantum Mechanics, в книге *Кас М.*, Probability and Related Topics in Physical Science, Interscience, New York, 1951, p. 205. (Имеется перевод: *М. Кац*, Вероятность и смежные вопросы в физике, изд-во «Мир», 1965.) [Доп. 21.1.]

125. *Morette C.*, Phys. Rev., 81, 848 (1951). [Доп. 21.1.]
126. *Choquard P.*, Helv. Phys. Acta, 28, 89 (1955). [Доп. 21.1.]
127. *Polkinghorne J. C.*, Proc. Roy. Soc., London, A230, 272 (1955). [Доп. 21.1.]
128. *Fujiwara I.*, The correspondence principle, I, в книге Proceedings of the Physics Seminar in Trondheim, № 3, Nordita, Copenhagen, Denmark, 1962. [Доп. 21.1.]
129. *Kursunoglu B.*, Modern Quantum Theory, Freeman, San Francisco, 1962. [Доп. 21.1.]
130. *Dempster J. R. H.*, Feynman Quantization in Field Theory: Topology of Commutators and Functional Representation of States, докторская диссертация, Princeton University, 1963. [Доп. 21.1.]
131. *Symanzik K.*, Aspects of Euclidean field theory and Feynman path integrals в книге Proceedings of Seminar on Unified Theories of Elementary Particles, eds. Lurie D., Mukunda N., University of Rochester report URPA-11, Rochester, New York, 1963. [Доп. 21.1.]
132. *Misner C. W.*, Rev. Mod. Phys., 29, 497 (1957). [Доп. 21.1.]
133. *Fadeev L. D.*, Symplectic structure and quantization of the Einstein gravitation theory в книге Actes du Congrés International des Mathématiciens, Nice, 1—10 Septembre 1970, Gauthier-Villars, Paris, III, 1971, p. 35. [Доп. 21.1.]
134. *Wentzel G.*, Quantum Theory of Fields, Interscience, New York, 1949. (Имеется перевод: *Г. Вентцель*, Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат, М., 1947.) [§ 21.3, доп. 21.2.]
135. *Feynman R. P.*, неопубликованная работа, 1964. [Доп. 24.1.]
136. *Rosenfeld L.*, Mém. Acad. Roy. Belg. Sci., 18, № 6 (1940). [§ 21.3.]
137. *Belinfante F.*, Physica, 7, 449 (1940). [§ 21.3.]
138. *Corson E. M.*, Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave-Equations, Hafner, New York, 1953. [§ 21.3.]
139. *Arnowitt R., Deser S., Misner C. W.*, The dynamics of general relativity, в книге Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. Witten L., Wiley, New York, 1962, p. 227. [ § 21.1, 21.4—21.8.]
140. *Israel W.*, Nuovo Cim., 44B, 1 (1966); corr.: Nuovo Cim., 48B, 463 (1966). [§ 21.5, 21.13.]
141. *Петров А. З.*, Пространства Эйнштейна, 1968. [Доп. 16.5.]
142. *Fischer A. E., Marsden J. B.*, Journ. Math. Phys., 13, 546 (1972). [§ 21.5, 21.6.]
143. *Bishop R. L., Goldberg S. I.*, Tensor Analysis on Manifolds, Macmillan, New York, 1968. [Упр. 21.8.]
144. *Kuchař K.*, Gravitational action functional reexpressed by means of intrinsic and extrinsic curvature, неопубликованная лекция, 1971. [§ 21.6, 21.11, упр. 21.10.]
145. *York J. W., Jr.*, Phys. Rev. Lett., 28, 1082 (1972). [§ 21.6, 21.11, упр. 21.24.]
146. *Dirac P. A. M.*, Phys. Rev., 114, 924 (1959). [§ 21.7.]
147. *Dirac P. A. M.*, Lectures on Quantum Mechanics, Belfer Graduate School of Science Monograph Series Number Two, Yeshiva University, New York, 1964. [§ 21.7.]
148. *Wheeler J. A.*, Einstein's Vision, Springer, Berlin, 1968. (Имеется перевод: *Д. А. Уилер*, Предвидение Эйнштейна, изд-во «Мир», 1970.) [§ 21.8, 21.12, упр. 21.23.]
149. *Dirac P. A. M., Fock V. A., Podolsky B.*, Phys. Zs. Sowjetunion, 2, 468 (1932). [§ 21.8.]
150. *Unruh W. G.*, Dirac particles and geometrodynamical charge in curved geometries, докторская диссертация, Princeton University, 1971. [§ 21.9.]
151. *Sharp D. H.*, One- and two-surface formulations of the boundary-value problem for Einstein — Maxwell theory and for «already unified» field theory, Physics A.B. Senior thesis, Princeton University, не опубликовано; deposited in Fine Library, Princeton University, 1960. [§ 21.9.]
152. *Baierlein R. F., Sharp D. H., Wheeler J. A.*, Phys. Rev., 126, 1864 (1962). [§ 21.9.]
153. *Belasco E. P., Ohanian H. C.*, Journ. Math. Phys., 10, 1503 (1969). [§ 21.9.]

154. *Wheeler J. A.*, Mach's principle as boundary condition for Einstein's equations в книге Gravitation and Relativity, eds. Chiu H.-Y., Hoffman W. F., Benjamin, New York, 1964. [§ 21.10, 21.12.]
155. *Brill D. R.*, Ann. Phys. (USA), 7, 466 (1959). [§ 21.10.]
156. *Refsdal S.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 128, 295 (1964). [§ 25.6, фиг. 22.2.]
157. *Brill D. R.*, General Relativity: Selected Topics of Current Interest, report SUI61-4, Physics Department, State University of Iowa, Iowa City, Iowa (multilithed), 1961; published in Suppl. Nuovo Cim., 2, 1 (1964). [§ 21.10.]
158. *Misner C. W.*, Phys. Rev. Lett., 22, 1071 (1969). [§ 21.10, 28.2, 30.6, доп. 30.1.]
159. *Gowdy R. H.*, Vacuum spacetimes with two-parameter spacelike isometry groups and compact invariant hypersurfaces: Topologies and Boundary conditions, University of Maryland technical report 73-089, 1973, не опубликовано. [§ 21.10, 30.6.]
160. *York J. W., Jr.*, Phys. Rev. Lett., 26, 1656 (1971). [§ 21.11, 21.12, упр. 21.22.]
161. *Lichnerowicz A.*, Journ. Math. Pures and Appl., 23, 37 (1944). [§ 21.11.]
162. *Bruhat Y.*, The Cauchy problem в книге Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. Witten L., Wiley, New York, 1962. [§ 21.11, 21.13.]
163. *York J. W., Jr.*, Journ. Math. Phys., 14, 456 (1973). [§ 21.11.]
164. *O'Murchadha N.*, Existence and uniqueness of solutions of the Hamiltonian constraint of general relativity, докторская диссертация, Princeton University, February 5, 1973. [§ 21.11.]
165. *Choquet-Bruhat Y.*, Compt. Rend., Acad. Sci. Paris, A274, 682 (1972); fuller account в сб. Gen. Rel. und Grav. (1973), в печати [§ 21.1.]
166. *Mach E.*, Die Mechanik in Ihrer Entwicklung Historisch-Kritisch Dargestellt, Brockhaus, Leipzig, 1912. (Имеется перевод с 6-го немецкого издания: *E. Max*, Механика, СПБ, 1909.) [§ 21.1, 21.12.]
167. *Fermi E.*, Rev. Mod. Phys., 4, 87 (1932). [§ 21.12.]
168. *Wheeler J. A.*, View that the distribution of mass and energy determines the metric в книге Onzième Conseil de Physique Solvay: La Structure et l'évolution de l'univers, Éditions Stoops, Brussels, 1959. [§ 21.12.]
169. *Hönl H.*, Allgemeine Relativitätstheorie und Machsches Prinzip в книге Physikertagung Wien, Physik Verlag, Mosbach/Baden, 1962. [§ 21.12.]
170. *Ленин В. И.*, Материализм и эмпириокритицизм, М., 1909 (5 изд. полного собр. соч., т. 18, стр. 7). [§ 21.12.]
171. *Weyl H.*, Naturwissenschaften, 12, 197 (1924). [§ 21.12.]
172. *Sciama D. W.*, Sci. Am., 196, № 2, 99 (1957). [§ 21.12.]
173. *Sciama D. W.*, The Unity of the Universe, Anchor, New York, 1961. [§ 21.12.]
174. *Einstein A.*, Phys. Zs. Sowjetunion, 17, 101 (1916). [Фиг. 21.5.]
175. *Wheeler J. A.*, Phys. Rev., 97, 511 (1955). [§ 21.12, 25.5.]
176. *Brill D. R., Hartle J. B.*, Phys. Rev., B135, 271 (1964). [§ 21.12.]
177. *Thirring H.*, Phys. Zs., 19, 33 (1918). [§ 21.12.]
178. *Thirring H.*, Phys. Zs., 22, 29 (1921). [§ 21.12.]
179. *Thirring H., Lense J.*, Phys. Zs., 19, 156 (1918). [§ 21.12.]
180. *Brill D. R., Cohen J. M.*, Phys. Rev., 143, 1011 (1967). [§ 21.12, упр. 26.1.]
181. *Lanczos K.*, Phys. Zs., 23, 539 (1922). [§ 21.13.]
182. *Lanczos K.*, Ann. Phys. (Germany), 74, 518 (1924). [§ 21.13.]
183. *Darmois G.*, Les équations de la gravitation einsteinienne, Mémorial des sciences mathematiques XXV, Gauthier-Villars, Paris, 1927. [§ 21.13.]
184. *Misner C. W., Sharp D. H.*, Phys. Rev., B136, 571 (1964). [§ 21.13, 22.2, доп. 23.1.]
185. *Kuchař K.*, Czech. Journ. Phys. B18, 435, (1968) [§ 21.13.]
186. *Papapetrou A., Hamoui A.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, A9, 179 (1968). [§ 21.13.]
187. *Pirani F. A. E.*, Phys. Rev., 105, 1089 (1957). [§ 21.13.]
188. *Papapetrou A., Treder H.*, Math. Nachr., 20, 53 (1959). [§ 21.13.]
189. *Papapetrou A., Treder H.*, Shock waves in general relativity в книге Recent Developments in General Relativity, volume dedicated to Leopold Infeld

in connection with his 60th birthday, Feb. 8, 1958, Pergamon Press, Oxford and PWN — Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1962, p. 351. [§ 21.13.]
190. *Treder H. J.*, Gravitative Stosswellen, Nichtanalytischen Wellenlösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Akademie-Verlag, Berlin, 1962. [§ 21.13.]
191. *Choquet-Bruhat Y.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, 8, 327 (1968). [§ 21.13.]
192. *Israel W.*, Phys. Rev., 153, 1388 (1967). [Упр. 21.27.]
193. *Steuckelberg E. C. G.*, *Wanders G.*, Helv. Phys. Acta, 26, 307 (1953). [§ 22.2.]
194. *Kluitenberg G. A.*, *de Groot S. R.*, Physica, 20, 199 (1954). [§ 22.2.]
195. *Meixner J.*, *Reik H. G.*, Thermodynamik der irreversiblen Prozesse, в книге Handbuch der Physik, Bd. 3, Teil 2, 1959, S. 413. [§ 22.2.]
196. *Зельдович Я. Б.*, *Новиков И. Д.*, Теория тяготения и эволюция звезд, изд-во «Наука», 1971. [§ 22.2, 23.1, 24.1, 24.3, 24.4, 24.6, 25.6, доп. 24.1, 24.2.]
197. *Taub A. H.*, Phys. Rev., 74, 328 (1948). [§ 22.2, доп. 22.2.]
198. *De Hoffmann F.*, *Teller E.*, Phys. Rev., 80, 692 (1950). [§ 22.2, доп. 22.2.]
199. *Israel W.*, Proc. Roy. Soc., A259, 129 (1960). [§ 22.2, доп. 22.2.]
200. *May M.*, *White R. H.*, Meth. Computat. Phys., 73, 219 (1967). [§ 22.2, доп. 22.2.]
201. *Зельдович Я. Б.*, *Райзер Ю. П.*, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, изд-во «Наука», 1966. [§ 22.2, доп. 22.2.]
202. *Lichnerowicz, A.*, Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics; Lectures on the Existence of Solutions, Benjamin, New York, 1967. [§ 22.2, 22.3, доп. 22.2.]
203. *Lichnerowicz A.*, Ondes des choc, ondes infinitesimales et rayons en hydrodynamique et magnetohydrodynamique relativistes в книге Relativistic Fluid Dynamics, proceedings of a summer school sponsored by Centro Internazionale Matematico Estivo, ed. Cattaneo C., Bressanone, Italy, June 1970, Edizione Cremonese, Rome, 1971. [§ 22.2, доп. 22.2.]
204. *Thorne K. S.*, Astrophys. Journ., 179, 897 (1973). [§ 22.2, доп. 22.2.]
205. *Ehlers J.*, Akad. Wiss. Lit. Mainz Abh. Math.-Nat. Kl., 793, (1961). [§ 22.3.]
206. *Taub A. H.*, Studies in Applied Mathematics — Math. Assoc. Amer. Studies in Math., 7, 150 (1971). [§ 22.3.]
207. *Ellis G. F. R.*, Relativistic cosmology в книге General Relativity and Cosmology, proceedings of course 47 of the International School of Physics «Enrico Fermi», ed. Sachs R., Academic Press, 1971. [§ 22.3, 27.2, упр. 22.6, 29.5.]
208. Relativistic Fluid Dynamics, proceedings of a summer school sponsored by Centro Internazionale Matematico Estivo, ed. Cattaneo C., Bressanone, Italy, June 1970, Edizione Cremonese, Rome, 1971. [§ 22.3.]
209. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.*, Механика сплошных сред, ГИТЛ, М., 1954. [Упр. 22.7.]
210. *Eckart C.*, Phys. Rev., 58, 919 (1940). [Упр. 22.7.]
211. *Israel W.*, The relativistic Boltzman Equation, в книге General Relativity, Papers in Honor of J. L. Synge, ed. O'Raifeartaigh L., Oxford Univ. Press, London, 1972, p. 201. [§ 22.6.]
212. *Marle C.*, Ann. Inst. Henri Poincare, 10, 67, 127 (1969). [§ 22.6, упр. 22.7]
213. *Anderson J. L.*, Relativistic Boltzmann theory and the Grad method of moments, в книге *Carmeli M.*, *Fickler S. I.*, *Witten L.*, Relativity, Plenum, New York, 1970, p. 109. [Упр. 22.7.]
214. *Stewart J. M.*, Non-Equilibrium Relativistic Kinetic Theory, lecture notes in Physics 10, Springer-Verlag, Berlin, 1971. [§ 22.6, упр. 22.7.]
215. *De Rham G.*, Variétés Différentiables, Herman, Paris, 1955. [§ 22.4.] (Имеется перевод: *Ж. де Рам*, Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.)
216. *Sachs R. K.*, Proc. Roy. Soc., London, A264, 309 (1961). [§ 22.5.]

217. *Jordan P., Ehlers J., Sachs R.*, Akad. Wiss. Lit. Mainz Abh. Math.-Nat. Kl., **1**, 3 (1961). [§ 22.5.]
218. *Robinson I.*, Journ. Math. Phys., **2**, 290 (1961). [§ 22.5.]
219. *Cole J.*, Perturbation Methods in Applied Mathematics, Ginn-Blaisdell, Waltham, Mass., 1968. [§ 22.5.]
220. *Liouville J.*, Liouville's Journ. de Math. Pures et Appliquées, **2**, 16 (1837). [§ 22.5.]
221. *Rayleigh, Lord*, Proc. Roy. Soc., London, **A86**, 207 (1912). [§ 22.5.]
222. *Sommerfeld A., Runge J.*, Ann. Phys. (Germany), **35**, 277 (1911). [§ 22.5.]
223. *Keller J. B., Lewis R. M., Seckler B. D.*, Commun. Pure and Appl. Math., **9**, 207 (1956). [§ 22.5.]
224. *Kline M.*, Journ. Rat. Mech. and Anal., **3**, 315 (1954). [§ 22.5.]
225. *Lewis R. M.*, Journ. Rat. Mech. and Math., **7**, 593 (1958). [§ 22.5.]
226. *Fröman N., Fröman P. O.*, JWKB approximation: contributions to the theory, North-Holland, Amsterdam, 1965. [§ 22.5.]
227. *Einstein A.*, Si l'on modifie la longueur du pendule..., p. 450, в книге La théorie du rayonnement et les quanta, eds. Langevin P., de Broglie M., Gauthier-Villars, Paris, 1912. [Доп.22.4.]
228. *Ehrenfest P.*, Amsterdam Acad. Proc., **19**, 576 (1916). [Доп. 22.4.]
229. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*, Механика, изд-во «Наука», М., 1965 [Доп. 22.4.]
230. *Baym G.*, Lectures on Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1969. [Доп. 22.4.]
231. *Tauber G. E., Weinberg J. W.*, Phys. Rev., **122**, 1342 (1961). [§ 22.6.]
232. *Lindquist R. W.*, Ann. Phys. (USA), **37**, 487 (1966). [§ 22.6.]
233. *Lecat M.*, Bibliographie de la relativité, Lamertine, Bruxelles, 1924.
234. *Boni N., Russ M., Laurence D. H.*, A Bibliographical Check List and Index to the Published Writings of Albert Einstein, Pageant Books, Paterson, N.J.1960.
235. *Chick H. J.*, Theory of Gravitation 1920—Present (Bibliography), Report LMS-2328 of Los Alamos Scientific Laboratory, New Mexico, 1960.
236. *Chick H. J.*, Theory of Gravitation 1959-1963 (Bibliography), Report LMS-3099 of Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, 1964.
237. *Combridge J. T.*, Bibliography of Relativity and Gravitation Theory 1921—1937, Kings College, London, 1965.
238. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.*, Строение и эволюция Вселенной, изд-во «Наука», 1975. [§ 23.1, 27.1, 28.1, 28.2, 30.1.]
239. *Avez A.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **A1**, 291 (1964). [§ 23.1.]
240. *Künzle H. P.*, Commun. Math. Phys., **20**, 85 (1971). [§ 23.1.]
241. *Schwarzschild K.*, Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flussigkeit nach der Einsteinschen Theorie, Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech., 1916, S. 424. [§ 23.2, доп. 23.2.]
242. *Tolman R. C.*, Phys. Rev., **55**, 364 (1939). [§ 23.2, упр. 23.9.]
243. *Oppenheimer J. R., Volkoff G.*, Phys. Rev., **55**, 374 (1939). [§ 23.2, фиг. 24.1, доп. 24.1, упр. 23.10.]
244. *Bohr A., Mottleson B. R.*, Nuclear Structure, vol. I, Single-Particle Motion, Benjamin, New York, 1969. [§ 23.4.]
245. *Kittel C.*, Elementary Statistical Physics, Willey, New York, 1958. (Имеется перевод: *Ч. Киттель*, Элементарная статистическая физика, ИЛ, 1960.) [§ 23.4.]
246. *Sears F. W.*, An Introduction to Thermodynamics, the Kinetic Theory of Gases and Statistical Mechanics, Addison-Wesley, Mass., 1953. [§ 23.4.]
247. *Misner C. W.*, Phys. Rev., **B137**, 1360 (1965). [Доп. 23.1.]
248. *Schwarzschild K.*, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech., 1916, S. 189. [§ 23.6.]
249. *Fronsdal C.*, Phys. Rev., **116**, 778 (1959). [§ 23.8.]
250. *Clarke C. J. S.*, Proc. Roy. Soc., London, **A314**, 417 (1970). [§ 23.8.]
251. *Kasner E.*, Am. Journ. Math., **43**, 130 (1921). [§ 23.8.]
252. *Kasner E.*, Am. Journ. Math., **43**, 126 (1921). [§ 23.8.]

253. *Flamm L.*, Phys. Zs., **17**, 448 (1916). [§ 23.8.]
254. *Pope A.*, Essay on Man, London, 1733. [Эпиграф к гл. 24.]
255. *Dirac P. A. M.*, Proc. Roy. Soc., London, **A112**, 661 (1926). [Доп. 24.1.]
256. *Fowler R. H.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **87**, 114 (1926). [Доп. 24.1.]
257. *Chandrasekhar S.*, Phil. Mag., **11**, 592 (1931). [Доп. 24.1.]
258. *Chandrasekhar S.*, Astrophys. Journ., **74**, 81 (1931). [Доп. 24.1.]
259. *Ландау Л. Д.*, Phys. Zs. Sowjetunion, **1**, 285 (1932). [Доп. 24.1.]
260. *Каплан С. А.*, Ученые записки Львовского университета, **15**, 109 (1949). [Доп. 24.1.]
261. *Каплан С. А.*, ЖЭТФ, **19**, 951 (1949). [Доп. 24.1.]
262. *Faulkner J., Gribbin J. R.*, Nature, **218**, 734 (1968). [§ 24.2, доп. 24.1, 26.1.]
263. *Chadwick J.*, Nature, **129**, 312 (1932). [Доп. 24.1.]
264. *Baade W., Zwicky F.*, Proc. Nat. Acad. Sci. (US), **20**, 259 (1934). [Доп. 24.1.]
265. *Baade W., Zwicky F.*, Proc. Nat. Acad. Sci. (US), **20**, 254 (1934). [Доп. 24.1.]
266. *Baade W., Zwicky F.*, Phys. Rev., **45**, 138 (1934). Abstract of paper presented at Stanford meeting of Am. Phys. Soc., Dec. 15, 16, 1933. [Доп. 24.1.]
267. *Duyvendak J. J. L.*, Proc. Astron. Soc. Pacific, **54**, 91 (1942). [Доп. 24.1.]
268. *Mayall N. U., Oort J. H.*, Proc. Astron. Soc. Pacific, **54**, 95 (1942). [Доп. 24.1.]
269. *Baade W.*, Astrophys. Journ., **96**, 188 (1942). [Доп. 24.1.]
270. *Minkowski R.*, Astrophys. Journ., **96**, 199 (1942). [Доп. 24.1.]
271. *Hewish A., Bell S. J., Pilkington J. D. H., Scott P. F., Collins R. A.*, Nature, **217**, 709 (1968). [Доп. 24.1.]
272. *Gold T.*, Nature, **218**, 731 (1968). [Доп. 24.1.]
273. *Cocke W. J., Disney H. J., Taylor D. J.*, Nature, **221**, 525 (1969). [Доп. 24.1.]
274. *Laplace P. S.*, Le Système du monde, vol. II, Paris, 1795. [Фиг. 24.1, доп. 24.1.]
275. *Oppenheimer J. R., Snyder H.*, Phys. Rev., **56**, 455 (1939). [Фиг. 24.1, доп. 24.1.]
276. *Hoyle F., Fowler W. A.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **125**, 169 (1963). [§ 24.5, доп. 24.1.]
277. *Hoyle F., Fowler W. A.*, Nature, **197**, 533 (1963). [§ 24.5, доп. 24.1.]
278. *Chandrasekhar S.*, Phys. Rev. Lett., **12**, 114, 437 (1964). [§ 26.1, доп. 24.1, 26.2.]
279. *Chandrasekhar S.*, Astrophys. Journ., **140**, 417 (1964). [§ 26.1, доп. 24.1, 26.2.]
280. *Bardeen J. M., Wagoner R. V.*, Astrophys. Journ., **167**, 359 (1971). [Доп. 24.1.]
281. *Salpeter E. E., Wagoner R. V.*, Astrophys. Journ., **164**, 557 (1971). [Доп. 24.1.]
282. *Зельдович Я. Б., Подурец М. А.*, Астрон. журн., **42**, 963 (1965). [§ 24.6, 25.7, доп. 24.1, 25.9.]
283. *Ipser J. R.*, Astrophys. Journ., **158**, 17 (1969). [Доп. 24.1, 25.9.]
284. *Harrison B. K., Wheeler J. A.*, The Harrison-Wheeler equation of state, 1958, first presented in Onzième Conseil de Physique Solvay: La Structure et L'évolution de l'nivers, Editions Stoops, Brussels, 1959; presented in greater detail в книге: *Harrison B. K., Thorne K. S., Wakano M., Wheeler J. A.*, Gravitation Theory and Gravitational Collapse, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1965. [§ 24.2, фиг. 24.2.]
285. *Cameron A. G. W.*, Ann. Rev. Astron. and Astrophys., **8**, 179 (1970). [§ 24.2.]
286. *Baym G., Bethe H. A., Pethick C. J.*, Nuclear Phys., **A175**, 225 (1971). [§ 24.2.]
287. *Harrison B. K., Thorne K. S., Wakano M., Wheeler J. A.*, Gravitation Theory and Gravitational Collapse, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1965. (Имеется перевод: *Дж. Уилер, Б. Гаррисон, М. Вакано, К. Торн*, Теория

гравитации и гравитационный коллапс, изд-во «Мир», 1967.) [§ 26.1, фиг. 24.2.]
288. *Hartle J. B., Thorne K. S.*, Astrophys. Journ., 153, 807 (1968). [Фиг. 24.2.]
289. *Gerlach U.*, Phys. Rev., 172, 1325 (1968). [§ 24.2.]
290. *Rhoades C. E. J.*, Investigations on the Physics of Neutron Stars, докторская диссертация, Princeton University, 1971. [§ 24.2.]
291. *Wheeler J. A.*, Ann. Rev. Astron. and Astrophys., 4, 393 (1966). [§ 24.3.]
292. *Thorne K. S.*, Astrophys. Journ., 158, 1 (1969). [§ 24.3.]
293. *Langer W. D., Cameron A. G. W.*, Astrophys. and Space Sci., 5, 213 (1969). [§ 24.3.]
294. *Pacini F.*, Nature, 219, 145 (1968). [§ 24.3.]
295. *Goldreich P., Julian W. H.*, Astrophys. Journ., 157, 869 (1968). [§ 24.3.]
296. *Ostriker J. P., Gunn J. E.*, Astrophys. Journ., 157, 1395 (1969). [§ 24.3.]
297. *Ruffini R., Wheeler J. A.*, Relativistic cosmology and space platforms в книге Proceedings of the Conference on Space Physics, European Space Research Organization, Paris, 1971, p. 45. [Фиг. 24.3.]
298. *Ruderman M.*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 10, 427 (1972). [§ 24.3.]
299. *Fowler W. A., Hoyle F.*, Astrophys. Journ. Supp., 9, 201 (1964). [§ 24.4.]
300. *Fowler W. A.*, Astrophys. Journ., 144, 180 (1966). [§ 24.4, доп. 26.2.]
301. *Ledoux P., Walraven Th.*, Variable stars в книге Handbuch der Physik, Bd. 51, ed. Flügge S., Springer-Verlag, Berlin, 1958, S. 353. [Доп. 24.2.]
302. *Sanders R.*, Astrophys. Journ., 162, 791 (1970). [§ 24.5, 24.6.]
303. *Spitzer L., Jr.*, Dynamical evolution of dense spherical star systems, в книге Semaine d'étude sur les noyeaux des galaxies 1970, Pontificae Academiae Scientarum Scripta Varia № 35, 1971. [§ 24.5, 24.6.]
304. *Colgate S. A.*, Astrophys. Journ., 150, 163 (1967). [§ 24.5.]
305. *Fackerell E. D., Ipser J. R., Thorne K. S.*, Comments Astrophys. and Space Phys., 1, 134 (1969). [§ 24.6, доп. 25.9.]
306. American Ephemeris and Nautical Almanac for 1964, US Government Printing Office, Washington, D.C., 1962. [Фиг. 25.1.]
307. *Allen C. W.*, Astrophysical Quantities, University of London, Athlone Press, London, 1963. (Имеется перевод с издания 1958 г.: *К. У. Аллен*, Астрофизические величины, ИЛ, 1960.) [Форзац, доп. 25.1.]
308. *Lindquist R. W., Wheeler J. A.*, Rev. Mod. Phys., 29, 432 (1957). [§ 27.10, доп. 25.2, фиг. 25.3, 27.3.]
309. *Hartle J. B.*, Phys. Rev., D3, 2938 (1971). [Доп. 25.2.]
310. *Hartle J. B.*, Can a Schwarzschild black hole exert long-range neutrino forces? в книге Magic Without Magic: John Archibald Wheeler, ed. Klauder J., Freeman, San Francisco, 1972. [Доп. 25.2.]
311. *Wheeler J. A.*, Transcending the law of coservation of leptons, в книге Atti del Convegno Internazionale sul Tema: The Astrophysical Aspects of the Weak Interactions; Quaderno № 157, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1971, p. 133. [Доп. 25.2.]
312. *Wheeler J. A.*, From Mendeléev's atom to the collapsing star, в книге Atti del Convegno Mendeléeviano, Accademia delle Scienze, Torino, 1971, p. 189; reprinted in Trans. New York Acad. Sci., 33, 745 (1971). [§ 28.3, доп. 25.2.
313. *Wyler J. A.* (pseudonym), Rasputin, science and the transmogrification of destiny, preprint bearing the Princeton University seal, 1971. [Доп. 25.2.]
314. *Teitelboim C.*, Nuovo Cim., II, 3, 397 (1972). [Доп. 25.2.]
315. *Teitelboim C.*, Phys. Rev., D5, 2941 (1972). [Доп. 25.2.]
316. *Bekenstein J.*, Phys. Rev., D5, 1239 (1972). [Доп. 25.2.]
317. *Bekenstein J.*, Phys. Rev., D5, 2403 (1972). [Доп. 25.2.]
318. *Teitelboim C.*, Nuovo Cim. Lett., II, № 3, 326 (1972). [Доп. 25.2.]
319. *Kemble E. C.*, The Fundamental Principles of Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1937. [Доп. 25.3.]
320. *Wintner A.*, Analytical Foundations of Celestial Mechanics, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1941. [Доп. 25.4.]
321. *Siegel C. L.*, Vorlesungen über Himmelsmechanik, Springer, Berlin, 1956. [Доп. 25.4.]

322. *Siegel C. L.*, *Moser J. K.*, Lectures on Classical Mechanics, Springer, Berlin and New York, 1971. [Доп. 25.4.]
323. *Killing W.*, Journ. Reine Angew. Math., **109**, 121 (1892). [§ 25.2.]
324. *Regge T.*, *Wheeler J. A.*, Phys. Rev., **108**, 1063 (1957). [§ 25.5.]
325. *Khuri N.*, неопубликованные расчеты, 1957. [§ 25.5.]
326. *Hagihara Y.*, Japan. Journ. Astron. Geophys., 8, 67 (1931). [§ 25.5.]
327. *Darwin C.*, Proc. Roy. Soc., London, **A249**, 180 (1959). [§ 25.5, фиг. 25.7.]
328. *Darwin C.*, Proc. Roy. Soc., London, **A263**, 39 (1961). [§ 25.5, фиг. 25.7.]
329. *Mielnik B.*, *Plebanski J.*, Acta Phys. Polon., **21**, 239 (1962). [§ 25.5.]
330. *Brillouin L.*, Relativity Reexamined, Academic Press, New York, 1970. (Имеется перевод: *А. Бриллюэн*, Новый взгляд на теорию относительности, изд-во «Мир», 1972.) [Упр. 25.21.]
331. *Богородский А. Ф.*, Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии, Изд-во Киевского ун-та, 1962. [Упр. 25.22.]
332. *Power E. A.*, *Wheeler J. A.*, Rev. Mod. Phys., **29**, 480 (1957). [§ 25.6.]
333. *Ford K. W.*, *Wheeler J. A.*, Ann. Phys. (USA), **7**, 287 (1959). [§ 25.6.]
334. *Ford K. W.*, *Wheeler J. A.*, Ann. Phys. (USA), **7**, 259 (1959). [§ 25.6.]
335. *Огородников К. Ф.*, Динамика звездных систем, Физматгиз, М., 1958. [§ 25.7.]
336. *Бисноватый-Коган Г. С.*, *Зельдович Я. Б.*, Астрофизика, **5**, 223 (1969). [Упр. 25.28.]
337. *Bisnovatyi-Kogan G. S.*, *Thorne K. S.*, Astrophys. Journ., **160**, 875 (1970). [Упр. 25.28.]
338. *Einstein A.*, Ann. Math. (USA), 40, 922 (1939). [Упр. 25.29.]
339. *Zapolsky H. S.*, Astrophys. Journ. Lett., **153**, 163 (1968). [Упр. 25.29.]
340. *Fackerell E. D.*, Astrophys. Journ., **153**, 643 (1968). [Доп. 25.8.]
341. *Fackerell E. D.*, Relativistic Stellar Dynamics, University of Sydney, диссертация, не опубликовано, 1966. [Доп. 25.9.]
342. *Cocke W. J.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **A2**, 283 (1965). [§ 26.1.]
343. *Bardeen J. M.*, *Thorne K. S.*, *Meltzer D. W.*, Astrophys. Journ., **145**, 505 (1966). [Доп. 26.1.]
344. *Mathews J.*, *Walker R.*, Mathematical Methods of Physics, Benjamin, New York, 1965. (Имеется перевод: *Дж. Мэтьюз*, *Р. Уокер*, Математические методы физики, Атомиздат, М., 1972.) [Доп. 26.1.]
345. *Meltzer D. W.*, *Thorne K. S.*, Astrophys. Journ., **145**, 514 (1966). [Доп. 26.1.]
346. *Chandrasekhar S.*, Astrophys. Journ., **142**, 1519 (1965). [Доп. 26.2.]
347. *Fowler W. A.*, Rev. Mod. Phys., 36, 545, 1104 (1964). [Доп. 24.1, 26.2.]
348. *Wright J. P.*, Phys. Rev., **B136**, 288 (1964). [Доп. 26.2.]
349. *Гуревич В. Ц.*, Астрон. журн., 42, 974 (1965). [Упр. 26.1.]
350. *Дорошкевич А. Г.*, *Зельдович Я. Б.*, *Новиков И. Д.*, ЖЭТФ, **49**, 170 (1965). [Упр. 26.1.]
351. *Hartle J. B.*, *Sharp D. H.*, Phys. Rev. Lett., **15**, 909 (1965). [Упр. 26.1.]
352. *Hartle J. B.*, Astrophys. Journ., **150**, 1005 (1967). [Упр. 26.1.]
353. *Krefetz E.*, Astrophys. Journ., **148**, 589 (1967). [Упр. 26.1.]
354. *Cohen J. M.*, *Brill D. R.*, Nuovo Cim., **56B**, 209 (1968). [Упр. 26.1.]
355. *Cohen J. M.*, Journ. Math. Phys., 9, 905 (1968). [Упр. 26.1.]
356. *Hubble E. P.*, Astrophys. Journ., 79, 8 (1934). [§ 27.1, доп. 29.5.]
357. *Hubble E. P.*, Astrophys. Journ., 84, 517 (1936). [§ 27.1.]
358. *Sandage A.*, Distances to galaxies: the Hubble constant, the Friedmann time and the edge of the world, in Proceedings of the Symposium on the Galaxy and the Distance Scale, Essex, England, 1972, в печати. [§ 27.1, 29.3, 29.4, доп. 29.4.]
359. *Sandage A.*, *Tamman G. A.*, *Hardy E.*, Astrophys. Journ., **172**, 253 (1972). [§ 27.1.]
360. *Holden D. J.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **133**, 225 (1966). [§ 27.1.]
361. *Hughes R. G.*, *Longair M. S.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **135**, 131 (1967). [§ 27.1.]
362. *Boughn S. P.*, *Fram D. M.*, *Partridge R. B.*, Astrophys. Journ., **165**, 439 (1971). [§ 27.1, 27.2, 30.8.]

363. *Peebles P. J. E.*, Physical Cosmology, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971. (Имеется перевод: *Дж. Пиблс*, Физическая космология, изд-во «Мир», 1975.) [§ 27.1, 27.2, 28.1, 29.6, доп. 27.7.]
364. *Hubble E. P.*, Proc. Nat. Acad. Sci. (US), **15**, 169 (1929). [§ 27.9, 29.2, доп. 27.1, 29.5. ]
365. *Bondi H.*, Cosmology, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 2d ed., 1961. [Доп. 27.1.]
366. *Baade W.*, Report to Commission 28 of I.A.U., Rome, September, 1952. [Доп. 27.1.]
367. *Baade W.*, Pub. Astron. Soc. Pacific, **28**, 5 (1956). [Доп. 27.1.]
368. *Sandage A.*, Astrophys. Journ., **127**, 513 (1958). [Доп. 27.1.]
369. *Ehlers J.*, *Geren P.*, *Sachs R. K.*, Journ. Math. Phys., 9, 1344 (1968). [§ 27.2.]
370. *Penzias A. A.*, *Wilson R. W.*, Astrophys. Journ., **142**, 419 (1965). [§ 27.2.]
371. *Dicke R. H.*, *Peebles P. J. E.*, *Roll P. G.*, *Wilkinson D. T.*, Astrophys. Journ., **142**, 414 (1965). [§ 27.2, 28.1.]
372. *Partridge R. B.*, Am. Sci., 57, 37 (1969). [§ 27.2.]
373. *Noerdlinger P. D.*, *Petrosian V.*, Astrophys. Journ., **168**, 1 (1971). [§ 27.5.]
374. *Robertson H. P.*, Astrophys. Journ., 82, 248 (1935). [Упр. 27.5.]
375. *Robertson H. P.*, Astrophys. Journ., 83, 187, 257 (1936). [Упр. 27.5.]
376. *Walker A. G.*, Proc. London Math. Soc., 42, 90 (1936). [Упр. 27.5.]
377. *Weyl H.*, Classical Groups: Their Invariants and Representation, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 2d ed., 1946. [Доп. 27.2.]
378. *Coxeter H. S. M.*, Regular Polytopes, Macmillan, New York, 2d ed., 1963. [Доп. 27.2.]
379. *Auslander L.*, *Markus L.*, Flat Lorentz 3-Manifolds, American Mathematical Soc., Providence, R.I., 1959. [Доп. 27.2.]
380. *Hughston L.*, Astrophys. Journ., **158**, 987 (1969). [§ 27.9.]
381. *Brill D. R.*, *Wheeler J. A.*, Rev. Mod. Phys., 29, 465 (1957). [§ 27.10.]
382. *Alfvén H.*, *Klein O.*, Ark. Fys. 23, 187 (1962). [§ 27.10, 27.11, 28.4, доп. 27.7.]
383. *Alfvén H.*, Phys. Today, **24**, 28 (1971). [§ 27.10, 27.11, 28.4.]
384. *Klein O.*, Science, **171**, 339 (1971). [§ 27.10, 27.11, доп. 27.7.]
385. *Omnes R. L.*, Phys. Rev. Lett., **23**, 38 (1969). [§ 27.10.]
386. *Matzner R. A.*, Astrophys. Journ., **154**, 1123 (1968). [§ 27.10.]
387. *De Sitter W.*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., **19**, 1217 (1917). [§ 27.11.]
388. *De Sitter W.*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., **20**, 229 (1917). [§ 27.11.]
389. *Moritz B. K.*, A Study of the General Relativistic Dynamics of the Klein-Alfvén Cosmology, University of Maryland, докторская диссертация. [§ 27.11, 28.4.]
390. *De Vaucouleurs G.*, Astron. Soc. Pacific Publ., **83**, 113 (1971). [§ 27.11.]
391. *Steigman G.*, Antimatter and cosmology в книге General Relativity and Cosmology, ed. Sachs R. K., proceedings of course 47 of the International School of Physics «Enrico Fermi», Academic Press, 1971, p. 373. [§ 27.11, 28.4.]
392. *Einstein A.*, Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber. 235 (1931). [§ 27.11.]
393. *Зельдович Я. Б.*, Письма ЖЭТФ, **12**, 443 (1970). [§ 30.5, упр. 27.12.]
394. *Зельдович Я. Б.*, Comm. Astrophys. and Space Phys., **3**, 179 (1971). [Упр. 27.12.]
395. *Зельдович Я. Б.*, Creation of particles and antiparticles in an electric and gravitational field в книге Magic Without Magic: John Archibald Wheeler, ed. Klauder J., Freeman, San Francisco, 1972, p. 277. [§ 30.8, упр. 27.12.]
396. *Burbidge G. R.*, *Burbidge E. M.*, Nature, **222**, 735 (1969). [Упр. 27.14.]
397. *Burbidge G. R.*, *Burbidge E. M.*, Nature, **224**, 21 (1969). [Упр. 27.14.]
398. *Полубаринова-Кочина П. Я.*, Усп. физ. наук, **80**, 345 (1963). [Доп. 27.6.]
399. *Munitz M. K.*, Theories of the Universe, Free Press, New York, 1957. [Доп. 27.7.]
400. *Nasr H.*, Three Muslim sages: Avicenna, Suhrawardi, Ibn Arabi, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1964. [Доп. 27.7.]

401. *North J. D.*, The Measure of the Universe, Clarendon Press, Oxford, 1965. [Доп. 27.7.]
402. *Rindler W.*, Essential Relativity: Special, General and Cosmological, Van Nostrand, New York, 1969. [Доп. 27.7.]
403. *Sciama D. W.*, Modern Cosmology, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1971. (Имеется перевод: *Д. Шама*, Современная космология, изд-во «Мир», 1973.) [§ 28.1, доп. 27.7.]
404. *Zimmer H.*, Myths and Symbols in Indian Art and Civilization, Bollingen Foundation, Washington, D.C., 1946, paperback reprint, Harper and Row, New York, 1962. [Доп. 27.7.]
405. *Cornford F. M.*, Plato's Cosmology: The Timaeus of Plato, Humanities Press, New York, 1937. [Доп. 27.7.]
406. *Guthrie W. K. C.*, trans., Aristotle's On the Heavens, Harward Univ. Press, Cambridge, Mass., 1939. [Доп. 27.7.]
407. *Warrington J.*, Aristotle's Metaphysics, Dutton, New York, 1956. [Доп. 27.7.]
408. *Taliaferro R. C.*, Ptolemy, The Almagest, in Great Books of the Western World, Encyclopedia Brittanica, Inc., Chicago, III, vol. 16, 1952. [Доп. 27.7.]
409. *Bacon R.*, Opus Majus 1268, ed. Bridges J. H., Clarendon Press, Oxford, England, vols. 1 and 2, 1897; vol. 3, 1900. [Доп. 27.7.]
410. *Heron G.*, trans.. Nicolas Cusanus's Of Learned Ignorance, Yale Univ. Press, New Haven, Conn., 1954. [Доп. 27.7.]
411. *Dobson J. F., Brodetsky S.*, Nicolaus Copernicus's De Revolutionibus (translation of Preface and Book I), Roy. Astron. Soc., London, 1947. [Доп. 27.7.]
412. *Johnson F. R.*, Astronomical Thought in Renaissance England, John Hopkins Press, Baltimore, 1937. [Доп. 27.7.]
413. *Singer D. W.*, Giordano Bruno, His Life and Thought with Annotated Translation of His Work, On the Infinite Universe and Worlds, Abelard-Schuman, New York, 1950. [Доп. 27.7.]
414. *Kepler J.*, Astronomia nova αιτιολογητος, seu Physica coelestis tradita comentariis de motibus stellae Martis, Prague, 1609. [Доп. 27.7.]
415. *Kepler J.*, De Harmonice Mundi, Augsburg, 1619. [Доп. 27.7.]
416. *Huygens C.*, Cosmotheoros, The Hague, 1698. English translation, The Celestial Worlds Discovered or, Conjectures Concerning the Inhabitants, Plants and Productions of the Worlds in the Planets, London, 1698. [Доп. 27.7.]
417. *Halley E.*, Roy. Soc., London, Phil. Trans., **31**, 22, 24 (1720). [Доп. 27.7.]
418. *De Cheseaux P. L.*, Traite de la comete qui a paru en décembre 1743, Paris, 1744. [Доп. 27.7.]
419. *Olbers H. W. M.*, Uber die Durchsichtigkeit des Weltraumes, Bode Jahrbuch, **110**, 1826, та же статья опубликована в Bibliothèque Universelle for February 1826 and в сб. Edinburgh New Philosophical Journal for April — October, 1826, p. 141. [Доп. 27.7.]
420. *Wright T.*, An Original Theory or New Hypothesis of the Universe, Chapelle, London, 1750; [Доп. 27.7.]
421. *Kant J.*, Allgemeine Naturgeschichte und Theories des Himmels, oder Versuch von der Verfassung und dem Mechanischen Ursprunge des ganzen Welt gebäudes nach Newtonischen Grundsätzen Abgehandelt, Petersen, Konigsberg and Leipzig, 1755. Translation by Hastie W., with introduction by Munitz M. K., Universal Natural History and Theory of the Heavens, Univ. of Michigan Press, Ann. Arbor, 1969. [Доп. 27.7.]
422. *Lambert J. H.*, Kosmologischen Briefe, Augsburg, 1761, см. также The System of the World, translated, with modifications, from the French by Jacque J., London, 1800; reprinted in part в книге *Munitz M. K.*, Theories of the Universe, Free Press, New York, 1957. [Доп. 27.7.]
423. *Klein O.*, Boundary conditions and general relativity, в книге Preludes in Theoretical Physics in Honor of Weisskopf V. F., eds. de-Shalit A.,

Feshbach H., Van Hove L., North Holland, Amsterdam, 1966, p. 23. [Доп. 27.7.]
424. *Comte A.*, Cours de philosophie positive, Paris, 1835. [Доп. 27.7.]
425. *Fermi E.*, Phys. Rev., 75, 1169 (1949). [Доп. 27.7.]
426. *Gamow G.*, My World Line, Viking Press, New York, 1970. [Доп. 27.7.]
427. *Eliot T. S.*, Tradition and individual talent в книге The Sacred Wood; Essays on Poetry and Criticism, Methuen, London, 1920. [Доп. 27.7.]
428. *Whitehead A. N.*, The Function of Reason, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1929. [Эпиграф к гл. 28.]
429. *Peebles P. J. E.*, Gen. Rel. and Grav., 3, 63 (1972). [§ 28.1.]
430. *Kundt W.*, Cosmological Density Fluctuations during Hadron Stage, в книге General Relativity and Cosmology, proceedings of course 47 of International School of Physics «Enrico Fermi», ed. Sachs R. K., Academic the Press, 1971, p. 365. [§ 28.1.]
431. *Gamov G.*, Nature, 162, 680 (1948). [§ 28.1.]
432. *Alpher R. A., Herman R. C.*, Nature, 162, 774 (1948). [§ 28.1.]
433. *Alpher R. A., Herman R. C.*, Phys. Rev., 74, 1737 (1948). [§ 28.1.]
434. *Alpher R. A., Herman R. C.*, Rev. Mod. Phys., 22, 153 (1950). [§ 28.1.]
435. *Fermi E., Turkevich A.*, неопубликованная работа, описанная в статье *Alpher R. A., Herman R. C.*, Theory of the origin and relative abundance distribution of the elements, Rev. Mod. Phys., 22, 153 (1950). [§ 28.1.]
436. *Peebles P. J. E.*, Astrophys. Journ., 146, 542 (1966). [§ 28.1.]
437. *Wagoner R. V., Fowler W. A., Hoyle F.*, Astrophys. Journ., 148, 3 (1967). [§ 28.1.]
438. *Fowler W. A.*, Nuclear Astrophysics, American Philosophical Society, Philadelphia, Penn., 1967. [§ 28.1.]
439. *Clayton D.*, Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis, McGraw-Hill, New York, 1968. [§ 28.1.]
440. *Danziger I. J.*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 8, 161 (1970). [§ 28.1.]
441. *Schmidt M.*, Astrophys. Journ., 176, 273 (1972). [Доп. 28.1.]
442. *Gunn J. E.*, Astrophys. Journ. Lett., 164, L113 (1971). [Доп. 28.1.]
443. *Arp H.*, Science, 174, 1189 (1971). [Доп. 28.1.]
444. *Sandage A.*, Astrophys. Journ., 178, 25 (1972). [§ 29.4, доп. 28.1, 29.4.]
445. *Misner C. W.*, Astrophys. Journ., 151, 431 (1968). [§ 28.2, 30.3.]
446. *Matzner R. A., Misner C. W.*, Astrophys. Journ., 171, 415 (1972). [§ 28.2, 30.4.]
447. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.*, Astrophys. Journ., 152, 25 (1968). [§ 28.3.]
448. *Misner C. W.*, Phys. Rev., 186, 1328 (1969). [§ 28.3.]
449. *Hoyle F.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 108, 372 (1948). [§ 28.4.]
450. *Bondi H., Gold T.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 108, 252 (1948). [§ 28.4.]
451. *Dicke R. H.*, Astrophys. Journ., 152, 1 (1968). [§ 28.4.]
452. *Greenstein G. S.*, Astrophys. Lett., 1, 139 (1968). [§ 28.4.]
453. *Greenstein G. S.*, Ap. Space Sci., 2, 157 (1968). [§ 28.4.]
454. *Morganstern R. E.*, Phys. Rev., D7, 1570 (1973). [§ 28.4.]
455. *Dieter N. H., Epstein E. E., Lilley A. E., Roberts M. S.*, Astron. Journ., 67, 270 (1962). [§ 29.2.]
456. *Roberts M. S.*, Astrophys. Journ., 142, 148 (1965). [§ 29.2.]
457. *Зельдович Я. Б.*, Усп. физ. наук, 80, 357 (1963). [§ 29.2.]
458. *Friedman A.*, Zs. Phys., 10, 377 (1922). [§ 27.9, 29.2, доп. 27.6.]
459. *Wasserburg G. J., Burnett D. S.*, The status of isotopic age determinations on iron and stone meteorites, в книге Meteorite Research, ed. Millman P. M., Reidel, Dordrecht, Holland, 1968, p. 467. [§ 29.7, доп. 29.3.]
460. *Sheldon S. E.*, Astron. Journ., 76, 751 (1971). [§ 29.4.]
461. *Refsdal S., Stabell R., de Lange F. G.*, Mem. Roy. Astron. Soc., 71, 143 (1967). [§ 29.4, доп. 29.4.]
462. *Sandage A.*, Astrophys. Journ., 178, 1 (1972). [§ 29.4, доп. 29.4.]
463. *Sandage A.*, Astrophys. Journ., 173, 485 (1972). [§ 29.5, доп. 29.4.]
464. *Mayall N. U.*, Biograph. Mem. Nat. Acad. Sci., 41, 176 (1970). [Доп. 29.5.]
465. *Hubble E. P.*, Pub. Yerkes Obs., 4, 69 (1920). [Доп. 29.5.]
466. *Hubble E. P.*, Astrophys. Journ., 62, 409 (1925). [Доп. 29.5.]

467. *Hubble E. P.*, Astrophys. Journ., 63, 236 (1926). [Доп. 29.5.]
468. *Hubble E. P.*, Astrophys. Journ., 64, 321 (1926). [Доп. 29.5.]
469. *Hubble E. P., Humason M. L.*, Astrophys. Journ., 74, 43 (1931). [Доп. 29.5.]
470. *Hubble E. P.*, Red-shifts in the spectra of nebulae (Halley Lecture), Clarendon Press, Oxford, England, 1934. [Доп. 29.5.]
471. *Klauder L. T., Jr., Wakano M., Wheeler J. A., Willey R.*, Kinematics of a spherical isotropic uniform universe, в книге Onzième Conseil de Physique Solvay: La Structure et l'évolution de l'univers, Éditions Stoops, Brussels, Belgium, 1959. [§ 29.5.]
472. *Gunn J. E.*, Astrophys. Journ., 150, 737 (1967). [§ 29.5.]
473. *Oort J. H.*, Distribution of galaxies and the density of the universe, в книге Onzième Conseil de Physique Solvay: La Structure et l'évolution de l'univers, Éditions Stoops, Brussels, Belgium, 1958. [§ 29.6. ]
474. *Gott J. R., Gunn J. E.*, Astrophys. Journ. Lett., 169, 13 (1971). [§ 29.6.]
475. *Sandage A.*, The time scale for creation, в книге Galaxies and the Universe, ed. Woltjer L., Columbia Univ. Press, New York, 1968, p. 75. [§ 29.7.]
476. *Sandage A.*, Astrophys. Journ., 162, 841 (1970). [§ 29.7.]
477. *Wasserburg G. J., Schramm D. N., Huneke J. C.*, Astrophys. Journ., 157, L91 (1969). [§ 29.7.]
478. *Fowler W. A.*, New observations and old nucleocosmochronologies в книге Cosmology, Fusion and Other Matters, ed. Reines F., Univ. of Colorado Press, Boulder, Colorado, 1972. [§ 29.7.]
479. *Wagoner R. V.*, Astrophys. Journ., 149, 465 (1967). [Упр. 29.8.]
480. *Field G.*, The origin of galaxies в книге Stars and Stellar Systems, IX: Galaxies and the Universe, eds. Sandage A., Sandage M., Univ. of Chicago Press, Chicago, 1973, в печати. [§ 30.1.]
481. *Peebles P. J. E.*, Proc. Roy. Astron. Soc. Canada, 63, 4 (1969). [§ 30.1.]
482. *Peebles P. J. E., Yu J. T.*, Astrophys. Journ., 162, 815 (1970). [§ 30.1.]
483. *Jones B. T. J., Peebles P. J. E.*, Comm. Astrophys. Space Sci., 4, 121 (1972). [§ 30.1.]
484. *Kasner E.*, Am. Journ. Math., 43, 217 (1921). [§ 30.2.]
485. *Schücking E., Heckmann O.*, World models в книге Onzième Conseil de Physique Solvay, Éditions Stoops, Brussels, 1958, p. 149. [§ 30.2, 30.3.]
486. *De Witt B. S.*, Phys. Rev., 90, 357 (1953). [§ 30.5.]
487. *Parker L.*, Particle Creation in the Expanding Universe, Harward University, диссертация, не опубликовано, 1966. [§ 30.5.]
488. *Parker L.*, Phys. Rev., 183, 1057 (1969). [§ 30.5.]
489. *Зельдович Я. Б., Старобинский А. А.*, ЖЭТФ, 61, 2161 (1971). [§ 30.5.]
490. *Lemaître G.*, Compt. Rend., Acad. Sci., Paris, 196, 1085 (1933). [§ 30.6.]
491. *Lemaître G.*, Compt. Rend., Acad. Sci., Paris, 196, 903 (1933). [§ 30.6.]
492. *Tolman R. C.*, Proc. Nat. Acad. Sci. (US), 20, 169 (1934). [§ 30.6.]
493. *Datt B.*, Zs. Phys., 108, 314 (1938). [§ 30.6.]
494. *Bondi H.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 107, 410 (1947). [§ 30.6.]
495. *Gowdy R. H.*, Phys. Rev. Lett., 27, 826, erratum, p. 1102 (1971). [§ 30.6.]
496. *Лифшиц Е. М., Халатников И. М.*, Advances in Physics, 12, 185 (1963). [§ 30.6.]
497. *Лифшиц Е. М., Халатников И. М.*, Усп. физ. наук, 80, 391 (1963). [§ 30.6.]
498. *Белинский В. А., Халатников И. М.*, ЖЭТФ, 59, 314 (1970). [§ 30.6.]
499. *Белинский В. А., Халатников И. М., Лифшиц Е. М.*, Усп. физ. наук, 102, 463 (1970). [§ 30.6, доп. 30.1.]
500. *Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М.*, ЖЭТФ, 60, 1969 (1971). [§ 30.7.]
501. *Ryan M. P., Jr.*, Ann. Phys., 68, 541 (1971). [§ 30.7.]
502. *Ryan M. P., Jr.*, Hamiltonian Cosmology, Springer, Berlin, 1972. [§ 30.7, доп. 30.1.]
503. *Ryan M. P., Jr.*, Ann. Phys. (USA), 70, 301 (1972). [§ 30.7, доп. 30.1.]
504. *Eardley D., Liang E., Sachs R.*, Journ. Math. Phys., 13, 99 (1972). [§ 30.7.]

505. *Misner C. W.*, Minisuperspace, в книге Magic Without Magic:John Archibald Wheeler, ed. Klauder J., Freeman, San Francisco, 1972. [Доп. 30.1.]
506. *Халатников И. М., Лифшиц Е. М.*, Phys. Rev. Lett., 24, 76 (1970). [Доп. 30.1.]
507. *Misner C. W.*, Classical and quantum dynamics of a closed universe, в книге *Carmeli M., Fickler S. I., Witten L.*, Relativity, Plenum, New York, 1970, 55. [Доп. 30.1.]
508. *Chitre D. M.*, Investigations of the Vanishing of a Horizon for Bianchi Type IX (Mixmaster) Universe, Univ. of Maryland, диссертация, 1972. [§ 30.8.]
509. *Conklin E. K.*, Nature, **222**, 971 (1969). [§ 30.8.]
510. *Дорошкевич А. Г., Лукаш В. Н., Новиков И. Д.*, ЖЭТФ, **60**, 1201 (1971). [§ 30.8.]
511. *Chitre D. M.*, Phys. Rev., D6, 3390 (1972). [§ 30.8.]
512. *Milton J.*, Paradise Lost, Book V, Lines 623—625, в книге The Complete Poems of John Milton, Union Library Association of New York, 1936. [Эпиграф к гл. 25.]

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА[1])

513. *Demianski M., Grischuk L. P.*, General Rel. Grav., 5, 673 (1974).
514. *Бисноватый-Коган Г. С., Рузмайкин А. А.*, Astron. Astrophys., 27, 209 (1973).
515. *Дорошкевич А. Г., Новиков И. Д.*, ДАН СССР, 154, 809 (1964).
516. *Шкловский И. С.*, Космическое радиоизлучение, М., 1966.
517. *Гинзбург В. Л., Озерной Л. М.*, Астрон. журн., **42**, 943 (1964).
518. *Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.*, Письма ЖЭТФ, 5, 119 (1967).
519. *Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.*, ЖЭТФ, 53, 644 (1967).
520. *Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.*, Письма ЖЭТФ, 8, 95, (1968).
521. *Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.*, Сб. Проблемы теоретической физики, посвященный Н. Н. Боголюбову, М., 1969, стр. 15.
522. *Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.*, Астрофизика, 5, 539 (1969).
523. *Сюняев Р. А.*, Астрон. журн., 46, 929 (1969).
524. *Field G. B.*, Proc. IAU symp., 63, ed. Longair M. S., Poland, 1974.
525. *Эйнасто Я., Саар Э., Каасик А., Траат Р.*, Астрон. цирк., № 811 (1974).
526. *Ostriker J. P., Peebles P. J. E., Yahil A.*, Astrophys. Journ. Lett., **193**, L1 (1974).
527. *Longair M. S.*, Proc. IAU symp., 63, ed. Longair M. S., Poland, 1974.
528. *Лифшиц Е. М.*, ЖЭТФ, **16**, 587 (1946).
529. *Лукаш В. Н., Старобинский А. А.*, ЖЭТФ, 66, 1515 (1974).
530. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Старобинский А. А.*, ЖЭТФ, **66**, 1897 (1974).
531. *Лукаш В. Н., Новиков И. Д., Старобинский А. А.*, ЖЭТФ, 69, 1000 (1975).
532. *Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М.*, ЖЭТФ, 62, 1606 (1972).
533. *Brans C.*, Phys. Rev., **125**, 2194 (1962).
534. *Dicke R. H.*, Phys. Rev., **126**, 1875 (1962).
535. *Кузнецов Б. Г.*, Эйнштейновский сборник 1967, изд-во «Наука», 1967, стр. 134.
536. *Френкель Я.*, Zs. Phys., 50, 234 (1928).
537. *Перель Ю. Г.*, Развитие представлений о Вселенной, изд. 2, Физматгиз, 1962.

---

[1]) Составлена редактором перевода.— *Прим. ред.*

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


Адиабатичность 363
Адиабаты показатель, определение 363
Амплитуда скалярная 228
Аналог метода Палатини в механике частицы 138—140
— — — — электродинамике 140—143
Анизотропия, адиабатическое охлаждение 483, 484
— вязкая диссипация 484, 485
— расширение 485
— энергия 483
Априорная геометрия 59—62

Барионы в звезде 269
— плотность 210
— сохранение 362
— химический потенциал 210
— энтропия 210
Белые карлики 282, 293
— — модель 290

Вектор барионного тока 211
— волновой 228
— Киллинга 318, 320—322, 326
— — определение 318
— Пойнтинга 120, 201
— поляризации 228, 237
Вещество внутри звезды 260—264
Взрывы в галактических ядрах 301, 302
Влияние тяготения на материю 75—77
Возмущения лагранжевы 362
— эйлеровы 362
Временные интервалы, измерение 22—28
Вселенная 373—502
— анизотропная, казнеровская модель 482, 483, 485
— — рождение частиц 485, 486
— будущая эволюция 449—480
— гиперповерхность 385, 386
— де Ситтера 419
— изотропия 373—380, 382, 384, 481, 482, 501
— изотропные однородные модели 427
— масса-энергия 375
— непрозрачность 424
— «непрощающая» 423, 424
— однородность 373—380, 382, 384, 481, 482, 501
— параметры, определяющие ее судьбу 449—452
— плотность 477, 478
— радиус 378
— системы координат сопутствующие, синхронные 385—388
— с нулевой кривизной пространства (пространственноплоская) 395 396
— современное состояние 449, 480
— с отрицательной кривизной пространства (пространственнооткрытая) 396, 397
— — положительной кривизной пространства (пространственнозамкнутая) 394, 395

Вселенная, «стандартная» модель 439—446
— фридмановская 416
— — замкнутая 406, 411, 414
— — открытая 416
— эволюция 449—502
— энергия-импульс материи 380—382
Выталкивающая сила в звезде 269

Галактика, кинетическая энергия 380
— конденсация 443
— плотность массы 381
Гамильтониан Арновитта, Дезера и Мизнера (АДМ) 493
Геодезические мировые линии 26
Геометрическая оптика 209—240
— — в искривленном пространстве-времени 225—239
Геометрия Минковского 199
— пространства-времени для статической звезды 376—381
Гидродинамика 209—249
— в искривленном пространстве-времени 215—221
— — слабом гравитационном поле 16
— при наличии вязкости и потока тепла 220
Гиперповерхность однородности, возможные 3-геометрии 391—398
Горизонты фридмановской Вселенной 500
Гравитационная энергия ньютоновской звезды 269
Гравитационное красное смещение 81, 327, 328
— поле 89—91, 218
— — внешнее 271, 272
— — измерение 13—33
— — слабое 68—81
— — энергия 104, 105
Гравитационные волны 75, 77
— — простой детектор 77
— поля почти ньютоновские 79—81
— потенциалы 70
— силы приливные 25, 26
— — слабые 68—81
Гравитационный градиометр 29—33
Гравитоны, распространение 441
Градиент давления в стационарном гравитационном поле 218, 219
Граничные условия 365—367

Давление звезд и галактик 380
«Диаграмма погружения», построение 278—281
Дисперсионные соотношения для геометродинамики 143, 144
— — — электродинамики 143, 144
Доля квазаров 446
Допплеровский сдвиг 465

Задачи на собственные значения 366, 367
Закон локального сохранения энергии-импульса 268
— обратных квадратов 243
— переноса вектора момента импульса Земли 22
— — Ферми — Уолкера 93
— распространения Гамильтона—Якоби 143
— сохранения заряда 225
— — момента импульса 89, 96—123
— — фотонов 237
— — 4-импульса 89, 105—109
— — энергии-импульса 122
— термодинамики второй 211
— — первый 212
— эволюции 446
Законы геометрической оптики 230, 231
— — — вывод 229
— Кеплера 270, 303—308
— сохранения 317—322
— физики в искривленном пространстве-времени 13—17
Звездные пульсации 359—370
— скопления изотермические 356
— — релятивистские 288, 289, 301, 302
— — сферические 350—358
Звезды, давление 380
— конденсация 443
— масса-энергия 272
— модель 272
— нейтронные 262, 282—302
— ньютоновские 267, 273, 297, 369
— описание вещества внутри 260—264
— релятивистская модель 274—276
— релятивистские 267
— сверхмассивные 282—302
— с однородной плотностью 274—276
— — — — ньютоновские 273
— статические 276—280
— сферические 253—281
— уравнения внутреннего строения 264—269
— устойчивость 297—301
— эволюция 289—294
Земля, атмосфера 16
— момент импульса 22
— спутники, см. Спутники Земли

Излучение антинейтринное 407
— космическое микроволновое 381
— — — изотропия 500
— нейтринное 407
— реликтовое 458, 459
— чернотельное 244, 424
Изотропия 382—384
Изотропное давление 210
Интегральные гауссовы потоки для момента импульса 96—101
— — — — 4-импульса 96—101

Квазары 283—302, 444—446
Кинетическая теория 209—249
— — для нетождественных частиц 245
Ковариантные производные, некоммутативность 18, 19
Координаты изотропные 255, 256
— статической сферической системы 254—258
Красное смещение 445
— — дебройлевской длины волны частицы 458
— — космологическое 453—466
— — — реликтового излучения 458—459
Космологическая постоянная 40—43
— — величина 43
Космологические модели 373—438, 448
— — анизотропные 481—502
— — идеализованные 373—438
— — неоднородные 481—502
— параметры 478—480
— теории 448
Космология 374—380, 425, 426, 428, 429
— ньютоновская 377
— фридмановская 412
— — замкнутой Вселенной 405—416
— айнштейновское понимание 415—438
Коэффициент расширения 388—390, 392, 399, 402, 403, 416, 454
— — дифференциальное уравнение 402, 418
— — смысл нормировки 392
Кривизна Вейля 200
— внешняя 150—159
— внутренняя 150—159
— Йорка 201
— пространства 52, 391, 491
— — внутренняя 425, 426
— пространства-времени для плоской гравитационной волны 77
— — риманова, измерение 31—33
— — — калибровочная инвариантность 70
Кривизна скалярная 151
— скалярный инвариант 159

Лагранжиан материи 145, 146
Линеаризованная теория 100
Линейный элемент сферически симметричный, строгий вывод 256—258
Лоренцева калибровка 74
— — определение 71
Лоренцево сокращение 108

Масса гравитирующей системы 82—95
— замкнутой Вселенной 93—95
— измерение 85, 86
— полностью релятивистских источников 86—93
Масса-энергия в линеаризованной теории 100
— изолированной системы 91—93
Маятник Фуко 197
Метод вектора Киллинга 317
— Гамильтона — Якоби 305, 309—316
— Йорка 187—192
— Марцке — Уилера 28
— Палатини вариационный 132—144
Метрика 24, 38, 83, 84, 87, 375
— геодезическая 116
— для однородных изотропных гиперповерхностей 391
— — 3-поверхностей постоянной кривизны 393
— Казнера 482
— Минковского 116, 117
— поправочный член вблизи выбранных небесных тел 95
— статической сферической системы 254—288
— 4-геометрии 149
Микроволновое излучение, горизонты и изотропия 500—502
Мировые линии фотонов 17
Модели космологические анизотропные 481—502
— — однородные 418
— — неоднородные 481—502
Модель Вселенной поворотная 423
— — с вечным расширением 449, 450
— — — повторным сжатием 449, 450
— — стандартная 439—446
— звездного скопления 355
— иерархическая 422, 423
— Казнера 482, 483, 487, 489, 490

Модель Казнера анизотропной Вселенной 482, 483
— перемешанного мира 489
Момент импульса 98, 101
— — выражение в виде объемных интегралов 101—103
— — гравитирующей системы 82—95
— — закон сохранения 105—109
— — замкнутой Вселенной 93—95
— — измерение 85, 86
— — изолированной системы 91—93
— — полностью релятивистских источников 86—93

Нейтрино, распространение 441
Неоднозначность топологии 397, 398
Ньютоновский предел 43—48, 255, 341

Оболочка пыли сферическая 208
Оболочки пыли тонкие 208
Объем в фазовом пространстве 246, 247
— — — — сохранение 247—249
Объемные интегралы 101—103
Оператор де Рама векторный волновой 224
Орбита гравитона 342—350
— нейтрино 342—350
— фотона 342—350
— — качественный анализ 349, 350
Орбиты релятивистские 341, 342
— частиц 328—342
Отклонение света Солнцем 80
Отсутствие априорной геометрии 59—62

Параметр дуги 403
— замедления 462—474
— прицельный 337
Параметры космологические, сводка сведений 478—480
Перемешанный мир 487—500
Плотность Вселенной современная 447
— излучения 381
— космических лучей 381, 480
— лагранжева электромагнитного поля 167
— массы-энергии 51, 52
— межгалактического газа 381
Подход лагранжев или гамильтонов 317
Показатель адиабаты для почти ньютоновских звезд 369
— — критический 369, 370
Показатель адиабаты определение 363
Поле внешнее слабо гравитирующего источника 82—84
— — статического сферического тела 71, 72
— магнитное 381
— электромагнитное, свойства 119—121, 180, 225, 231
Поляризация 231, 232
— вакуума 42
Поправочный член к метрике 95
Постоянная Хаббла 378, 403—405, 460, 461, 466—468
Потенциал электродинамический 224
— эффективный 303—317
Правило: «запятая переходит в точку с запятой» 15
Прецессия гироскопа 85, 86
— равноденствий 19, 20
Принцип Арновита — Дезера — Мизнера (АДМ) 163, 164
— — — — вариационный 170, 171
— вариационный 124—208, 366, 367, 492, 493
— — Гильберта 125
— — Гильберта — Палатини 145
— Гамильтона 319
— действия Гильберта 132—144, 163
— Маха 192—202
— эквивалентности 13—33
— — Эйнштейна 14
Принципы соответствия 46—48
Проблема порядка индексов 17—22
Проблемы начальных значений 174—182
— — — антисимметричных по времени 182—187
— — — симметричных по времени 182—187
Пространственные интервалы, измерение 22—28
Псевдотензор Ландау — Лифшица 103
— энергии-импульса, определение 102
Пульсары 282—302

Радиационное торможение 112
Расщепление пространства-времени 147—150
Рекомбинация плазмы 442

Свойства 3-поверхностей 393
Сдвиг Лэмба — Резерфорда 57
Симметрии 317—322
Сингулярность 447, 496, 498, 502
Соотношение Максвелла 213

Сохранение источника автоматическое 38—40
— объема в фазовом пространстве 247—249
Спин, связь с кривизной 116
Спутники Земли 307
— Юпитера 304, 307
Супергамильтониан 120, 494
Супергамильтонов формализм 320

Тензор кривизны 35, 38
— — внешней 160
— — Йорка 190
— — конформной Вейля 200, 201
— — Римана 22, 41, 77
— — — для однородных изотропных гиперповерхностей 391
— — Риччи 35, 65
— — Эйнштейна 35, 157, 288
— метрический, вариация детерминанта 138
— натяжений 57
— Римана 30, 35, 37, 38, 41, 70, 97, 391
— Риччи 16, 65, 69
— Эйнштейна 41, 70
— — единственность 37, 38
— электромагнитного поля 21, 123
— энергии-импульса 34
— — для скалярного поля 146
— — Фарадея — Максвелла 147
— — электромагнитного поля 119, 121, 126, 145, 231, 244, 352
Тензорная плотность 132, 135
Теорема Лиувилля 240, 241, 247
— фокусировки 234
Теория кинетическая для нетождественных частиц 145
— линеаризованная, основные уравнения 73—75
— Нордстрема 60
— относительности 72
— — параметры 450, 451
— тяготения, асимптотический подход 48—59
— — линеаризованная 68—70
— — Эйнштейна 45, 59—62, 316
— — — геометрическая 11—249, 316, 317
Термодинамика 209—249
— в искривленном пространстве-времени 209—215
Тождество Бианки 110, 137, 304, 402
Топология, неоднозначность 397

Увлечение инерциальных систем отсчета 368
Уравнение Власова 351
— внутреннего строения для звездного скопления 355, 356
Уравнение внутреннего строения звезды 264—271
— Гамильтона 130, 165
— Гамильтона — Якоби 54, 55, 309
— Гаусса — Вайнгартена 154
— геодезического отклонения 45
— гидростатического равновесия Оппенгеймера — Волкова (ОВ) 267
— движения жидкости 398—400
— — Лоренца 111—118, 223
— динамическое 365—367, 401
— для начальных значений 401
— Киллинга 318
— — вывод 318, 319
— непрерывности 218
— Нордстрема 61
— поля Эйнштейна 34—39, 41, 46, 48, 54—56, 68, 76, 89, 101, 109—111, 114, 118, 122, 123, 234, 254, 264, 364, 365, 375, 400—402
— — — с космологической постоянной 41
— состояния Гаррисона — Уилера 291
— — холодного катализированного вещества 290
— Эйлера 216, 222, 398
— Эйнштейна 62—67, 103, 125, 264
— — фрагмент истории 62—67
— Эйнштейна — Фоккера 61
Уравнения движения 109—123
— для начальных значений 362—365
— Максвелла 15, 21, 51, 113, 114, 122, 203, 223
— состояния 262—264
— — в «однопараметрической форме» 262
— — для белых карликов 263
— — — нейтронных звезд 262
— — — сверхмассивных звезд 263
— — общий вид 262
— Эйнштейна — Максвелла 118
Условия сшивания 202—208
Устойчивость звезд 297—301

Фотоны, мировые линии 17
— распространение 443
Фридмановская замкнутая Вселенная, характерные свойства 405, 406
Функция Гамильтона — Якоби 339

Хаббловское время 379, 465
Химический потенциал 213
— — идеального ферми-газа 218

Часы атомные 23
— геодезические 26—28
— маятниковые 22, 24, 25
— человеческие 23
Черные дыры 287, 294, 301, 340, 348
4-импульс, выражение в виде объемных интегралов 101—103
— закон сохранения 105—109
— изолированной системы 91—93

Шварцшильдовская геометрия 303—317, 323—326
Шварцшильдовские координаты, физическая интерпретация 258—260

Эволюция звезды, заключительная стадия 289—294
— популяции квазаров 444—446
Электродинамика 209—249
— в искривленном пространстве 221, 223
Энергия гравитационная ньютоновской звезды 269
— кинетическая 380
— сохранение 363
Энергия-импульс материи Вселенной 380—384
Эффект гравитационной линзы 347
— — — поиск 475
Эффективное сечение рассеяния 345
— угловое расстояние 475
Эффективный потенциал 303—317, 343
Эффекты квантово-гравитационные 447

Яркость Солнца 244
«Яма в потенциале» 303—358

**УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!**

**Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим посылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, изд-во «Мир».**

Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер
ГРАВИТАЦИЯ том 2

Редактор Е. Майкова. Художник В. Медников
Художественный редактор В. Шаповалов
Технический редактор Е. Потапенкова
Корректор Н. Гиря

Сдано в набор 30/VIII 1976 г.
Подписано к печати 26/IV 1977 г.
Бумага тип. № 1 70×90¹/₁₆=16,50 бум. л.
33,61 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 35,53 Изд. № 2/9001
Цена 3 р. 93 к. Зак. № 1508

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9